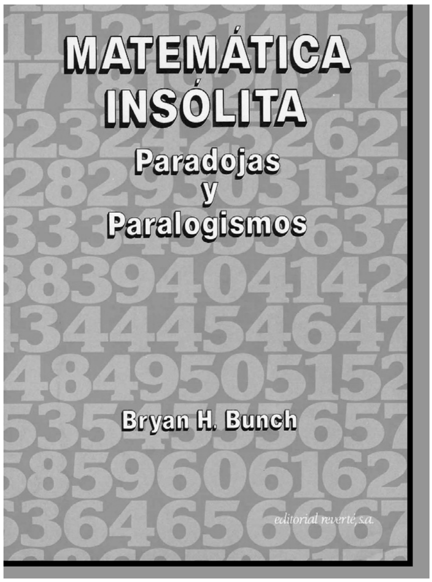
Matemática insólita. Paradojas y Paralogismos, de Bryan H. Bunch

Reseñado por Santiago Valiente

EN EL MUNDO DE LAS CONTRADICCIONES MATEMÁTICAS



Pocos libros, cuyo contenido trate las paradojas, se pueden tener a la mano, por lo menos en nuestra lengua. Conocidísimo es el libro, *Paradojas Matemáticas de Northrop* (Breviario núm. 18/18a de UTEHA, México, 1968). Más reciente, ameno y bien tratado es el libro que hoy nos ocupa *Matemática Insólita,* cuya ficha completa aparece arriba. En su Prefacio se dan los lineamientos de la obra, que está compuesta de ocho capítulos, los cuales paso a desarrollar.

Prefacio. Según detalla el autor, "Este libro es una colección y un análisis de las más interesantes paradojas y falacias de la matemática, la lógica, la física y el lenguaje. También trata de importantes resultados matemáticos que están basados en las paradojas, especialmente el teorema de Gödel de 1931 y los problemas de decisión general". En los tres primeros capítulos se dan ejemplos acerca de falacias matemáticas comúnmente aceptadas por los especialistas. En los capítulos 4 al 8 se muestran ejemplos de desarrollos en los que aparecen contradicciones, pero en los que no hay un consenso de explicación. El libro puede ser leído por el lector medio, pues, para la comprensión cabal de la mayoría de sus contenidos, sólo se requiere un álgebra y una geometría de bachillerato.

Capítulo 1. Razonamiento erróneo sobre ideas sencillas. A partir de la verdad universal de que todo mundo comete errores en matemáticas, se hace ver la diferencia entre el error como una equivocación y la falacia como el error que resulta de un razonamiento que parece correcto. A partir de esta idea, se nos presentan ejemplos de falacias en las que, por procedimientos incorrectos, se llega a resultados correctos y otros ejemplos en los que aparecen errores por suponer que un razonamiento puede repetirse para una situación diferente pero relacionada. También se puede ver que, cuando el razonamiento matemático y la experiencia se contradicen, aparece una falacia y, mientras ésta no sea explicada, se tiene una paradoja. Estas paradojas pueden ser de tipo matemático o del uso inadecuado del razonamiento o del lenguaje. En el caso de las falacias matemáticas, éstas aparecen, con frecuencia, por la violación de alguna regla matemática.

A continuación, el autor nos presenta cuatro apartados en los que se van mostrando ejemplos de paradojas que resultan interesantes. En "Ver para creer", se muestra la paradoja del recorrido que hacen dos puntos ubicados, cada uno en sendas monedas, una pegada a la otra, y que se desplazan sin resbalar sobre una superficie plana. Aquí la paradoja es la de mostrar como válido que las circunferencias que describen las monedas, que tienen diferentes radios, son iguales; en "Pasos inaceptables" muestra paradojas sobre razonamientos falsos entre los que se incluyen la división entre cero; en "Eliminación de paradojas por definición" se incluyen casos que se refieren al uso arbitrario de conceptos matemáticos que deben estar muy bien definidos. Tales son los casos para $\sqrt{x^2} = |x|$, especialmente para cuando aparece el caso $\sqrt{-1}$, $\sqrt{|a|}$ y $\sqrt{x}\ \sqrt{y}$, cuando la x y la y no son negativas; en "Una paradoja inesperada", el autor hace el análisis de las contradicciones que se observaron un parte emitido por la radio sueca en la Segunda Guerra Mundial:

> Un ejercicio de defensa civil se realizará esta semana, con objeto de confirmar que las unidades de defensa civil están convenientemente preparadas, nadie sabrá con anterioridad el día en que tendrá lugar este ejercicio.

