Hacia una redefinición de la cultura matemática en el salón de clases: argumentando la inexistencia de soluciones

Iñaqui de Olaizola Arizmendi y Luz Manuel Santos Trigo

Se puede pensar *lo que no es el caso.*
Wittgenstein

Resumen: En este artículo se busca responder las preguntas: ¿cómo interpretan los estudiantes problemas o situaciones donde tienen que contradecir o negar la pregunta inicial que se plantea en el problema, como una práctica matemática en el aula?, ¿qué tipo de argumentos ofrecen? Para ello, se discuten las producciones de los estudiantes que trabajaron con problemas en el aula en los que tenían que buscar relaciones de carácter general para argumentar acerca de proposiciones como "no existe la fracción positiva más pequeña" o "es imposible teselar un rectángulo con ese tipo de piezas". Los resultados muestran que los estudiantes inicialmente presentan cierta tendencia a responder las preguntas sin evaluar las condiciones del problema; sin embargo, finalmente reconocen que es viable y aceptable contradecir la pregunta y proponer una explicación en torno a la respuesta.

Palabras clave: cultura y práctica matemática, situaciones que implican negación, explicación, formas de razonamiento y representaciones.

Abstract: The questions addressed in this paper are: how do students interpret the nonsolution problems as a mathematical practice in the classroom? What kinds of arguments do the students offer? To deal with these questions the utterances of students working in the classroom with problems in which they had to look for general relations in order to argue such things as "there is no least positive fraction" or "it's impossible to tessellate a rectangle with that kind of pieces" are examined and discussed. Results show that students initially tend to provide responses without examining the conditions embeded in the problem; however, they eventually recognize that it is possible and acceptable to negate the question and explain or justify their reasoning.

Key words: mathematics culture, problems that involve negation, explanations, ways of reasoning and representations.

INTRODUCCIÓN

El programa de matemáticas de secundaria, que viene operándose en México desde 1994, propone una enseñanza basada en la resolución de problemas. Entre sus objetivos se encuentran: que los alumnos desarrollen sus habilidades de descubrimiento, que reconozcan y analicen los distintos aspectos que componen un problema y que elaboren conjeturas, las comuniquen y las validen (Alarcón *et al.*, 1994). Un enfoque semejante se encuentra en las reformas impulsadas por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1989, 1991 y 2000).

Estos objetivos suponen roles, de profesores y estudiantes, que implican una ruptura con aquellos que, usualmente, se dan en aulas en las que se desarrolla lo que Cobb *et al.* (1992) han llamado la Tradición Matemática Escolar (TME).[1] Por ejemplo, se espera que los estudiantes dejen de ser meros receptores de información y que ahora exploren diversos aspectos de una situación o problema abierto en el que puede haber diversos acercamientos y soluciones e incluso es posible que el problema no tenga solución.

En este artículo discutimos algunas de las producciones de los estudiantes que surgen al trabajar con lo que llamamos *problemas sin solución*; esto es, problemas en los que los estudiantes deben reconocer que no es posible hacer o encontrar lo que se les pide y en los que tienen que buscar relaciones generales para dar sustento a respuestas como: “el número 123 no está en la sucesión”, “la fracción positiva más pequeña no existe”, “no es posible teselar un rectángulo con estas piezas”, etc. El estudio se orienta a responder las siguientes preguntas: ¿cómo interpretan los estudiantes los problemas sin solución en cuanto práctica matemática en el aula?, ¿qué tipo de argumentos ofrecen acerca de la inexistencia de soluciones?

[1] De manera muy esquemática, podríamos decir que se refiere a una enseñanza basada en la transmisión de información del profesor al alumno, junto con el esquema pregunta-respuesta-evaluación como forma de evaluar el aprendizaje (Mehan, 1979).

MARCO TEÓRICO

Consideramos el aprendizaje matemático como un proceso de construcción cognitiva individual y también como un proceso de aculturación hacia las prácticas matemáticas de una sociedad más amplia.[2] Es decir, los cambios cognitivos que se producen en los estudiantes a nivel individual son producto de una interacción directa con una comunidad de aprendizaje. Profesores y estudiantes crean una microcultura del aula y esto influye profundamente en las actividades y en el aprendizaje matemático de los estudiantes. El nuevo programa de matemáticas requiere de la creación de una nueva cultura en el aula, constituida mediante un complejo proceso de negociación entre el profesor y los estudiantes y también entre ellos mismos; negociación en la que se da un nuevo significado a los roles que cada quien debe desempeñar, al tiempo que se negocian nuevos significados acerca de la naturaleza de la matemática y de lo que significa aprender esta disciplina. Se trata de una auténtica revolución en las maneras de entender el proceso de enseñanza y de aprendizaje en el aula, análogo, según Cobb, Perwitz y Underwood-Gregg (1998), al de una revolución kuhniana.

Al negociar la nueva cultura en el aula, surge un conflicto con las creencias que los estudiantes han desarrollado, durante los primeros grados, acerca de su papel, del papel del profesor y, en general, de la naturaleza de la actividad matemática en el aula. Por ejemplo, se ha informado que muchos estudiantes objetan tener que explicar sus respuestas, alegando que nunca se les ha enseñado cómo y, aparentemente, basados en la creencia de que los cálculos correctos siempre conducen a una respuesta correcta, por lo que resulta innecesaria cualquier explicación (Silver, Shapiro y Deutsch, 1993).

Yackel y Cobb (1996) proponen tres categorías fundamentales para dar cuenta de la microcultura del aula: i) *normas sociales*; se refieren a las obligaciones y expectativas concernientes a la participación en el aula (explicar interpretaciones y soluciones, intentar darle sentido a las explicaciones ofrecidas por otros, etc.), ii) *normas sociomatemáticas*; específicas de la actividad matemática (cuándo dos soluciones son consideradas matemáticamente diferentes, qué explicaciones son

[2] Nos referimos a las prácticas matemáticas aceptadas por los profesores de matemáticas, los investigadores en educación matemática, los matemáticos profesionales, etc. Si bien es cierto que esta "sociedad más amplia" es heterogénea y sus integrantes pueden tener distintas nociones acerca de la naturaleza de la matemática, cada profesor, en su aula, actúa de acuerdo con la interpretación que él hace acerca de cuáles son esas prácticas matemáticas aceptadas por la comunidad.

aceptables desde el punto de vista matemático, etc.), y iii) *prácticas matemáticas en el aula*; esto es, actividades matemáticas que se vuelven prácticas aceptadas en el aula (validar una respuesta, buscar un contraejemplo, etcétera).

