Ejemplos del uso de la hoja de cálculo como herramienta didáctica

Cristianne Butto Zarzar, Joaquín Delgado y Jerónimo Zamora

Resumen: El presente trabajo expone algunas reflexiones acerca del uso de la hoja de cálculo como ejemplo concreto del lenguaje como herramienta psicológica. Se origina en un curso de capacitación de docentes en el uso de la Hoja de Cálculo y del ambiente Mathematica® ofrecido por los autores y dirigido a profesores del nivel medio superior y del primer año del nivel superior. La discusión se centra en la hoja de cálculo, porque su uso en la enseñanza de estos cursos ha sido poco explorado. Se presentan ejemplos y se discuten algunas dificultades.

Palabras clave: Hoja de cálculo, herramienta psicológica, zona de desarrollo próximo (ZDP).

Abstract: This paper poses some reflections around the use of the spreadsheet as a concrete exampe of psicological tool. It is motivated upon a training course for teachers on the use of the spreadsheets and the Mathematica® offered by the authors addressed to lecturers teaching Calculus in the last semesters of highschool and first years of graduate level. The discussion is focused on the spreadsheet since its usage in this kind of courses has been little explored. We present some examples and discuss some difficulties.

Keywords: Spreadsheet, psicological tool, zone of proximal development (ZPD).

INTRODUCCIÓN

Una de las grandes dificultades de los estudiantes que se inician en una nueva disciplina del currículo radica en el uso del lenguaje propio de la disciplina. El alumno debe interpretar, traducir a su propio diccionario social, conceptualizar y demostrar competencia en el manejo de símbolos, de sus relaciones lógicas, y de carácter de implicado a implicante, y en su nivel de generalización. El caso que

Fecha de recepción: febrero de 2000.

nos compete hace referencia a los primeros cursos de cálculo diferencial e integral; normalmente situados en el currículo dentro del nivel medio superior (preparatoria o bachillerato) y superior básico (primer año.) Estas dificultades no son exclusivas de esta disciplina, pues lo mismo ocurre en la práctica docente de la química, la lengua española y la física, y forman parte del mismo fenómeno abstracto de interpretación de símbolos -ya sea en el terreno de la semiótica (Saussure, 1998), en el uso del lenguaje como herramienta psicológica (Kozulin, 1995). En el caso particular del cálculo, las dificultades epistemológicas son evidentes desde sus orígenes: la noción del continuo como contraposición a lo discreto; del movimiento en contradicción aparente con lo estático; de la preservación de propiedades verificables en un número finito de argumentaciones al paso al continuo, todas las cuales se pueden resumir matemáticamente en las dificultades inherentes al concepto de número en un campo completo. En el proceso de transposición didáctica[1] del campo matemático para la esfera didáctica pedagógica, gran parte de esta dificultad se oculta en la manera eminente lógica de su presentación en el aula. El diseño curricular pone especial atención en la ilación lógica de los conceptos antecedentes y subsecuentes. Éste es el caso del concepto clásico de continuidad,

$$\textit{función} \quad \Rightarrow \quad \textit{límite} \quad \Rightarrow \quad \textit{continuidad}$$

que naturalmente se refleja en el manejo de símbolos

$$(y = f(x),\ x \in \mathrm{Dom}\ f) \Rightarrow (\lim_{x \to x0} f(x)) \Rightarrow (\lim_{x \to x0} f(x) = f(x_0)\ \&\ x_0 \in \mathrm{Dom}\ f)$$

sin embargo, históricamente los conceptos de límite, continuidad y función surgen interrelacionados, asociados a la idea de completez de los números reales

$$\textit{función} + \textit{límite} + \textit{continuidad} \quad \Rightarrow \quad \textit{número real,}$$

[1] Chevallard (1985) denomina "de transposición didáctica" al conjunto de transformaciones que sufre el saber científico antes de ser enseñado. Este proceso va desde escoger el saber a ser enseñado hasta su adaptación al sistema didáctico, incluye todo un proceso generador de deformaciones, que va desde el establecimiento de la coherencia hasta la creación de nuevos conocimientos, y concluye con el saber escolar.

De acuerdo con (Cockroft, 1982), lenguaje es una parte esencial de la formación y expresión de las ideas matemáticas y, por ello, es importante que los alumnos sean estimulados a expresar sus concepciones y justificar sus estrategias y representaciones.

La necesidad de presentar una teoría matemática, en este caso el cálculo, dentro de una estructura lógico-formal es innegable y surge de la exigencia de minimizar las contradicciones lógicas en todo sistema formal, o en todo caso hacerlas evidentes (el teorema de Gödel, la geometría de Lovachevski, por ejemplo).

En este sentido, el uso de la herramienta electrónica proporciona nuevas maneras de construir significados matemáticos, *e.g.*, procesos repetitivos que den origen a un supuesto inductivo, una conjetura geométrica o analítica a partir de ejemplos particulares. La computadora ofrece la posibilidad de establecer un lenguaje común a los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje, esto es, una plataforma común de transmisión de símbolos mediante la sintaxis –lenguaje de programación– propia del ambiente computacional.