Capítulo 2. Razonamiento erróneo sobre el infinito. En este capítulo se hace el análisis de diversos casos en los que aparece el concepto de infinito, en diversas acepciones matemáticas. Tiene cuatro apartados. El primero es "Las dificultades que origina'"... y así sucesivamente'", en la que el autor aborda el estudio de relaciones para obtener sucesiones numéricas y llegar al concepto de término general y el de *infinito numerable*; en "El infinito paso a paso", siguiendo con las sucesiones, se abordan casos en los que éstas se forman sumando términos de otra sucesión y se agrega cada vez un término más, a fin de obtener una nueva sucesión. Estas expresiones, al final de cuentas, acaban por resolverse mediante la inducción matemática, a fin de realizar demostraciones finitas para cubrir un número infinito de casos, pues no pueden trabajarse con las herramientas del álgebra cotidiana, ya que la sucesión de términos al infinito (*y así sucesivamente*) expresan una infinidad numerable de ecuaciones; en "Sobre una suma", se trabaja en casos individuales que tienen una infinidad contable de términos; en "Una paradoja para un jugador obstinado", se presenta la discusión de un ejemplo en el que un razonamiento correcto lleva a una paradoja. Es la *paradoja de Petersburgo,* la que analiza con suficiencia, apoyado en sumas infinitas de dinero, que son infinidades numerables y que permiten fácilmente razonar incorrectamente a partir de series que no contienen sumas.

Capítulo 3. Utilización de una idea falsa para hallar la verdad. Consta de cinco apartados. En "Dibujemos una recta interior", el autor trabaja en tres demostraciones que llevan a contradicciones que se pueden dar a través de propiedades de la geometría del triángulo y que incluye la llamada demostración indirecta por *reducción al absurdo* a partir de la ley del tercero excluido. En "Existencia y no existencia", se presentan ejemplos de demostraciones de *existencia* y de *no existencia*. Entre las primeras, maneja la demostración: "nadie tiene más de mil millones de pelos en su cabeza" (¡interesante!), y entre las segundas, aborda una demostración directa y enseguida una indirecta para establecer que la diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables. En "Quién afeita esta paradoja", da el enunciado planteado por Bertand Russell: "Un señor de Sevilla es afeitado por el Barbero de Sevilla si y sólo si el señor no se afeita a sí mismo. ¿Se afeita a sí mismo el Barbero de Sevilla?" Otra más: "Supongamos que un país declara que cada ciudad del país debe tener un alcalde. Sólo hay dos lugares donde al alcalde se le permite vivir, (y debe vivir sólo en uno de ellos). O el alcalde vive en la ciudad que gobierna o en la Ciudad de los Alcaldes, una ciudad construida especialmente para aquellos alcaldes que no viven en la ciudad que gobiernan. Puesto que la Ciudad de los Alcaldes es una ciudad, debe tener un alcalde. ¿Dónde debería vivir", y esta otra más: "Un bibliotecario imprime una bibliografía de todas las bibliografías de su biblioteca que no se citan a sí mismas. ¿Debería la nueva bibliografía citarse a sí misma?". En "Parece realmente cierto", el autor hace ver que la ley del tercero excluido no ha presentado fallas en el mundo físico, cosa que no ocurre en la realidad matemática. Al trabajar con ciertas intuiciones matemáticas se puede asegurar la existencia de determinados entes matemáticos, aunque éstos no estén demostrados. Caso de ello es la *conjetura de Goldbach,* que establece que cualquier número natural par mayor que 2 es la suma exacta de dos números primos, la que hasta ahora sigue como conjetura, y de utilidad matemática pues permite definir a algunos números naturales. En "La Lógica al revés", se maneja la *paradoja de Hempel* que establece que en un conjunto finito suficientemente grande, si la probabilidad de obtener una condición aumenta con cada nuevo elemento que tiene esa condición, ello no garantiza que un siguiente elemento no la cumpla, pero da expectativas creciente de su generalización, sin que ello represente una demostración.