El principal interés de este trabajo es el proceso de argumentación en el aula. La argumentación es un fenómeno social[3] que ocurre cuando dos o más individuos tratan de ajustar sus intenciones e interpretaciones y comunican la racionalidad de sus actos. En el contexto del aula, el concepto de argumentación está relacionado con una explicación intencional del razonamiento acerca de una solución, durante o después de su desarrollo. En cuanto norma social en el aula, la argumentación debe entenderse como una *acción comunicativa,* realizada por un miembro de la comunidad en el aula, que orienta su acción por pretensiones de validez intersubjetivamente reconocidas, esto es, que busca llegar a un acuerdo de entendimiento a partir de razones aceptadas intersubjetivamente (Habermas, 1981).

Diversos autores han informado que los estudiantes, de distintos niveles de escolaridad, experimentan enormes dificultades cuando se enfrentan a la tarea de argumentar. Fischbein (1982) y Brousseau (1986, citado por Balacheff, 2000) señalan factores sociales y afectivos que inhiben la tarea de argumentar de los estudiantes. Fischbein (1982) dice que la forma tradicional de enseñanza despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad, ya que el profesor es el encargado de decidir acerca de la validez de las proposiciones. Brousseau (1986) sostiene que ciertos aspectos propios de la interacción social de los estudiantes pueden desplazar el debate del campo cognitivo hacia otros ámbitos, de manera que los estudiantes defienden puntos de vista animados por simpatía, por el deseo de tener razón sobre el compañero, etc. Por otra parte, Chazan (1993) llama la atención acerca de los distintos niveles de tolerancia que tiene cada sujeto cuando enfrenta una situación de conflicto cognitivo, de manera que, a la larga, algunos estudiantes "aceptan" argumentos o no se oponen a ellos, por ponerle fin al conflicto.

Además de los factores sociales, Fischbein (1982) y Balacheff (2000) encuentran que la evidencia inmediata y la creencia cognitiva que ella suscita constituyen, también, un obstáculo importante. Por creencia cognitiva Fischbein (1982) entiende "el tipo de convicción intrínseca e intuitiva directamente impuesta por la

[3] Si bien es cierto que la argumentación es un fenómeno social en el que se intercambian proposiciones, algunas de las cuales son cuestionadas y deben ofrecerse razones que las apoyen, interesa también cómo cada individuo interpreta su participación en dicho intercambio en el marco de las actividades en el aula.

estructura de la propia situación" (p. 11). El estudiante, pues, no encuentra necesidad de argumentar, puesto que ha intuido la solución directamente de la situación; no cuestiona la evidencia.

Balacheff (1999) distingue entre argumentación, prueba y demostración. La argumentación, según este autor, se caracteriza por la intención del sujeto de conseguir la adhesión del auditorio y, a menudo, se incurre en prácticas "donde las reglas son frecuentemente de una naturaleza profundamente diferente de lo que requieren las matemáticas" (p. 2). La prueba, en cambio, se refiere a una explicación reconocida y aceptada como tal; el reconocimiento y la aceptación se dan en un proceso social "por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad" (Balacheff, 2000, p. 12). La característica fundamental de la demostración es su forma codificada, ligada con una axiomatización explícita. ¿Cuál es la relación entre estas tres formas discursivas? ¿Se trata de una relación de continuidad o de ruptura? Balacheff sostiene que existe "una relación compleja y constitutiva del sentido de cada una de ellas: la argumentación se constituye en obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la demostración, y más generalmente de la prueba en matemáticas" (Balacheff, 1999, p. 5).

La utilización de la noción de argumentación en este trabajo es congruente con la noción de prueba de Balacheff; se trata de una práctica discursiva que se negocia en el aula. No sólo se ofrecen razones en apoyo de las tesis controvertidas; sino que este mismo proceso es sujeto del escrutinio de la comunidad en el aula. Las razones ofrecidas como apoyo de una proposición deben ser aceptadas por la comunidad en el aula, de modo que son separadas del sujeto que las propone y de las circunstancias en las que surgen.

Balacheff (2000) ha categorizado las pruebas que desarrollan los estudiantes en: *pruebas pragmáticas,* aquellas en las que los alumnos recurren a la acción, esto es, muestran las acciones que los llevaron a la respuesta, o simplemente, exhiben la respuesta, y *pruebas intelectuales* basadas en la formulación de las propiedades y relaciones de la situación problemática, como ocurre cuando los estudiantes utilizan un *ejemplo genérico,* es decir, se refieren a un caso particular para mostrar relaciones de carácter general.

Las pruebas pragmáticas suponen la posibilidad de tener acceso a la experiencia, a la realización material de una tarea que conduzca a hacer o encontrar lo requerido por el problema. Esto sugiere un área de exploración para la instrucción: enfrentar al estudiante a situaciones problemáticas en las que dicha realización material sea imposible y, así, el alumno se vea forzado a argumentar mediante la formulación de propiedades y relaciones de la situación problemática, es decir, a producir pruebas intelectuales. Es, precisamente, el caso de los problemas sin solución; el estudiante se ve obligado, ahora, a referirse a lo que no existe, a *pensar en lo que no es el caso,* a producir pruebas intelectuales. Santos (2002) identifica situaciones o problemas que emergen desde un proceso de ensamblar o construir relaciones a partir del empleo de distintas representaciones (con el empleo de herramientas tecnológicas). Es aquí donde el estudiante tiene que pensar en procesos de explicación o argumentación que le den soporte a sus conjeturas.