La importancia del lenguaje como herramienta psicológica ha sido señalado ampliamente por Vygotsky (Kozullin, 1986; Mason *et al.*, 1985). En este contexto, la computadora se puede considerar en parte como una herramienta más del lenguaje, no sólo por su carácter externo como herramienta "manipulable", sino también por su influencia psicológica, pues conlleva al usuario a la reflexión de su propia capacidad de pensar y de procesar el conocimiento, produciendo uno diferente. Para que ello sea posible, según la teoría vygotskiana, se requiere un andamiaje mínimo de conocimientos y signos o símbolos que permitan a los participantes de la propuesta inducir a la reflexión para una posterior evolución conceptual de los contenidos. Esto, sin duda también requiere operativamente de un rediseño curricular de los perfiles de los actores (profesores y alumnos), proporciona diversas alternativas de trabajo pedagógico. Requiere, concretamente, un uso eficiente como un elemento más del lenguaje.

El uso de la computadora para la enseñanza de las matemáticas ofrece una alternativa pedagógica distinta y novedosa en temas que tradicionalmente ofrecen dificultades conceptuales o mecánicas, construyendo una realidad capaz de ser "tocada" desde la interfase del ambiente computacional propio, ya sea mediante listas, gráficos, controles de parámetros, de la animación virtual o con el acercamiento al proceso lógico-formal de la herramienta.[2]

Al combinar el uso de ambientes computacionales con la discusión en el salón de clases como metodología de trabajo, se pueden explotar aspectos tales como las diversas interacciones entre estudiantes, profesor y canal mediatizador (discurso, computadora); el contexto del conocimiento matemático, las funciones cognitivas

[2] Inclusive en la simulación de procesos de pensamiento o decisión más elaborados, como lógica difusa, borrosa o sistemas expertos.

y comunicativas como escuchar y hablar. De acuerdo con Balacheff y Laborde, (1984), en el proceso del habla construimos significados, reconstruimos lo que decimos, y las contradicciones, una vez superadas, cambian el entendimiento.

La incorporación de la computadora a la enseñanza se puede lograr desde distintos modelos de discurso, *vgr.*, 1) Modelo para la mediación en pareja, 2) Aprendizaje colaborativo, 3) Modelo tutorial en pareja (O'Donnell y King, 1999). Para esto, no basta sólo con tener diversos ambientes conformados con la presencia de una computadora y los *software* destinados especialmente a los temas que se pretenden aprender y enseñar. El aula deberá convertirse en un ambiente adaptado y adaptable a los nuevos requerimientos de quienes participan en el proceso de aprendizaje y a los objetivos de los modelos que se utilizarán.

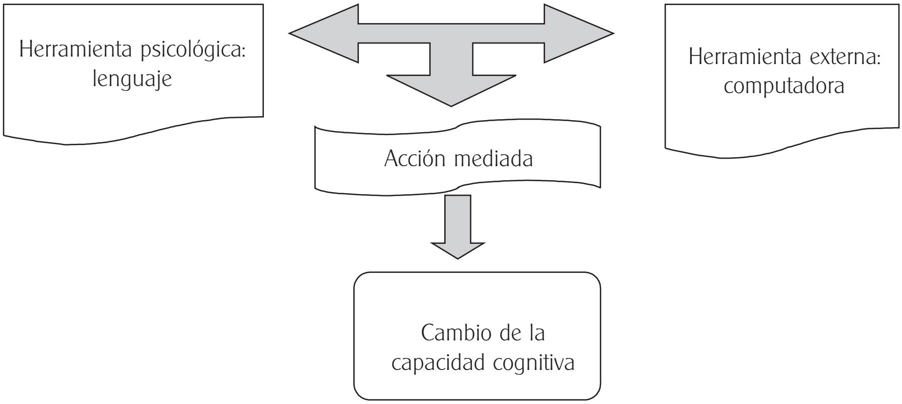
MARCO TEÓRICO

De acuerdo con Kozulin y Presseisen (1995), para Vygotsky las funciones superiores son exclusivas de los seres humanos y están mediadas por herramientas y sistemas de signos: el lenguaje, la escritura o los sistemas de numeración, entre otros. Al referirnos a la perspectiva vygotskiana, tomaremos solamente la relación entre pensamiento y lenguaje, que se explica mediante la relación entre herramienta externa (la computadora en este caso) y herramienta psicológica (lenguaje). Desarrollaremos brevemente esta idea para comentar posteriormente cómo el lenguaje computacional puede potencializar habilidades matemáticas y un lenguaje más cercano al lenguaje formal matemático.

Una de las propiedades de las herramientas psicológicas es definir niveles de desarrollo que son progresivamente más complejos, así como la explicitación de su naturaleza social. Aquí ocurre también lo que denominamos *acción mediada,* que parte de la acción humana general y se concreta en herramientas externas y herramientas psicológicas (lenguaje). La mediación se da a través de la inclusión de signos, la incorporación de los instrumentos externos y la inclusión de las herramientas psicológicas que influyen en las funciones mentales y determinan la estructura de un nuevo acto instrumental, mediante las relaciones entre pensamiento y lenguaje, conforme lo ilustra la figura 1.

