

Buckiedros, geometría del espacio y origami modular

Víctor Larios Osorio

Resumen: En este trabajo se presentan actividades para estudiar los *buckiedros* (poliedros de caras pentagonales y exagonales), utilizando el origami modular. No sólo se exhiben los métodos de construcción de dos módulos útiles para este fin y algunos análisis que se pueden realizar sobre los *buckiedros esféricos*, sino que también se insertan comentarios a fin de que el lector escudriñe por su propia iniciativa algunas opciones, aplique las actividades en clase y esté al tanto de algunos detalles relacionados con la construcción de estos poliedros y el uso del origami modular.

Palabras clave: enseñanza de la geometría, origami modular, poliedros.

Abstract: This paper explores some activities about the *buckyballs* (polyhedra with pentagonal and hexagonal faces) using modular origami. Moreover, it exhibits construction methods of two kinds of modules and some analysis about *spherical buckyballs*, and includes comments for the reader in order to make some investigations for his/her own, to apply the activities in geometry class and to learn some related details of these polyhedra and modular origami.

Key words: geometry teaching, modular origami, polyhedra.

INTRODUCCIÓN

Comúnmente, en México, el estudio de la geometría del espacio en el nivel medio ha quedado relegado a unos pocos tipos de poliedros y cuerpos geométricos, cuya construcción se basa por lo regular en el uso de redes (lo cual remite a construcciones de polígonos con regla y compás). Sin embargo, existen muchos otros cuerpos geométricos, particularmente poliedros, y otros métodos para construirlos basados en una tecnología diferente a la de la regla-y-compás, utilizando técnicas par-

ticulares del doblado de papel, llamado también *papiroflexia* u *origami*.¹ En particular se puede utilizar el *origami modular*, que consiste en construir varios *módulos* (iguales o no) doblando igual cantidad de hojas de papel, para luego ensamblarlos entre sí a fin de formar una construcción que puede ser plana (un modelo de teselado² bidimensional) o no (un modelo de poliedro, por ejemplo).

En este trabajo se propone una manera de abordar, usando técnicas de origami modular, el estudio de poliedros (convexos), que tienen la particularidad de que la totalidad de sus caras son pentágonos o exágonos y que, además, en cada uno de sus vértices concurren tres aristas, es decir, se propone el estudio y construcción de los llamados *buckiedros* o *buckyballs*,³ nombres que adquirieron por los estudios que sobre estructuras geodésicas hizo Richard Buckminster Fuller en la segunda mitad del siglo pasado y que dieron lugar a la construcción de domos poliédricos gigantescos.

Hay que decir que, en mucho, el escrito está pensado para ser leído principalmente *por profesores* (aunque cualquier interesado en el tema lo puede leer), e intercala comentarios sobre posibles maneras de utilizar el material en clase. Así pues, uno de los objetivos del trabajo es proporcionar material para clases de nivel medio, pero vale la advertencia de que, cada vez que se haga ese uso en un aula, es necesario que exista una adaptación por parte del docente para permitir que los alumnos exploren las opciones que se puedan presentar y no sólo se les proporcione la información como si fuese un manual. Estoy convencido de que, para que una propuesta educativa funcione como es debido, no es suficiente proporcionar material o tecnología, sino que el profesor (en sus actitudes, formación, participación) desempeña un papel importante e indispensable.

Así pues, ahondaremos en los tipos de poliedros, para después avanzar en su construcción.

¹ La palabra *origami* es de origen japonés y quiere decir “hecho doblando papel”. Ha sido aceptada en varios idiomas como sinónimo de *papiroflexia* o *doblado de papel* en castellano, o *paper folding* en inglés.

² Una práctica muy difundida en estos casos es utilizar el término *teselación*, que no existe en castellano y es producto de una “traducción” literal del término en inglés *teselation*; sin embargo, el término correcto es *teselado*.

³ La palabra *buckiedro* no existe en castellano, pero prefiero utilizarlo más que el término inglés *buckyball* para mantener la coherencia con el idioma usado.