SUJETOS Y PROCEDIMIENTOS

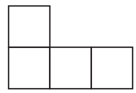
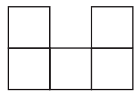
El grupo con el que se trabajó es de 1º de secundaria y estuvo constituido por 30 estudiantes de clase media de una escuela ubicada en el sur de la Ciudad de México. Los estudiantes provienen de escuelas primarias diferentes, pero el tipo de enseñanza que han recibido puede catalogarse dentro de la tradición matemática escolar.

Las sesiones se desarrollaron de acuerdo con un esquema cíclico: *i)* se comienza con una serie de problemas que se discuten en equipos de dos a cuatro estudiantes durante una sesión de 100 minutos. Cada equipo produce un informe escrito y además se audiograba a uno de los equipos; *ii)* se dedican dos o tres sesiones a la discusión plenaria de los problemas, promoviendo que se presenten diversas interpretaciones y soluciones, y *iii)* a partir del análisis de los informes, de las discusiones plenarias y de la audiograbación, se diseñan los nuevos problemas que dan inicio al nuevo ciclo de actividades.

En un periodo aproximado de ocho meses, los estudiantes trabajaron con algunos problemas sin solución (véase el cuadro 1). Estos problemas se mezclaron con otro tipo de problemas y siempre fueron presentados de manera que el estudiante no tuviera modo de saber, de antemano, si el problema tenía, o no, solución.

Dos semanas después de haber trabajado el último de estos problemas, se les pidió que respondieran por escrito e individualmente: *Explica cómo son los problemas que no tienen solución y da ejemplos. ¿Por qué surgen los problemas sin solución? ¿Son importantes?* La intención fue conocer cómo interpretó cada uno de los estudiantes los problemas sin solución.

Cuadro 1 Problemas sin solución

Tema	Problemas
I. Patrones numéricos	• ¿Qué posición ocupa el número 311 en la sucesión 3, 6, 9, ...? • ¿Qué posición ocupa el número 123 en la sucesión 2, 5, 8, ...?
II. Construcciones geométricas	• Construye un triángulo de lados 2, 3 y 5.
III. Teselaciones	• Forma rectángulos de 3 × 8 y 5 × 10 con piezas como la figura de la derecha, sin traslapes y sin dejar huecos.  • Forma un rectángulo con piezas como la figura de la derecha. 
IV. Aritmética	• Encuentra la fracción positiva más pequeña. • ¿Qué número tiene la mayor cantidad de múltiplos? • ¿Qué número tiene la mayor cantidad de divisores?

DISCUSIÓN

El análisis y discusión de los resultados los presentamos en dos apartados, atendiendo a cada una de las preguntas planteadas en la introducción de este artículo.

Interpretación de los problemas sin solución

El profesor (uno de los autores) promovió, sistemáticamente, la aceptación y valorización de la práctica matemática de trabajar con problemas sin solución, haciendo comentarios acerca de lo natural que resulta el plantearse preguntas y problemas sin saber, de antemano, si tienen o no solución y que reconocer cuándo es imposible resolver un problema es una forma importante de conocimiento. Sin embargo, cada estudiante interpretó esta práctica de manera diferente.

Tal y como se esperaba, la primera vez que los estudiantes trabajaron con un problema sin solución, tuvieron dificultades para reconocer que no era posible realizar lo que el profesor les pedía; sólo la cuarta parte de los equipos respondió que 311 no pertenece a la sucesión 3, 6, 9, ... El resto de los equipos hizo la división 311 ÷ 3 y establecieron 103, 103.6 o 104 como la posición que ocupa dicho número en la sucesión. Éste fue el caso del equipo audiograbado que hizo la división de *casita* hasta obtener 2 de residuo y anotaron 103 como respuesta. Unos minutos después de haberlo hecho, un estudiante de otro equipo les *reveló* (susurrando): "La primera está mal":

> Toña: Tiene razón, porque no es secuencia.
> Lalo: ¿Por qué no es secuencia?
> Toña: Porque 311 no es un múltiplo de 3, así que no puede estar en una secuencia que va de 3 en 3.

Llama la atención que Toña haya aceptado inmediatamente que su respuesta era incorrecta, como si desde el principio no hubiese estado contenta con la división con residuo 2, pero no hubiera considerado la posibilidad de decir no a lo que se les pidió hacer (encontrar la posición del 311 en la sucesión 3, 6, 9, ...). Sólo después de la *revelación* logró afirmar, mediante un argumento correcto, que el número 311 no pertenece a la sucesión.

Una vez que se ha incluido la posibilidad de una respuesta negativa en el repertorio de respuestas de los estudiantes, se observó que algunos abandonaban rápidamente sus exploraciones y concluían: "No se puede". También ocurrió con cierta frecuencia que los estudiantes *adivinaban* que no había respuesta y argumentaban "porque ya lo intentamos y no se puede". Por ejemplo, cuando los estudiantes buscaban el número con la mayor cantidad de divisores, concluían, después de unos cuantos intentos, que el número no existe, pero sin ofrecer argumento alguno en apoyo a su respuesta.

Este comportamiento es similar al registrado por otros autores. Schoenfeld (1992) concluye que los estudiantes no realizan búsquedas extensas porque creen que "la respuesta se sabe o no se sabe", de modo que no tiene sentido buscar mucho. También Balacheff (2000) ha informado que los estudiantes generalizan a menudo después de analizar pocos casos, lo que este autor llama empirismo ingenuo.

Otros estudiantes conjeturan rápidamente que no hay solución, pero reconocen que deben argumentar el por qué. El diálogo que sostuvo un equipo, después de fallar por segunda vez en su intento por formar el rectángulo 5 × 10 con las piezas en forma de L, es una muestra de ello:

Julián: Sobran dos cuadritos.

Daniel: ¡Sobran dos! No se puede.

María: Pongamos "Siempre sobran dos cuadritos"... pero, ¿por qué sobran siempre dos? También hay que poner eso.

Por otra parte, algunos estudiantes ofrecieron una resistencia mayor para aceptar como legítima la respuesta "No se puede". Por ejemplo, trabajando con el problema de formar un rectángulo con piezas en forma de U, que fue el quinto problema de este tipo con el que trabajaron, un estudiante le preguntó al profesor: "¿Se puede que no se pueda?"