Ciertamente, asumir la actividad cognitiva como una actividad socialmente mediada por herramientas externas y psicológicas implica necesariamente considerar el lenguaje y su uso como un instrumento en el cual desempeñan un papel importante, por ejemplo, los sistemas de signos y el uso de los ambientes

Figura 1



Un signo es siempre, originalmente, un instrumento usado para fines sociales, un instrumento para influir en los demás, y sólo más tarde se convierte en un instrumento para influir en uno mismo.

Vygotsky

computacionales. De éste, su propia estructura obliga a replantear o crear nuevas estrategias de solución de un problema o un concepto dado. En suma, el uso de la herramienta modifica el propio proceso de pensamiento.

EL USO DE AMBIENTES COMPUTACIONALES

De manera más precisa, un ambiente computacional es un conglomerado de programas interconectados que conforman:

1. una interfase (intérprete de comandos),
2. un lenguaje de alto nivel compatible con el ambiente,
3. un asistente (menú de ayuda),
4. rutinas de graficación, y
5. un editor de texto.

La elección de un ambiente computacional es importante desde el punto de vista didáctico y operativo. Al principio, conviene distinguir entre ambientes computacionales y de calculadora: por definición, el primero tiene una interfase gráfica de alta calidad de definición y color y es capaz de soportar distintos sistemas operativos e intérpretes con ayuda de software, y es de uso general; en contraposición, el ambiente de calculadora soporta, a lo más, módulos que amplían un módulo básico; el lenguaje computacional es de mediano nivel y no es estándar, sino que depende del fabricante; es de uso específico. El costo no es ya la mayor ventaja de un ambiente de calculadora sobre uno computacional y es mera cuestión de objetivos, costos y funcionalidad.

Entre la variedad de programas y ambientes computacionales disponibles comercialmente, hemos tomado la hoja de cálculo Excel para ejemplificar concretamente su utilidad como herramienta del lenguaje: además de su uso común en el trabajo administrativo y de contabilidad, disponible dentro del paquete MSOffice© y es de bajo costo relativo. Aquí exploramos sus posibilidades, porque en muchas ocasiones no se dispone de paquetes más sofisticados, y una hoja electrónica es de fácil acceso si se cuenta con una computadora de tipo comercial. Así, es posible contar con una hoja de cálculo a partir de plataformas de hardware basadas en procesadores 386 o superiores. Esto también presenta la viabilidad de un proyecto de enseñanza o capacitación basado tan solo en equipo reciclado y de bajo costo.

BREVE DESCRIPCIÓN DE LA HOJA DE CÁLCULO

La hoja de cálculo es un arreglo de filas, numeradas consecutivamente, y columnas, ordenadas en orden alfabético (A, B, C). Una fila y un renglón determinan una celda, a cuyo contenido se tiene acceso desde su dirección, por ejemplo, B3, A25. Las celdas pueden contener texto, números o fórmulas, que pueden hacer referencia a funciones que dependen de una o más celdas a partir de su referencia. Las fórmulas se distinguen por el símbolo "=" en la ventana de estado. Las referencias a las celdas pueden ser absolutas o relativas; \$B\$3 es una referencia absoluta, B3 es una referencia relativa, y \$B3 es una referencia mixta. Esta diferencia entre referencias es una de las características más importantes y a ella debe su eficiencia la hoja de cálculo; aquélla, a la vez, presenta un primer obstáculo de lenguaje: por un lado la sintaxis está muy alejada de la notación funcional más común de matemáticas (veremos más adelante cómo puede superarse esta dificultad con el uso de nombres); por otro, el signo "=" tiene un significado asimétrico: "asigne la expresión al contenido de la celda". Expresiones largas pueden ser difíciles de leer, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Expresión funcional	Expresiones equivalente en hoja de cálculo	Observación
$\sqrt{\dfrac{Cxy}{x^2+y^2}}$	=RAIZ(C1*A1*B1/(A1*A1+B1*B1))	C1 contiene el valor constante C
$\sum_{k=0}^{10} q^k$	=1 =A1*C1 Ctrl-c; Ctrl-v (copiar y pegar) =suma(A1:A10)	C1 contiene el valor de la razón *q*. El valor 1 se guarda en la celda A1.

Las referencias absolutas en una fórmula apuntan al contenido de la celda referida en relación con un origen absoluto (digamos la celda A1), en tanto que una referencia relativa apunta al contenido de una celda referida a la posición relativa con otras celdas. Esta estructura sintáctica basada en celdas y referencias, constituye la base de la hoja de cálculo, la cual está enriquecida por elementos o funciones colaterales que complementan esta funcionalidad: estructuras de control e inclusión de objetos como gráficos o texto.