POLIEDROS DE CARAS PENTAGONALES Y EXAGONALES

En la geometría plana se pueden contabilizar una cantidad infinita de polígonos, de los cuales, el subconjunto de los polígonos regulares también es infinito. Sin embargo, para el caso de los poliedros se tiene que, a pesar de que existe también una cantidad infinita de éstos, sólo existen cinco poliedros regulares o *sólidos platónicos*,⁴ que son aquellos en los que todas las caras son polígonos regulares con la misma cantidad de lados. A cada uno de estos poliedros se les puede denotar con un símbolo de Schläfi de la forma $\{p,q\}$, donde p indica el número de lados que tiene cada cara (son p -ágonos) y q indica cuántas caras concurren en cada vértice. Así pues, los cinco poliedros regulares son: el tetraedro $\{3,3\}$, el exaedro (o cubo) $\{4,3\}$, el octaedro $\{3,4\}$, el icosaedro $\{3,5\}$ y el dodecaedro $\{5,3\}$ (figura 1a). La demostración de que sólo existen estos cinco poliedros regulares no entra dentro del objetivo y alcances de este trabajo, por lo que, si existe algún interesado al respecto, le sugerimos revisar el libro de Harold Scott MacDonald Coxeter titulado *Fundamentos de Geometría* (1971, pp. 184-185), donde para sus argumentos utiliza la llamada *fórmula de Euler*:

$$V - A + C = 2,$$

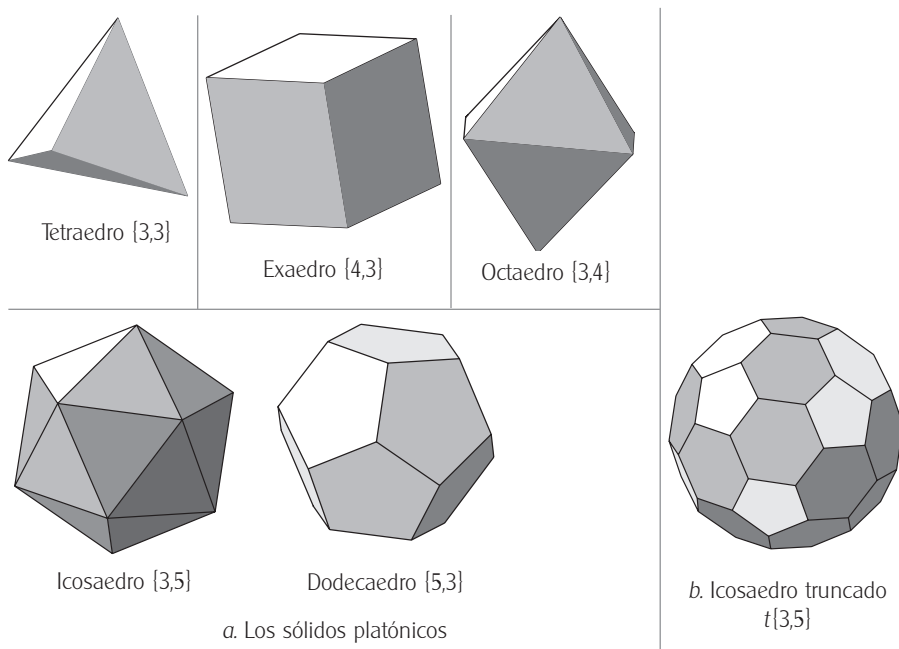
donde V es el número de vértices de un poliedro, A es el número de aristas y C es el de sus caras. Esta fórmula también la consideraremos más adelante.

Para efectos de este trabajo, se puede observar que el único sólido platónico que tiene caras pentagonales es el dodecaedro, razón por la cual es el buckiedro más pequeño. En este punto vamos a introducir la notación 5^r-6^s , donde r indica la cantidad de caras pentagonales del buckiedro y s la de caras exagonales, simplificando así la observación del número de caras del poliedro que en el caso del dodecaedro (que sólo tiene caras pentagonales) queda: $5^{12}-6^0$.