El análisis de los informes individuales sobre lo que piensan los estudiantes acerca de los problemas sin solución hace ver que, para la mayoría de los estudiantes, estos problemas son situaciones anómalas, o bien son considerados como un recurso didáctico del profesor para mantenerlos alerta y evitar así que actúen de manera automática e irreflexiva. Sólo unos cuantos los consideraron como algo natural cuando uno se plantea preguntas y problemas y como algo que contribuye a desarrollar ideas matemáticas nuevas.

La mayoría de los estudiantes ofreció ejemplos correctos de problemas sin solución, semejantes a los que se habían trabajado en clase: ecuaciones algebraicas o sus equivalentes en balanzas ("x + 10 = x + 20"), reglas numéricas ("3 → 5, 5 → 9, 9 → 5"),[4] patrones figurativos, sucesiones ("3, 6, 9, ..., ¿qué lugar ocupa el 569?"), teselaciones, etcéctera.

Hubo algunos que propusieron ejemplos que, claramente, no corresponden ("3 × 2 no es igual a 15"). Otros incluyeron como ejemplos problemas semejantes a los que se trabajaron en el curso al discutir la noción de proporcionalidad; en varias ocasiones se contemplaron preguntas como: *si Juan limpia 12 parabrisas en una hora, ¿cuántos limpiará en 8 horas?* En las discusiones se argumentó que no era posible decidir, puesto que la demanda para limpiar los parabrisas es distinta según la hora. Situaciones como ésta, en las que no hay información suficiente para producir una respuesta precisa, fueron asimiladas por varios estudiantes dentro de la categoría de problemas sin solución.

[4] Aunque este ejemplo no es correcto desde el punto de vista matemático, puesto que existe una infinidad de transformaciones que satisfacen las condiciones, lo es en el contexto en el que ellos trabajaron, ya que sólo se contemplaron transformaciones del tipo $ax + b$, $x^2 + a$ y $x^3 + a$.

Tipos de argumentación

Patrones numéricos. Los estudiantes están acostumbrados a exhibir una solución. Este proceso de exhibición tiene que ver con mostrar, señalando, el objeto que es requerido en la pregunta, o bien, utilizar el algoritmo adecuado. A lo largo de su vida escolar, los estudiantes han aprendido que la manera más importante de encontrar la respuesta que demanda el profesor es mediante la aplicación de un algoritmo. El algoritmo se constituye como el generador fundamental de respuestas.

En los problemas de patrones numéricos surgió el algoritmo como un obstáculo para pensar en la posibilidad de la inexistencia de la solución; algunos estudiantes operan con los datos que tienen a la mano y producen una respuesta. En el primer problema, emplearon un algoritmo que había resultado exitoso en situaciones semejantes, pero no reconocieron que la respuesta obtenida de esa manera era inadecuada, por ser fraccionaria y, aun cuando se argumentó en la sesión plenaria acerca de ello, minimizaron el "inconveniente" y lo resolvieron redondeando para obtener un entero. Esta compulsión por operar con los datos a la mano, aun en las situaciones más absurdas, ha sido ampliamente documentada (IREM, 1980; Schubauer-Leoni y Ntamakiliro, 1998).

En la sesión plenaria correspondiente a la discusión de este problema, el profesor planteó el problema e inició la discusión sometiendo al pleno una de las soluciones que informaron:

> Prof.: Lo que hicieron muchos fue:
>
> Si aquí multiplicaba por tres, entonces para encontrar la posición de un número en la sucesión debo dividir entre 3, es decir: 311/3. Hicieron esta operación: (el profesor hace en el pizarrón la división de la casita).
>
> Lalo: 103, es la posición 103.
>
> Sergio: Bueno, pero hay que continuar la división, ponemos un punto aquí y agregamos un cero (...). Entonces la respuesta es 103.6.

Lalo es el estudiante que participó en el equipo audiograbado y en cuyo informe escrito se asentó: "el 311 no está en la sucesión" de modo que, o bien olvidó lo que habían informado y cómo lo argumentó Toña o nunca abandonó la idea de que la respuesta correcta era 103 y simplemente evitó el conflicto con Toña, probablemente porque lo que le interesaba era terminar lo más pronto posible. Sergio propone continuar la división para obtener la parte fraccionaria, tal vez con la idea de que así se obtiene una respuesta más precisa.

Ronaldo: Está mal porque no puede ser que, no puede estar en la 103.6.

Prof.: No existe esa posición. Existe la posición 103 o la 104, pero la 103.6 no tiene sentido. Es parecido a lo que nos ocurrió con el problema de los camiones, ¿no?

Alguien : Exacto.

Prof.: No vamos a alquilar 6.5 camiones,[5] no nos podemos llevar la mitad de un camión de paseo. Una cosa fundamental es que cuando ustedes produzcan una solución, verifiquen que tenga sentido lo que están diciendo, si no, algo raro está pasando, entonces, esto no puede ser solución. En este caso la pregunta es: ¿el 311 en qué posición está?

Damián: En ninguna porque... porque quién sabe.

Orlando: Porque como no lo puedes dividir, como no le puedes poner este ... décimos, este... no se puede, entonces no hay, no tiene posición y no se puede eso de que el que más se acerque, porque ahí te pide el número justo.

La intervención del profesor, además de argumentar que el número en cuestión no pertenece a la sucesión, hace la conexión con un problema semejante y promueve que los estudiantes se comprometan con sus respuestas. A pesar de que aparentemente hubo acuerdo sobre este problema, al final de la sesión, después de que discutieron otros problemas, se les pidió que escribieran, de manera individual, sus conclusiones acerca de la discusión, y todavía algunos estudiantes mantuvieron la respuesta fraccionaria o redondearon a 103 o 104, sin asumir la respuesta "no hay solución".