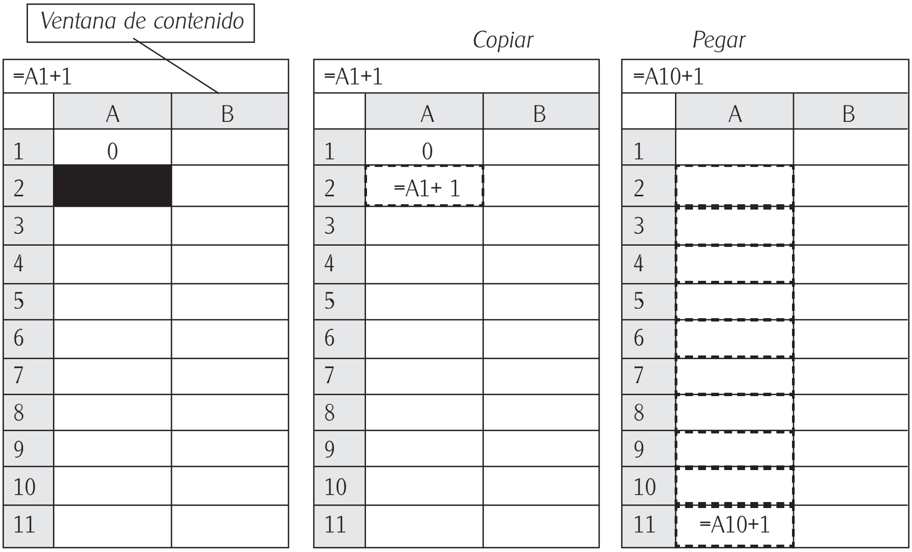
Los siguientes ejemplos muestran desde los aspectos más elementales del uso básico del simbolismo de Excel hasta los más complejos que mimetizan la notación funcional clásica mediante el uso de *nombres* en Excel. Preferimos hacer una discusión más específica a partir de ejemplos que plantear un análisis general de la simbología de la hoja de cálculo.

EJEMPLOS

1. Caída libre

Encontrar la distancia recorrida por un objeto en caída libre, durante los primeros 10 segundos, si inicialmente se parte del reposo.

La fórmula de Galileo afirma que si d es la distancia recorrida y t el tiempo entonces $d = {}^1/_2\, g\, t^2$, donde $g = 9.81$ m/seg^2. La columna A contiene el tiempo en intervalos de 1 segundo hasta diez. La celda A2 continene la fórmula que incrementa en uno la celda A1 (referencia relativa). Al copiar y pegar en la columna B, la referencia A1 se actualiza y tiene el significado de variable "valor de la celda inmediata superior relativa a la celda actual". Esto puede verse claramente si se observa el contenido de la celda A11 en la ventana de contenido



La primera distancia recorrida se calcula en la celda B1, introduciendo la fórmula (= 0.5*C1*A1). La celda C1, referida absolutamente aquí, significa el valor constante de *g*. El significado de Al en la fórmula de la celda B2, cuando se copia y pega en el resto de la columna B, adquiere el significado de "valor de la celda inmediata a la izquierda de la celda actual", en este caso el tiempo (véase p. 145).

La acción de "copiar y pegar" en Excel equivale a resolver explícitamente una relación de recurrencia con dato inicial. Aquí aparece una primera dificultad en el uso de la hoja de cálculo, pues antes de experimentar con una relación funcional $y = f(x)$, es necesario definir las relaciones de recurrencia $x_{n+1} = \xi(x_n)$, $y_{n+1} = \eta(y_n)$, éstas pueden ser tan elementales como una serie aritmética: $x_{n+1} = a + r\,x_n$, por ejemplo para definir el dominio de la variabe $x \in [a,b]$, para después disponer de los valores $y_n = f(x_n)$.

Distancia inicial

=0.5*C1*A1			
	A	B	C
1	0		9.81
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		

Copiar

C=0.5*C1*A1		
A	B	C
0		9.81
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Pegar

C=0.5*C1*A10		
A	B	C
1		9.81
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
	10	
11	=0.5*$C $1*A10	

Discusión

El ejemplo de la caída libre ilustra una de las ventajas pocas veces explorada de la hoja de cálculo: el uso de nombres y el simbolismo funcional. Un *nombre* es una cadena que representa el contenido de toda una columna o fila. La asignación de un nombre se hace marcando la(s) columna(s) o fila(s) e incluyendo al principio de la(s) fila(s) o columna(s) el nombre de ésta(s), y seleccionando del menú principal: Insertar → Nombre → Crear. En la ventana de diálogo se pedirá confirmar si las primeras filas o columnas se tomarán como los nombres de las columnas.

En el ejemplo de caída libre se asignan el nombre *t* a la columna que contienen el tiempo ($A1:$A11) y el nombre *g* a la celda C1. En la celda B1, donde se calcula la distancia inicial, se puede usar ahora la fórmula (= 0.5*g*t*t), que se copia y pega en el resto de la columna B (p. 146).

El uso de *nombres*, además de acercar al alumno a la notación funcional matemática clásica, le permite construir su propio significado de *variable*; los *nombres* son ahora objetos que representan columnas (o renglones) completos, independientemente de cómo se hayan generado y la relación entre variables se expresa mediante una relación algebraica 1 a 1 que incluye constantes, variables y parámetros, en vez de posiciones relativas de celdas.