Capítulo 4. Un lenguaje ambivalente. Se compone de siete apartados en los que se hace el análisis de enunciados verbales que llevan a contradicciones. En "Colección de contradicciones", se dan ejemplos y el análisis de los grados de autocontradicción de algunas sentencias como: *el juicio que estoy haciendo es falso*. En "El mentiroso", se hace el estudio de la versión aristotélica de la expresión "*Esta sentencia es falsa*", la que ha generado diversas presentaciones respecto de la original. En "No llamar la atención sobre uno mismo", se hace el análisis de expresiones paradójicas cuya explicación se funda en eliminar las sentencias que originan la paradoja. En "Vicioso, vicioso, vicioso", se hace referencia a la sentencia dada en *El Quijote* cuando Sancho Panza gobierna la isla de Barataria, lugar en el que todo el que llega debe decir el motivo de su presencia: si dice verdad se le pone en libertad, en cambio, si dice mentira, se le cuelga. Un cierto viajero dice: "Estoy aquí a que me cuelguen". En "Una paradoja impertinente", se maneja la paradoja de *Quine*, para la que no existe elemento externo que la lleve a contradicción, sino que la contradicción está en ella misma. En "En torno a las palabras", se hace alusión a los adjetivos que son autológicos (que se autodescriben) y a los heterológicos. A partir de esto, "si heterológico se describe a sí mismo, es autológico, por lo tanto no se describe. Si no se describe a sí mismo, entonces es heterológico, por lo tanto se describe a sí mismo". En "¿Existe Pegaso?", el autor se refiere a paradojas que, siendo del lenguaje, también lo son de la matemática.

Capítulo 5. Paradojas que cuentan. En este capítulo, el autor comienza haciendo una breve descripción histórica respecto del cuidado que los matemáticos han tenido al utilizar el concepto de infinito. Se desarrolla el capítulo en ocho partes. En "Una buena cuenta", a partir de la correspondencia *uno a uno* entre dos colecciones de objetos, se establece el número de elementos de un conjunto (o de los dos), esto es, se cuentan. Cuando esta idea se lleva a los conjuntos infinitos se establecen paradojas como la que, en contra de la intuición, establece que el número de números naturales es igual al número de números pares, y no el doble. De la misma manera, se puede "demostrar" que existe el mismo número de puntos en dos segmentos de recta, aunque uno de ellos es de doble longitud del otro. En "Paradoja incorporada", se muestra, a partir del rumbo que siguieron los trabajos de Georg Cantor, que "la característica que distinguía a los conjuntos infinitos era precisamente que en ellos se presentaba la paradoja. Se podría decir que un conjunto infinito es aquel en el que el todo no es igual a la suma de sus partes. Más técnicamente, es aquel en el cual una parte del conjunto que no contiene a todos sus elementos puede ser puesta en correspondencia uno a uno con el conjunto total". Lo mismo ocurre con los números enteros, y con mayor complejidad, con los racionales; sin embargo, aunque se pensara que esta situación siguiera con los números reales, Cantos probó que no es así, y para ello usó un nuevo método indirecto de demostración: *método diagonal de Cantor*. En "Conjuntos de conjuntos", se establece el criterio de Cantor de que para conjuntos finitos con *n* términos el número de subconjuntos es 2^n. Cuando hay *n* términos en el conjunto, se extiende, como notación, al caso en que *n* es infinito. Con esta idea, llega a los conjuntos llamados *cardinales transfinitos*. En "Orden en el infinito", se trata de la *hipótesis del continuo,* por la que el cardinal del conjunto de los números reales es el mismo que el número de maneras en que puede ser ordenado el conjunto de los números naturales. En "Las cosas van mal", en la demostración de que el número de subconjuntos es mayor que el número de elementos de un conjunto, se hace ver que este ordinal puede no estar en la serie de los números ordinales, cosa que es una contradicción. En "Reparemos el daño", se aclara que, para evitar estas contradicciones, Poincaré introdujo el concepto de definiciones impredicativas, las que no deberían ser usadas en matemáticas. Sin embargo, muchos conceptos y definiciones de la matemática básica se basaban en este tipo de definiciones. En "Un programa formal", se muestra el intento por llegar a eliminar las paradojas en una teoría formal matemática. Para ello, David Hilbert, en 1920, intenta probar la consistencia de la matemática y recurrió a un programa en el que desasociaba las matemáticas de la realidad, esto es, prescindía de las interpretaciones físicas. Ese intento se basaba en establecer cuidadosamente las reglas, se podrían evitar las paradojas y avanzar en el conocimiento matemático válido. Ese programa fue el *formalismo* matemático, contrario al *intuicionismo*. Con la teoría axiomática de conjuntos se ha avanzado considerablemente, pues no rechaza ninguna parte no paradójica de la matemática, aunque en cualquier momento pueden surgir nuevas paradojas.