En los dos problemas de patrones numéricos, los estudiantes reconocieron el patrón +3 como la regla que permite construir la sucesión, pero no todos se percataron de la importancia de considerar el número que inicia la sucesión lo que, en algunos casos, los llevó a argumentar que el número 123 ocupa el lugar 41 en la sucesión 2, 5, 8, ..., ya que $41 \times 3 = 123$. En esta línea, un equipo argumentó "No se puede, porque 20 y 123 no se encuentran en la regla del 3 y la serie tiene como lógica la regla del 3", sin percatarse de que el 123 sí es divisible entre 3. Otros utilizaron un razonamiento proporcional para concluir que dicho número ocupa la posición 43 puesto que el 20 ocupa la posición 7 (en el primer inciso del problema se les preguntaba por la posición del 20 en la sucesión) y como $20 \times 6 = 120$, este último número ocupa la posición 42 (7×6) y,

[5] El profesor está haciendo referencia a un problema que habían discutido la semana anterior en el que, como sucede aquí, una respuesta fraccionaria no tiene sentido.

por lo tanto, el 123 ocupa la posición 43. Varios equipos usaron la calculadora para generar todos los elementos de la sucesión hasta el 122 para concluir que el 123 no perteneca a ella. Hubo equipos que argumentaron utilizando un ejemplo genérico: "El 123 no está. Lo sabemos porque 7 × 3 es 21 y, como empezamos en el 2, es 20 (ésta es una manera de decir que los números de la sucesión son de la forma $3n - 1$) y 124 no es múltiplo de 3 así que no ocupa lugar".

En el equipo audiograbado, se observan tres acercamientos distintos: Orlando genera la sucesión con ayuda de la calculadora, Luis utiliza el razonamiento proporcional y Daniel utiliza la propiedad general de la sucesión para argumentar en contra de Luis. Sin embargo, la actitud de Luis y de Orlando es la de "encerrarse" en su visión y no intentan comprender lo dicho por el otro. Daniel, en cambio, entiende los argumentos de Luis y le ofrece argumentos contrarios a los suyos.

Luis: 5 mmm... 8, 11, 14, 17, 20, ora hasta el 123.
Orlando y Daniel: ¡Noooooo!
Luis: Sólo necesitamos pensar. No necesitamos calculadora, sólo necesitamos pensar. Ve, 123 es como el 120, nada más le aumentamos otro (...). No, mira, ya sé: 7 × 5 veces esto me da 100, el 100 está en la posición 35, luego...

Luis propone generar toda la sucesión, pero la sugerencia es rechazada. Él mismo inicia una nueva línea de argumentación, utiliza un razonamiento proporcional: como el 20 está en la posición 7, entonces e1 100 (20 × 5) estará en la posición 35 (7 × 5).

Daniel: ¿Cómo sabes que está en la posición 35?
Luis: (...) El 20 está en la posición 7, ¿no? Entonces 7 posiciones, entonces 7×... ya me hice bolas.

Daniel le pide que justifique su solución, pero Luis se confunde al tratar de explicarla. Mientras, Orlando generó la sucesión con la calculadora.

Orlando: El 123 no está en la sucesión.
Luis: Claro que sí está.
Orlando: Yo puse +3, +3 y me salió 122.
Luis: Mira, ve: 7 × 5, porque ... 5 veces 20 te da 100, ¿no? Entonces 7 × 5, 35, el 100 está en la posición 35, ¿no?

Luis está tan empeñado en imponer su solución que simplemente ignora a Orlando.

Orlando: Que no está en la sucesión, hazlo en la calculadora.
Luis: Luego el 120 está en la posición ... le sumas 7, está en la posición 42.
Orlando (con fastidio): El 123 no está en la sucesión.
Luis: El 120 está en la posición 42 y luego el 123 está en la posición 43.
Orlando: NO ESTÁ EN LA SUCESIÓN.
Luis: Mira, ve: 2 + 3 = 5, 1, 2, 3 (va sumando +3).
Daniel: Es que si el 100 está en la posición, si tomas como 0 el 100, si partes de 1 el 23 no está.
Luis: Pero estamos partiendo de 2.
Orlando: Vamos a empezar, vean todos 2, +3, +3 ...
Daniel: ¿Dices que el 100 si está en la sucesión?

Luis no contesta, está viendo lo que hace Orlando con la calculadora.

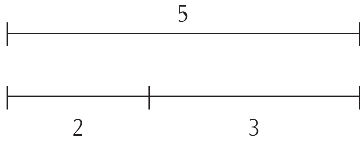
Orlando: ¿Ya ves? ¡Ayyyyyy! Les decía yo, pero...
Luis: Tiene razón, no está en la sucesión.

El conflicto se resuelve por la contundencia del resultado obtenido por medio de la calculadora, pero los estudiantes no "regresan" para revisar, por ejemplo, por qué falla el argumento proporcional de Luis o si lo que argumentaba Daniel era correcto o no. Lo importante para ellos sigue siendo generar una respuesta; las exploraciones o conjeturas que se quedan en el camino no son valoradas.

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

En el marco de las construcciones geométricas, los estudiantes trabajaron con el problema de construir todos los triángulos de lados enteros y perímetro 7. De sus exploraciones quedó claro que hay combinaciones numéricas que suman 7, pero que no es posible construir triángulos con esas dimensiones (1, 1, 5, por ejemplo). Ocurrió también que algunos no lograban construir el triángulo, aun teniendo lados adecuados para la construcción, puesto que no contaban con compás y para hacer la construcción utilizaban sólo la regla, lo que les llevó a concluir que es importante saber colocar la regla para lograr la construcción.

Figura 1



En la siguiente sesión, los estudiantes se enfrentaron al problema de decidir quién tenía razón en un diálogo entre tres hipotéticos estudiantes que, en relación con la posibilidad de construir un triángulo de lados 2, 3 y 5, esgrimían, en esencia aunque con un lenguaje más coloquial, los siguientes argumentos; *a)* no es posible, porque no cumple $2+3>5$; *b)* sí se puede, es cosa de "saberlos acomodar", y *c)* no se puede y se ilustra con la figura 1.