=0.5*g*t*t			
	A	B	C
	t		g
1	0		9.81
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		

2. El triángulo de Pascal

Como es bien conocido, el desarrollo binomial de $(a+b)^n$ admite la fórmula general

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} = a^k b^{n-k}$$

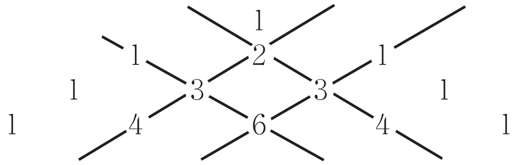
donde

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

son los coeficientes binomiales. La fórmula que se usa para generar la tabla se basa en la propiedad

$$C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} \qquad (1)$$

Los coeficientes arreglados en forma de triángulo se verían así:



Donde las líneas marcan la relación recursiva (1). Este arreglo se puede “traducir” en la hoja de cálculo como un arreglo de filas y columnas, como se muestra enseguida:

= A2+B1				
	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1			
3	1			
4	1			

	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	6	10
4	1	4	10	20

El contenido de la celda marcada B2 se puede calcular ahora sumando el contenido de las celdas vecinas, usando la fórmula de Excel (= A2+ B1). Si se usan referencias relativas, es muy fácil completar la tabla, pues entonces basta copiar la celda B2 en el resto de la tabla.

Después de haber completado la tabla, se hace evidente la simetría respecto de la diagonal. Esta observación es fácilmente comprobable para un número razonablemente grande de casos, y esta es la ventaja principal de haber usado la hoja de cálculo, lo que nos permite conjeturar la relación

$$C_{n,\,k} = C_{n,\,n-k.}$$

Traducida en la identidad

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Discusión

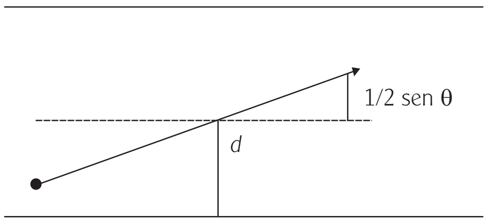
Varios autores han enfocado el uso de la hoja de cálculo hacia el descubrimiento de patrones numéricos (Mason *et al.*, 1985; Kieran, 1999) como una ruta hacia el pensamiento algebraico; en este ejemplo se usa en el mismo sentido, pero en un nivel preuniversitario, es decir, como antecedente a la idea de *inducción matemática.*

3. La aguja de Bufon

Se hace una simulación del experimento clásico de Bufon: se lanza repetidamente una aguja sobre un enrejado de líneas paralelas. Calcular la probabilidad de que la aguja cruce una de las líneas del enrejado.

Planteamiento: Se supone que la aguja y la separación entre las líneas horizontales es una unidad. El espacio de eventos se puede parametrizar por *d*, la distancia de la línea más cercana al punto medio de la aguja, y θ, el ángulo que forma la aguja con la horizontal.

Figura 2



El espacio de eventos se representa por

$$E = \{ (\theta, d) \in [0,\pi] \times [0,1/2]\}.$$

(en este caso son indistinguibles la punta y la cola de la aguja).

El conjunto de eventos favorables viene dado por el conjunto

$$F = \{ (\theta, d) \in [0,\pi] \times [0,1/2] \mid d \leq {}^1/_2 \text{ sen } (\theta)\}.$$

Luego la probabilidad es

$$P = \text{Área } (F)/\text{Área } (E).$$

Ya que

$$\text{Área }(F) = \int_0^{\pi} 1/2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta = 1, \qquad \text{Área }(E) = \pi/2,$$

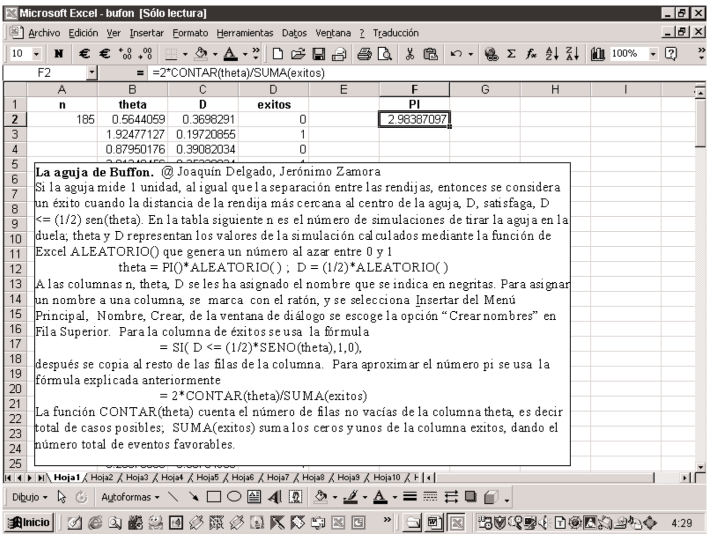
se sigue que

$$\pi = 2/P.$$

Esta última relación se puede usar para “redescubrir” el número π probabilísticamente, *vgr.* a partir de la noción de probabilidad clásica y de la noción de área. Un camino obvio conduce a reproducir el experimento, y éste puede ser muy provechoso, pues se presta a asignar tareas o combinar estrategias; por ejemplo, un alumno puede arrojar la aguja, mientras otro llevar el conteo, situaciones críticas donde un “evento favorable” no sea claro (por ejemplo, si la aguja cae entre las rendijas, o “casi la toca”). La otra opción es usar la hoja electrónica, y se puede comparar el tiempo para realizar una simulación y el experimento.