Capítulo 6. ¿Tiene límites el pensamiento? Se desarrolla en cinco apartados. Aunque hacia 1930 se pensaba que el programa de Hilbert parecía adecuado para mostrar que las matemáticas, convenientemente formuladas, estaban libres de contradicciones a pesar de las paradojas, poco después era evidente que no llevaría al éxito. En "Una representación de sí mismo", se muestran los intentos de Gödel por avanzar en el proceso de sistematización de la matemática, a partir del concepto de representación (aplicación). Esto es, para un sistema matemático formal, caso de la teoría axiomática de conjuntos, se puede entender como una colección de reglas que permiten trabajar símbolos. Esto llevó a la idea de construir enunciados verbales que expresaran ideas precisas acerca de una situación matemática especial, pero que podría ser aplicado en otro contexto usando las variables pertinentes. Un ejemplo de esto son los axiomas de construcción de los números totales (naturales con el cero), de Peano:

1. El cero es un número total.
2. Si un número es total, su sucesor es total.
3. *a.* Si dos sucesores son iguales, los números son iguales
   b. Si dos números son iguales, sus sucesores son iguales.
4. El cero no es sucesor de ningún número.
5. Si el cero tiene una propiedad, y cuando un número la tiene su sucesor también la tiene, todo número total tiene la propiedad.

En "El mentiroso matemático", se muestra cómo el sistema desarrollado por Gödel se puede aplicar en la *paradoja de El Mentiroso*, pues es deducible de los axiomas del sistema de los números totales. Si no puede ser demostrada una proposición, quizá sí lo pudiera ser su negación, pero si puede ser demostrada la negación de la negación de la proposición, ello implica que podría ser demostrada una proposición falsa en el sistema axiomático de referencia y, entonces, el sistema axiomático sería inconsistente. En esto deriva el *teorema de Gödel*, o *teorema de incompletitud de Gödel*. De éste, se puede ver que el programa de Hilbert no tendría éxito, pues un sistema axiomático, consistente para deducir de él la aritmética, tendría la misma incompletitud que la aritmética. En "Decisiones, decisiones", se muestra que los esfuerzos de Gödel y otros matemáticos iban encaminados a determinar decisiones para un problema o conjunto de problemas, pues no vale perder el tiempo en la búsqueda de soluciones donde éstas no existen. En "Un problema de palabras", se hace ver que, dado un alfabeto finito y un diccionario de sinónimos finitos, no existe un método recursivo para determinar si dos palabras son o no equivalentes, esto es, es irresoluble el problema de la palabra para semigrupos, pues no se puede determinar, para todo par de palabras, si son equivalentes o no lo son, aunque para algunas parejas de palabras sí es posible esa determinación. En "Un problema de continuidad", se describen los caminos que siguió el problema de la *hipótesis del continuo*, enunciada por Cantor, y enunciado por Hilbert, en 1900, como uno de los primeros problemas por resolver por los matemáticos.