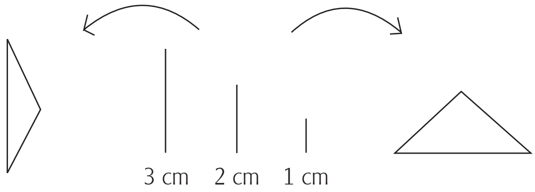
La frase "saberlos acomodar" surgió en la discusión plenaria previa, cuando algunos estudiantes habían "logrado construir" un triángulo con lados 2, 3 y 5, debido a imperfecciones en sus trazos (falta de precisión en las medidas de los segmentos). La comprobación midiendo los lados, otra vez debido a la imperfección de las herramientas, corroboró la construcción. En la discusión plenaria, el debate se dio entre quienes defendían la importancia de la manera de acomodar los segmentos y quienes afirmaban que la condición necesaria para poder construir un triángulo es que cada lado sea menor que la suma de los otros dos, ilustrada mediante la figura 1, "ya que, al levantar los segmentos, 2 y 3 no se juntan y no se forma el triángulo".

Yulene, la principal promotora de la teoría del acomodamiento, respondió a la pregunta de si es posible construir un triángulo de lados cualesquiera de la siguiente manera:

> "Hay que encontrarle la manera de que queden bien, tratar de que 'encaje' cada lado sin salirse ni que falte."
>
> "Aquí se muestra que cuenta mucho el acomodamiento. No se pudo hacer." (Se refiere a la figura 2).

Al discutir el caso de lados 2, 3 y 5, Yulene afirma: "Juan tiene razón, ya que, cuando la suma de los lados menores es mayor *o igual* que el mayor, esto junta a los dos lados sin sobrar longitud ni faltar" (las cursivas son nuestras). Hace un esquema semejante al de la figura 2, pero con lados 2, 5 y 7 y 1, 2 y 3. Agrega que hay una regla para poder formar los triángulos:

Figura 2



a) Los lados menores deben ser más grandes (sumados) que el mayor.
b) Acomodamiento (de manera que, al unirlos, no sobre ni falte).

Este problema puso en evidencia importantes obstáculos que deben superar los estudiantes. La experiencia debe ser cuestionada, pero eso implica ir contra la intuición y dirimir un posible conflicto entre lo que se experimenta y una cierta racionalidad. En el episodio que presentamos, la estudiante fue capaz de aceptar en la discusión plenaria, desde un punto de vista racional, la imposibilidad de la construcción del triángulo con un argumento desarrollado a partir de la figura 1 y, al mismo tiempo, la posibilidad de lograrlo mediante su *teoría del acomodamiento*.

Las discusiones que se desarrollan, tanto en los equipos, como en las sesiones plenarias, ponen en juego diversos intereses; no se desarrollan exclusiva, y tal vez, ni siquiera principalmente, en un terreno cognitivo. Está en juego el estatus social dentro del grupo, su reconocimiento como líder o como participante con ideas válidas e importantes, etc. En este caso, además, la estudiante construyó una teoría que logró explicar de manera muy completa y que, seguramente, significó para ella una gran satisfacción, de modo que difícilmente estaba dispuesta a desecharla. Watzlwick (1979) señala que en experimentos no contingentes[6] los sujetos se aferran a las explicaciones que han logrado construir, aun después de que el investigador les revela la naturaleza aleatoria del experimento:

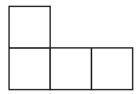
> Lo bueno de esta prueba es que destaca con nitidez la naturaleza de un problema humano universal: si, tras la larga búsqueda y penosa incertidumbre, creemos haber hallado al fin la solución de un problema, nuestra postura, lastrada de una fuerte carga emocional, puede ser tan inquebrantable que

[6] Se refiere a experimentos en los que un sujeto recibe estímulos generados al azar, pero en los que la situación experimental los induce a encontrar un patrón en ellos.

preferimos calificar de falsos o irreales los hechos innegables que contradicen nuestra explicación, antes que acomodar nuestra explicación a los hechos. (Watzlawick, 1979, p. 69).

TESELACIONES

El siguiente enunciado es parte de las actividades tendientes a brindar experiencias propicias para la discusión del concepto de área:

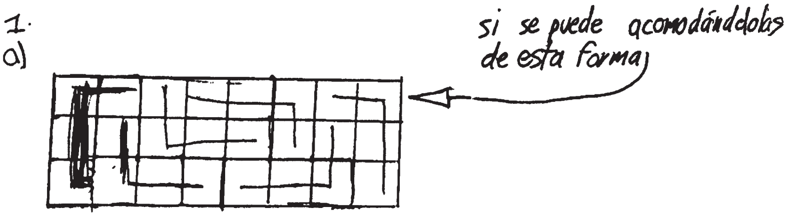


1) Se tiene una gran cantidad de piezas iguales, como la de la figura de la derecha, constituidas por cuatro cuadrados iguales de lado 1.
   a) Utilizando piezas como las de la figura, forma un rectángulo cuyos lados midan 3 y 8, sin superponer las piezas ni dejar huecos.
   b) Utilizando algunas de estas piezas, forma ahora un rectángulo cuyos lados midan 5 y 10, sin superponer las piezas ni dejar huecos.

Todos los equipos resolvieron correctamente el problema del primer inciso. Las respuestas ofrecidas al segundo inciso pueden categorizarse de la siguiente manera: *i)* afirmación sin justificar ("yo creo que no se puede"); *ii)* por experiencia propia ("ya lo intentamos y no se puede"); *iii)* argumentación tautológica ("no se puede, porque sobran siempre dos cuadritos"), y *iv)* justificación, utilizando el concepto de área ("no se puede, porque el área de la figura que se quiere formar no es un múltiplo del área de las piezas").

Comentaremos los aspectos más relevantes de la audiograbación correspondiente al segundo inciso de este problema.

Después de unas pocas exploraciones lograron teselar el rectángulo de 3 × 8.



Trabajan con el problema del segundo inciso y, después del segundo intento fallido, empiezan a conjeturar acerca de la imposibilidad de lograrlo:

Daniel: Oye, intentémoslo con 6, porque tal vez sólo se pueda con múltiplos de 3.
Julián: De lado, ¿no?
María: ¿Cuánto media éste?
Julián: 3×8.
(Inaudible).
Daniel: ¿Y cuánto mide éste? 5×10... Creo que sólo se puede con... $3 \times 8 \rightarrow 48$ número par $5 \times 10 \rightarrow 15$ número impar...[7] ¡Uy, ya sé por qué no se puede! (muy emocionado) Porque son cuatro, cuatro y 48 es número par... Sí se puede por eso, bueno, algo así, ¿no?