Para codificar el programa, Excel dispone de la función RANDOM, que genera números aleatorios (pseudoaleatorios en un sentido matemático estricto, pero para fines prácticos se pueden considerar así), y la función lógicas SI que permiten distinguir un evento favorable. En la figura 3, se muestra una sesión en Excel sin muchos detalles, donde se usaron *nombres* y funciones de librería como CONTAR o SUMAR.

Figura 3



Discusión

La discusión de este problema presupone una "plataforma común de conocimiento", como se menciona en la teoría vygotskiana, en este caso, la noción de área entre regiones curvilíneas y la de probabilidad clásica trigonométrica. Las ventajas de la simulación de un número arbitrariamente grande de experimentos es, sin lugar a dudas, una ventaja que permite motivar desde un enfoque distinto el concepto de número, de área y de probabilidad. Este ejemplo cae propiamente en el terreno de la *modelación matemática* (véase también Molyneux *et al.*, 1999, donde se propone un modelo de difusión molecular). Ya de inicio, el concepto de espacio muestral presenta dificultades epistemológicas profundas, pues existen paradojas que surgen de asociar diversos espacios muestrales al mismo experimento; así, ante esta reflexión más profunda, la hoja de cálculo no ofrece una respuesta definitiva, pero sí la posibilidad de experimentar rápidamente con el modelo.

4. El modelo de crecimiento logístico

Una población de tamaño x_n (densidad de población) crece en unidades discretas de tiempo n a una tasa de crecimiento autorregulada siguiendo el modelo logístico

$$x_{n+1} = m\,(1 - x_n)\,x_{n.}$$

Estudiar el comportamiento cualitativo de la evolución de la población conforme al parámetro m.

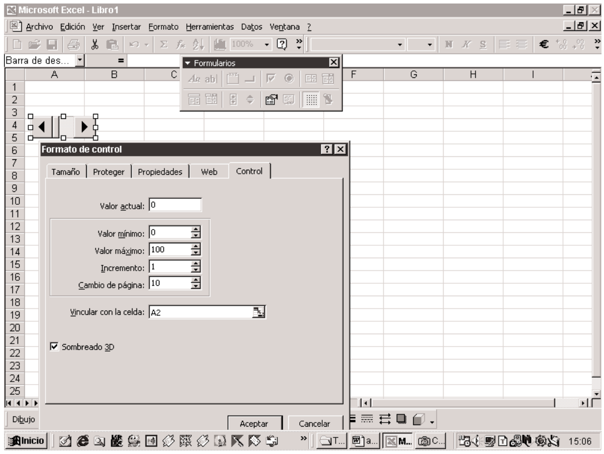
Éste es uno de los primeros ejemplos de sistemas dinámicos que han sido estudiados y presentan distintos tipos de comportamiento, monótono, desde periódico hasta caótico en el rango $1< m < 4$ (Devaney).

El uso de controles

Los controles son botones o barras de desplazamiento (técnicamente llamados controles Active X) que permiten modificar el contenido de una celda. Cuando el contenido de una celda controlado por un botón Active X es el valor de un parámetro, es posible rehacer rápidamente un cálculo o simulación completa, si la hoja de cálculo contiene referencias relativas ligadas al parámetro.

Figura 4

=A2*0.1		
	A	B
1	=A2*0.1	
2		



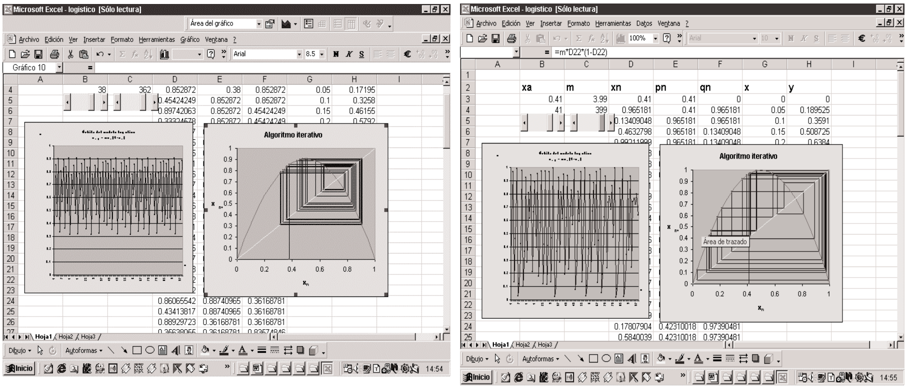
La sucesión x_n se puede construir mediante una fórmula recurrente, al igual que en el cálculo de la distancia recorrida en el ejemplo de caída libre. Si el valor del parámetro *m* está referido a la celda A1, por ejemplo mediante una celda auxiliar, ésta se liga primero a una celda auxiliar, digamos A2, para controlar la sensibilidad del botón, es decir el incremento y valor inicial del parámetro. El contenido de la celda A2 se puede entonces controlar con un botón ActiveX mediante el *Menú de Formularios* de la barra de herramientas.