Capítulo 7. Malentendidos sobre el espacio y el tiempo. "A la vez que los matemáticos hacían valiosos esfuerzos para eliminar las paradojas de la teoría de conjuntos (las paradojas de Burali-Forti, de Cantor, de Russell), aceptaban las limitaciones del sistema de axiomas. En realidad, el estudio de estas limitaciones había venido a ser una rama de las matemáticas con activas y penetrantes investigaciones sobre el problema de la decisión en varios sistemas. La mayor parte de este trabajo está basado en mayor o menor grado en la teoría axiomática de conjuntos que, de forma específica, eliminaba las paradojas conocidas, o al menos pretendía hacerlo". En "Paradojas de los modelos", se dice que algunas explicaciones matemáticas aplicadas a modelos no ayudan a construir el modelo para ver las propiedades que éste tiene, sino que, además, no garantizan la existencia matemática del modelo. En "El axioma de elección", se menciona el *axioma de elección,* considerando que éste asegura la existencia de un subconjunto, en situaciones precisas, sin que se establezca cómo se han seleccionado los elementos que forman al subconjunto y cómo es un axioma independiente de otros axiomas de la teoría de conjuntos. En "Círculos (y esferas) muy extraños", se dan ejemplos concretos sobre la medición. Se llega a la conclusión de que diversos conceptos sobre la medición se prestan a duda, y ello aparece cuando se establece un apoyo axiomático. Después, el autor nos presenta tres paradojas: la primera referida a las complejidades en el concepto del área de una superficie curva y dos referidas a la teoría de conjuntos. En "Cómo permanecer joven", se explica la paradoja que surge del hecho de vivir en un espacio tetradimensional de Minkoswski, para el que la distancia más larga entre dos puntos es la línea recta. En una gráfica en que se diagrama el tiempo de un punto quieto en el eje x, se ve que es el tiempo más rápido que puede existir, pues representa el punto que se mueve por el tiempo mediante su línea Universo y cualquier desviación de la vertical causará un acortamiento del tiempo y, para ello, debe moverse por el eje x. Esta idea lleva a la *Paradoja de los gemelos*: "si uno de los gemelos permanece en casa y el otro sale a pasear, cuando se junten otra vez el gemelo paseante será más joven que el que se quedó en casa. De hecho, si el paseo ha sido hecho a una velocidad cercana a la de la luz, la diferencia de edad será notable".

Capítulo 8. En marcha contra el infinito. Este capítulo incluye cinco apartados y una conclusión. Se analizan minuciosamente cada una de las paradojas conocidas del filósofo griego Zenón de Elea, aunque se supone que llegó a construir cerca de 40. La base de la argumentación de Zenón está en considerar que "el mundo real está construido a partir de elementos que corresponden a 'puntos matemáticos-posición' sin tamaño". Entonces demuestra que esta suposición implica contradicciones con lo que la gente percibe en la vida real. Las paradojas a las que hace referencia el autor son "Montones de arena", "La dicotomía", "Aquiles y la tortuga", "La flecha" y "El estadio", que sugerimos al lector lea con cuidado y gusto, ya que el espacio aquí destinado llevaría a otra reseña. En "Conclusión", se hace ver que los sutiles razonamientos de Zenón han tenido mayor atención ahora que antes de 1900 y han servido de referencia para revisar conceptos acerca de la teoría cuántica. Los matemáticos han aprendido a tener reservas y a buscar mayor precisión en sus definiciones, especialmente cuando aparece el concepto o situaciones referidas al infinito y han llegado, incluso, a suponer situaciones distinta a nuestra realidad física, a fin de ver cómo se comportaría la matemática en esa otra "realidad".

DATOS DEL LIBRO

Bryan H. Bunch (1987)
Matemática insólita. Paradojas y paralogismos.
Barcelona, Editorial Reverté, 198 p.