María comienza a escribir el informe. Julián está reflexionando solo, mirando su cuaderno. Unos minutos después:

Julián: 5×10... 50, 50, ¿no es número par?
Daniel: Sí, ¿por qué?
Julián: 5×10.
Daniel: ¡Ay! ¿Ay!
(Risas).

Después de lamentarse por el error cometido, Daniel vuelve sobre la línea de múltiplos de 3; su estrategia consiste en encontrar una propiedad que se cumpla en el primer caso pero que no sea válida en el segundo:

Daniel: Tal vez por lo de los múltiplos de 3... Sí, 3×8 es 24 es múltiplo de 3.
María: Suena lógico.

[7] Las palabras "tres" y "seis" riman; esto puede explicar que el estudiante haya hecho una asociación sonora de 3×8 con 6×8. El otro error pudiera tener también un origen de asociación sonora o tal vez se deba a haber sustituido 5×10 por $5 + 10$. Tres días después de que se grabó el episodio, el profesor *le disparó a quemarropa* al estudiante "¿3×8?" y éste respondió inmediatamente "48". Unos días después, el profesor lo volvió a sorprender con la misma pregunta y el estudiante pudo responder correctamente sólo después de unos instantes. Esto es interesante, porque el estudiante en cuestión ha demostrado, sistemáticamente, tener un sólido sentido numérico; sin embargo, las asociaciones superficiales, carentes de referentes semánticos, pueden dominar en algunas circunstancias.

Daniel: Y 50 no. Vamos a intentarlo con un...

Julián: ¿24 entre 4?

María: ¿24 entre 4?, a 6.

Julián: ¿Sí estaría exacto?

María: Sí.

Julián: ¿50 entre 4?... Ése ya no te da exacto ... los 4 porque... son esas figuras de 4.

María: No se puede, claro, porque, 50 o sea 5 × 10.

Julián: Y no son múltiplos de 4.

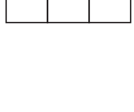
b) No se puede porque 50 osea 5×10 =50 no es multiplo de 50.

c) In el a) si se pudo porque el área es mutiplo de cuatro y en el b) 50 no es multiplo de 4.

Finalmente, Julián encuentra una relación general, que es condición necesaria para que el rectángulo pueda ser teselado: el área del rectángulo debe ser múltiplo del área de las piezas.

Una semana después, se les pidió que utilizaran piezas como las de la figura 3 para formar un rectángulo. En todos los equipos se hicieron varios intentos y los estudiantes se convencieron de la imposibilidad de la solución, pero no fueron capaces de elaborar una explicación matemáticamente aceptable. Sólo uno de los equipos dio un argumento sobre la imposibilidad de lograrlo: "por más que se intente no se puede tener un borde liso, siempre queda un huequito." En esta afirmación se encuentra el germen de una posible argumentación, la cual desarrolló el profesor en la siguiente sesión plenaria.

Figura 3



Aritmética

Los tres problemas agrupados bajo este rubro tienen la particularidad de que se pueden argumentar mediante la reducción al absurdo. En el primer caso, encontrar la fracción positiva más pequeña, cuatro de los 10 equipos argumentaron que dicha fracción no existe, puesto que, "si creemos que la encontramos le agregamos un cero al denominador y ya tenemos otra más chica". El resto de los equipos respondió con una fracción con un 1 por numerador y un 1 seguido de una infinidad de ceros o bien con denominador formado por una infinidad de 9. En ambos casos ocurre el mismo fenómeno; en la búsqueda de la fracción menor, se dan cuenta de que siempre es posible construir una fracción más pequeña y esto los conduce a afirmar que no hay solución o bien a ofrecer una solución que implica un proceso potencialmente infinito, esto es, la idea de que podemos agregar 0 o 9 en el denominador y obtener así fracciones cada vez más pequeñas.

Cuando se enfrentaron al problema de encontrar el número con mayor cantidad de múltiplos, el comportamiento de los estudiantes fue análogo al referido en el problema anterior; se dan cuenta de que el proceso de generar los múltiplos de un número es potencialmente infinito. Por otra parte, los equipos observaron que no todos los números tienen la misma cantidad de múltiplos, puesto que el 0 sólo tiene un múltiplo y la mitad de los equipos argumentó que el 1 tiene más múltiplos que los demás, porque sus múltiplos "van de uno en uno y los del 2 van de dos en dos". Esta observación condujo, durante la sesión plenaria, a una discusión interesante; algunos estudiantes se opusieron al argumento anterior aduciendo que todos los números, excepto el 0, tienen la misma cantidad de múltiplos, ya que éstos se obtienen multiplicando el número en cuestión por cada uno de los números naturales.[8]

El problema de decidir qué número tiene una mayor cantidad de divisores más complejo. En este caso, la búsqueda de los divisores del número no lleva necesariamente a la idea de que siempre es posible encontrar números con una mayor

[8] Es muy común, cuando los estudiantes comparan conjuntos infinitos, que les parezca evidente que un conjunto que contiene a otro tenga más elementos que éste. Por ejemplo, piensan que los números naturales tienen más elementos que, digamos, los múltiplos del tres, ya que éstos están incluidos en los naturales. En este caso, debido a la manera como se generaron los conjuntos infinitos surgió otra idea que les pareció igualmente evidente a algunos estudiantes, a saber, ambos conjuntos tienen la misma cantidad de números, ya que los múltiplos de tres se generan multiplicando los naturales por 3, por lo tanto, hay tantos múltiplos de tres como naturales.

cantidad de divisores. Por ejemplo, algunos equipos observaron que un número puede ser mayor que otro y, sin embargo, tener menos divisores. El argumento que ofrecieron algunos equipos acerca de la inexistencia de un número que tuviese la mayor cantidad de divisores fue utilizando un ejemplo genérico: "No hay número que tenga más divisores. Por ejemplo, el 36, si lo multiplicamos por 2, el 72 tiene a los divisores del 36 y además el 72 y así podemos seguir multiplicando". Sin embargo, la tercera parte de los equipos no supo responder.