En la simulación presentada en la figura 4, se ha hecho uso de controles para modificar el valor del parámetro *m* del modelo. Es interesante ver cómo un simple deslizamiento de la barra permite dar una idea general del comportamiento del sistema dinámico en relación con el parámetro. Los gráficos se han hecho con base en los menús de gráficos propios de Excel.

Discusión

Este ejemplo muestra las posibilidades de alcanzar un nivel de comprensión razonable, aun para un primer encuentro, del concepto de sistema dinámico, de sucesión y convergencia (por ejemplo, con las gráficas a la izquierda en las pantallas que aparecen en la figura 5), estabilidad y atracción. La importancia de los puntos fijos $f(x) = x$ de la aplicación logística $f(x) = m\,(1 - x)\,x$, se resalta con los grá-

Figura 5



ficos de “telaraña” (a la derecha en las pantallas que aparecen en la figura 5); y como la estabilidad depende del valor de la derivada en el punto fijo, sin mayor dificultad el alumno podría realizar el diagrama correspondiente para los doblemente periódicos como puntos fijos de la aplicación $f^2(x) \equiv f(f(x))$ y el proceso de *bifurcación*, es decir, del mecanismo de aparición de dos puntos periódicos cuando se varía el parámetro *m*. Por supuesto que estos conceptos se deben definir, y las propiedades que se puedan conjeturar se deben probar rigurosamente.

El mapeo logístico fue uno de los primeros en ser estudiados, pues presenta el fenómeno de caos en sistemas determinísticos. La hoja de cálculo ofrece la posibilidad de estudiar otros sistemas, como los definidos por un “mapeo tienda” (su gráfica presenta un solo máximo en el intervalo [0,1], sin ser necesariamente diferenciables), que se puede definir mediante una función lineal a trozos, por ejemplo. Los conceptos de órbita, punto fijo, punto periódico y estabilidad pueden muy bien ilustrarse mediante cualquiera de los dos gráficos: el de telaraña o el de la sucesión x_n.

El interés pedagógico de este ejemplo se da también en dos direcciones por un lado, se presenta el problema de cómo definir una sucesión recurrente para calcular una órbita, cómo variar sólo el valor del parámetro, cómo ejecutar la secuencia de comandos necesarios para realizar el despliegue gráfico, así como el modo de hacer la simulación eficiente (con el uso de botones). En la otra dirección, el interés radica en cómo interpretar los resultados de la hoja de cálculo: ¿cómo distinguir un punto periódico a partir de la secuencia numérica o del gráfico?; ¿cómo distinguir una solución “caótica”?; ¿de qué características geométricas de la gráfica de $f(x)$ depende la estabilidad?, etc. En suma, se presenta al estudiante el reto de construir un andamiaje mínimo conceptual de un sistema dinámico.

RESULTADOS

Algunas de las prácticas en el ambiente de la hoja de cálculo fueron presentadas en un curso de diplomado orientado a profesores de enseñanza media superior (CEBTIS) y superior de los primeros trimestres (UAM-I, UPN), encargados de la enseñanza de cursos básicos como Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales, o Farmacología. El interés principal de los participantes fue la capacitación orientada a la preparación de material didáctico en dos ambientes específicos: la hoja de cálculo y *Mathematica*. En este trabajo, se han discutido solamente los aspectos relevantes de la hoja de cálculo, reflexiónando sobre su uso como lenguaje en el sentido de herramienta psicológica, así como algunos aspectos técnicos poco discutidos en la literatura. La aceptación de los participantes fue buena, sobre todo entre los docentes de ciencias experimentales (farmacología y carreras técnicas), para quienes el uso de la hoja de cálculo se orienta frecuente y principalmente al cálculo numérico. Los participantes de cursos iniciales de Cálculo Diferencial y Ecuaciones Diferenciales mostraron una preferencia marcada por el ambiente que ofrece *Mathematica*, principalmente por las sintaxis funcional y la organización lógica de los documentos (*Notebooks*) disponibles en distintos estilos.

Presentamos dos ejemplos del tipo de prácticas que los participantes realizaron como proyecto final en ambiente de hoja de cálculo.

LA DERIVADA COMO LÍMITE DE RECTAS SECANTES

En esta práctica se ilustra la derivada como límite de rectas secantes para una familia de funciones de la forma $y = ax(x - j)(x - k)$. Se incluyeron botones de control para modificar los valores de las raices j, k así como el factor de escala a. La recta secante se traza a partir de los puntos con abscisas x_a, x_b que también se pueden controlar. La práctica se muestra en la figura 6 y fue elaborada por uno de los participantes del nivel superior.