Por otra parte, una rápida observación de la figura 1a nos deja ver que no existe un poliedro regular cuyas caras sean sólo exágonos regulares, y además resulta que *no* puede existir un poliedro con esta característica (¿podría el lector explicar esto?), por lo que, para el caso de los sólidos platónicos, sólo nos quedaremos con el dodecaedro.

⁴ El nombre de *sólidos platónicos* es porque Platón veía los primeros cuatro poliedros como símbolos de los cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua, respectivamente; mientras que el quinto correspondía a una forma que envolvía a todo el universo.

Figura 1



Continuando con los siguientes tipos de poliedros, se encuentra uno con los *sólidos arquimedianos* (o semirregulares) que, junto con los platónicos, forman parte del conjunto de los *poliedros uniformes*. Tras una breve inspección, se puede hallar que nada más el icosaedro truncado (figura 1b), cuyo símbolo de Schläfi es $t\{3,5\}$, tiene únicamente caras pentagonales y exagonales (en cada vértice concurren dos exágonos y un pentágono, y la cantidad total de cada tipo de caras queda denotada por $5^{12}-6^{20}$) por lo que únicamente este poliedro nos sirve para las actividades planteadas, ya que es el segundo buckiedro más pequeño.

Conviene decir que estas observaciones implican una pequeña investigación bibliográfica e incluso, con software apropiado,⁵ pueden ser realizadas por los alumnos, permitiendo así que conozcan la existencia de estos sólidos geométricos, sus formas, descripciones y propiedades relacionadas con sus caras, aristas y vértices.

⁵ Un programa relativamente pequeño pero con gran potencialidad gráfica que sirve para la visualización y estudio de los poliedros se llama *Poly*, es distribuido por la empresa Pedagoguery Software Inc., y se puede conseguir a través de Internet en la dirección <http://www.peda.com>.

Ahora bien, en seguida consideraremos algunas técnicas para las primeras construcciones de estos dos poliedros utilizando el origami modular, pero antes vendría que el lector reflexionase sobre alguna posible relación entre los dos poliedros que se han mencionado. En otras palabras, obsérvese que el dodecaedro y el icosaedro truncado se simbolizan por $\{5,3\}$ y $t\{3,5\}$, respectivamente, ¿podría el lector hallar alguna relación (que incluso la nomenclatura podría sugerir) entre ambos poliedros? o, quizá planteado de una manera más sencilla, ¿qué relación existe entre el dodecaedro y el icosaedro?