CONCLUSIONES

Trabajar con problemas sin solución supone una doble ruptura en relación con los roles que acostumbra representar el estudiante; por un lado, es una práctica matemática nueva en el aula y, por el otro, induce a los estudiantes a buscar relaciones y propiedades de la situación problemática como forma de argumentar sin recurrir a la experiencia inmediata.

Los problemas cuya solución requiere la argumentación por reducción al absurdo resultaron, creemos, apropiados para los propósitos de este trabajo, y también como recurso didáctico. Son problemas, especialmente los dos primeros, que no implican poner en juego recursos matemáticos complejos y en los que las primeras exploraciones conducen rápidamente al argumento necesario. En estos casos, los estudiantes fueron inducidos, y lo lograron, a proporcionar *pruebas intelectuales*. Algo semejante ocurrió en el primer problema de teselación. Además, este problema se puede variar fácilmente, cambiando la forma y las dimensiones de los rectángulos para generar un amplio y rico campo de exploración.

Los episodios aquí relatados muestran que, cuando los recursos matemáticos involucrados no son muy complejos, los estudiantes son capaces de elaborar argumentaciones matemáticamente válidas acerca de la inexistencia de la solución. Es probable que problemas como *encuentra la fracción positiva más pequeña* puedan ser trabajados con éxito por estudiantes de menor edad.

Los cambios en la microcultura en el aula llevan tiempo. Muchos estudiantes resisten, en mayor o menor medida, los cambios y tienden a asimilar las nuevas normas y prácticas matemáticas a las anteriores. Si bien para muchos los problemas sin solución resultaron un simple recurso didáctico del profesor para evitar en ellos actitudes mecánicas frente a los problemas, para otros, los menos, les parecieron normales "cuando inventas problemas" y que "ayudan a desarrollar la mente matemática y al intentar resolverlos se llega a nuevas cosas, ideas o teorías".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alarcón, J., E. Bonilla, R. Nava, T. Rojano y R. Quintero (1994), *Libro para el maestro. Educación Secundaria,* México, Secretaría de Educación Pública.

Balacheff, N. (1987), "Processus de preuve et situations de validation", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 18, pp. 147-176.

—— (1999), "¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate", http://athena.mat.ufegs.br/~portosil/resut2.html.

—— (2000), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas,* Colombia, Una Empresa Docente.

Brousseau, G. (1986), "Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques", Tesis de doctorado, Université de Bordeaux I.

Cobb, P., T. Wood y E. Yackel (1992), "Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis", *American Educational Research Journal,* vol. 29, núm. 3, pp. 573-604.

Cobb, P., B. Jaworski y N. Presmseg (1996), "Emergent and Sociocultural Views of Mathematical Activity", en L. Steffe (ed.), *Theories of Mathematical Learning,* Dodrecht, Kluwer.

Cobb, P., A. Boufi, K. McClain y J. Whitenack (1997), "Reflective Discourse and Collective Reflection", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 28, núm. 3, pp. 258-277.

Cobb, P., M. Perlwitz y D. Underwood-Gregg (1998), "Individual Construction, Mathematical Acculturation and the Classroom Community", en M. Larochelle, N. Bednarz y J. Garrison (eds.), *Constructivism and Education,* Nueva York, Cambridege University Press.

Chazan, D. (1993), "High School Geometry Student's Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 24, pp. 359-387.

Fischbein, E. (1982), "Intuition and Proof", *For the Learning of Mathematics,* vol. 3, núm. 2.

Habermas, J. (1987), *Teoría de la acción comunicativa, I,* 3ª ed., México, Taurus.

Institut de Recerche sur L' enseignement des Mathématique de Grenoble [IREM] (1980), "Quel est l'âge du capitain?", *Bulleetin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP),* núm. 323, pp. 235-243.

Krummheuer (1995), "The Ethnography of Argumentation", en P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning,* New Jersey, Lawrence Erlbaum.

Mehan, (1979), *Learning Lessons: Social Organization in the Classroom*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.
NCTM (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM.
—— (1991), *Professional Standards for Teaching Mathematics*, Reston, VA, NCTM.
—— (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM.
Pirie, SEB, y RLE Schwarzenberger (1988), "Mathematical Discussion and Mathematical Understanding", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 19, pp. 459-470.
Richards, J. (1991), "Mathematical Discussions", en E. von Glassersfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer, pp. 13-51.
Santos Trigo, M. (2002), "Students' Use of Mathematical Representations in Problem Solving", *Mathematics and Computer Education Journal*, primavera, pp. 101-114.
Schoenfeld, A. H. (1992), "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics", en D. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, MacMillan, pp. 334-370.
Schubauer-Leoni, M. y L. Ntamakiliro (1998), "The Construction of Answers to Insoluble Problems", en M. Larochelle, N. Bednarz y J. Garrison (eds.), *Constructivism and Education*, Nueva York, Cambridge University Press.
Silver, E. A., L. J. Shapiro y A. Deustch (1993), "Sense Making and the Solution of Division Problems Involving Remainders: An Examination of Middle School Students' Solutions Processes and their Interpretations of Solutions", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, núm. 2, pp. 117-135.

DATOS DE LOS AUTORES

Iñaqui de Olaizola Arizmendi
Universidad Autónoma Metropolitana-Xochimilco, México
inaquide@cueyatl.uam.mx

Luz Manuel Santos Trigo
Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional, México
msantos@cinvestav.mx

Toulmin, S. E. (1958), *The Uses of Argument*, Londres, Cambridge University Press.

Watzlawick, P. (1994), "Introducción", en P. Watzlawick (ed.), *La realidad inventada. ¿Cómo sabemos lo que creemos saber?*, 3ª ed., Barcelona, Gedisa.

Yackel y Cobb (1996), "Sociomath Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, núm. 4, pp. 458-477.