Figura 6

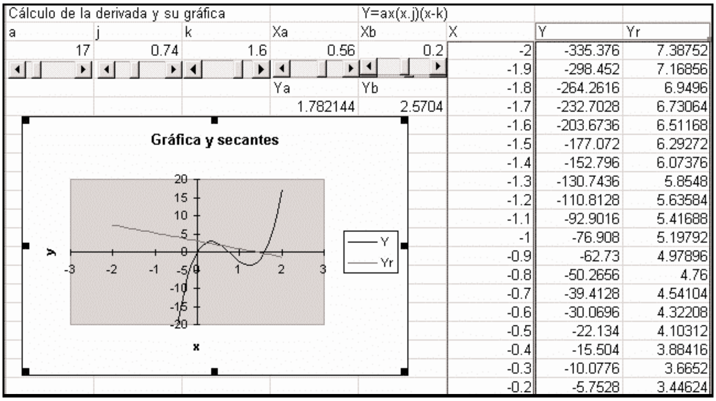
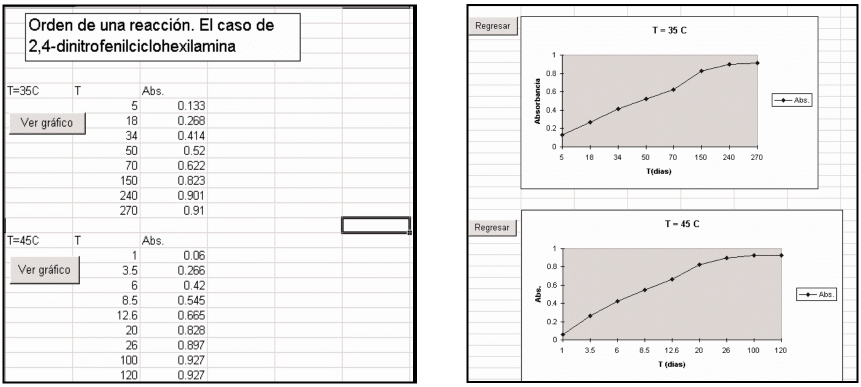


Figura 7



Orden de reacción. El caso de la 2,4-dinitrofenilciclohexilamina

En esta práctica se grafican datos experimentales de absorbencia de cierto fármaco a ciertas temperaturas, de donde, a partir de la pendiente de la gráfica, se puede determinar el orden de la reacción. El autor introdujo ligas de hipertexto de los datos a los gráficos correspondientes que, dentro de la práctica, están situados en distintas hojas de trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores fueron apoyados por los siguientes proyectos: Cristianne Butto fue apoyada por el proyecto de grupo: "La incorporación de nuevas tecnologías a la cultura escolar: la enseñanza de las ciencias y las matemáticas en la escuela secundaria", financiado por Conacyt Ref. G-263385. Becaria Imexci de la SRE; Joaquín Delgado fue apoyado por el proyecto Conacyt 400200-5-32167.

DATOS DE LOS AUTORES

Cristianne Butto Zarzar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional
cristianne_butto@hotmail.com

Joaquín Delgado Fernández
Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa
jdf@xanum.uam.mx

Jerónimo Zamora Carrillo
Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa
zacj@oso.uam.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Devaney, R.L. (1982), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems,* Menlo Park, CA, Benjamin/Cummings.

De Saussure, F. (1998), "Objeto de la Lingüística", en *Curso de Lingüistica General,* Fontamara, vol. 25, cap. 3, pp. 33-44.

Kieran, C. (1992), "The Learning and Teaching of School Algebra", en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teching and Learning,* Nueva York, MacMillan, pp. 390-419.

Kozulin, A. y B. Z. Presseisen (1995), "Mediated Learning Experience and Psychological Tools: Vigotsky's and Feuerstein's Perpectives in a Study of Student Learning", *Educational Pshycologist,* vol. 30, núm. 2, pp. 67-75.

Kozulin, A.(1998), "El concepto de actividad psicológica", en *Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva cultural. Cognición y pensamiento humano,* Paidós, cap. I, pp. 23-49.

Kozullin, A. (ed.) (1986), *Vigotsky, L.S. Thought and Languaje* (ed. rev.), Cambridge, Ma.-The MIT Press.

Mason, J., A. Graham, D. D. Pimm y N. Grower (1985), *Routes of Roots of Algebra,* Gran Bretaña, The Open University Press.

Molyneux-Hodgson, S., S. Rojano, R. Sutherland y S. Ursini (1999), "Mathematical Modelling: The Interaction of Culture and Practice", *Educations Studies in Mathematics,* núm. 39, pp. 167-183.

O'Donnell, A. y A. King (1999), *Cognitive Perspectives on Peer Learning,* LEA Lawrence Erlbaum Associates Publishers, cap. 2.

Vigotsky, L. S. (1934), *Pensamiento y lenguaje,* Ediciones Quinto Sol, 2a. reimpresión, 1999.