ORIGAMI MODULAR PARA BUCKIEDROS

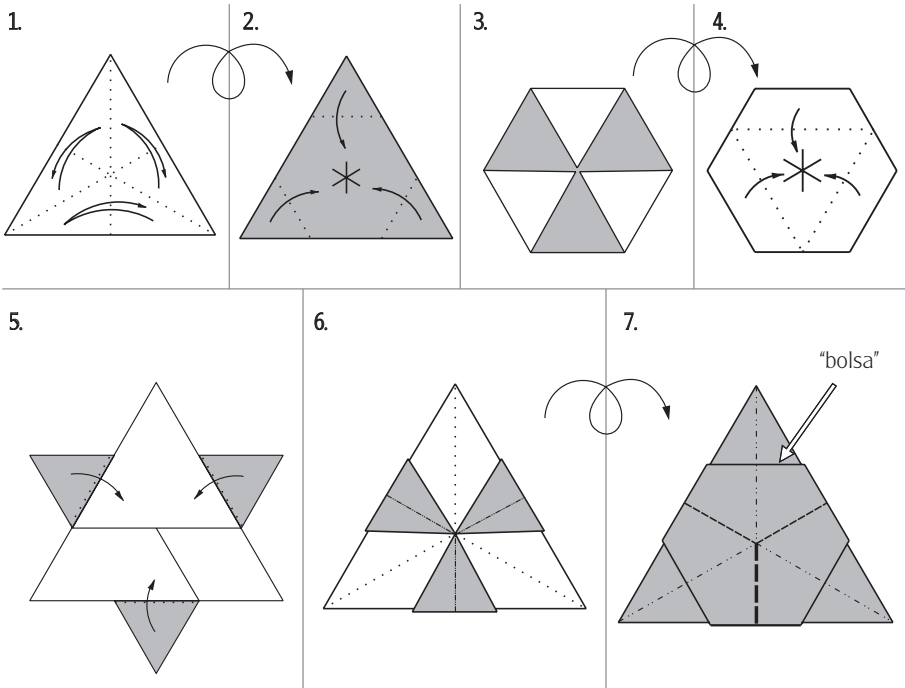
Existen varias maneras de construir buckiedros recurriendo al origami, por ejemplo utilizando el *módulo triangular de una pieza*, el *módulo PHIZZ*, el *módulo penultimate* o el *módulo up-down*. Sin embargo, aquí sólo vamos a considerar los dos primeros, pues con ellos se pueden construir poliedros cuyas caras sean de ambas formas, mientras que con los últimos dos tipos sólo se consiguen poliedros cuya totalidad de caras o son pentagonales o son exagonales, pero no de los dos tipos en el mismo poliedro.

MÓDULO TRIANGULAR DE UNA PIEZA

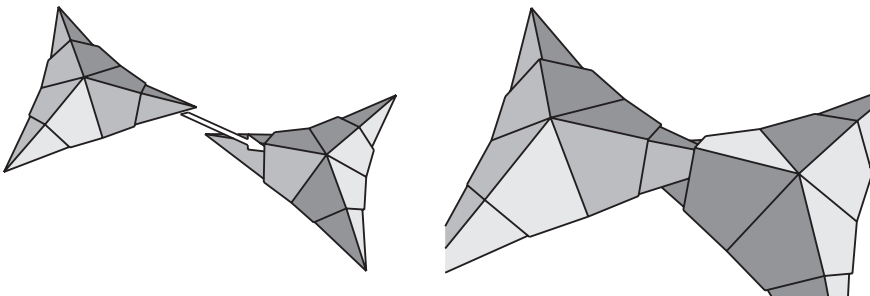
Este módulo es atribuido a Bennett Arnstein por Gurkewitz y Arnstein (1995, p. 37) y sirve para hacer poliedros de caras pentagonales y exagonales en los cuales concurren tres aristas en cada vértice. Tiene la ventaja de que la construcción de los módulos y el ensamble de éstos es más fácil que en el caso de otros módulos, además de que sólo es necesario un módulo para cada vértice del poliedro; sin embargo, no se puede manipular mucho el poliedro final, porque se desarma fácilmente. Además, una de las dificultades que presenta es que los trozos iniciales de papel tienen forma de triángulos equiláteros (¿podría el lector hallar la manera de conseguir este tipo de trozos de papel a partir de rectángulos y sin usar ni compás ni regla, sino sólo doblando el papel?).

Los pasos para la construcción de cada módulo son los siguientes:⁶

⁶ En todos los diagramas de doblado de papel de este trabajo, se utiliza la simbología tradicional de los libros de origami.



Antes de ensamblar los módulos hay que observar que en cada uno de sus picos se formó una “bolsa”, en las cuales se insertan los módulos tal como se muestra en las siguientes figuras:

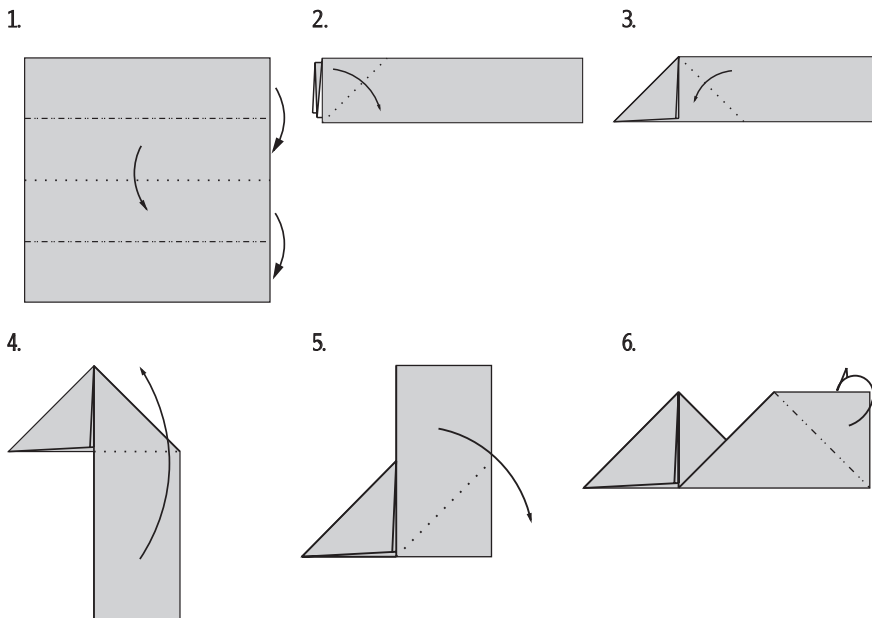


Nótese que la figura de la derecha está ampliada y que faltaría deslizar completamente el pico de un módulo dentro de la “bolsa” del otro para completar el ensamble (véase el resultado en la figura 2a a la izquierda).

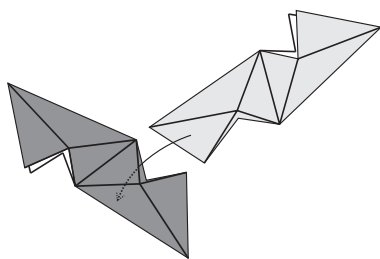
MÓDULO PHiZZ

El nombre de este módulo se debe a que es una abreviación del módulo que Tomas Hull (2001) llama *módulo pentagonal-exagonal-zig-zag*. Este módulo tiene la ventaja de que los poliedros resultantes son mucho más estables, manipulables y resistentes que los de otros módulos (¡jugué futbol con un modelo!), pero se necesitan tres módulos por cada vértice del poliedro y su ensamble (no su construcción) requiere mucha paciencia y más habilidad.

El procedimiento para la construcción es el siguiente:



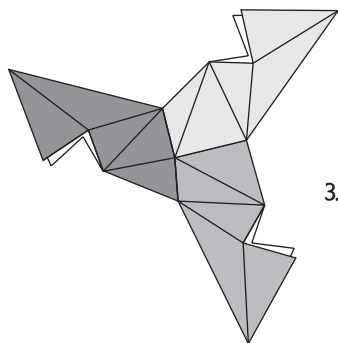
Para ensamblar los módulos, es necesario que primero se desdoblen un poco y así poder usar tres para cada vértice de la siguiente manera:



1. Hay que deslizar un módulo dentro de otro casi en ángulo de 90° , haciendo que los dobleces coincidan entre sí.



2. Se desliza un tercer módulo dentro del segundo que se usó, y simultáneamente se inserta el primero en el último. Muy seguramente será necesario aflojar ligeramente el ensamble del paso anterior para poder realizar éste.

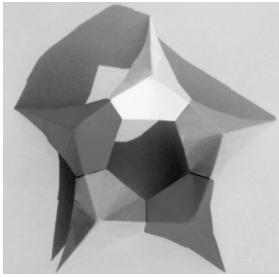


3. Al final sólo hay que ajustar bien los módulos entre sí. El resultado es como el que se muestra y corresponde a un vértice de un poliedro (cada módulo toca dos vértices). Conviene observar que la dificultad para el ensamble queda recompensada por la sujeción entre las piezas, propiciando que los poliedros resultantes sean más resistentes.

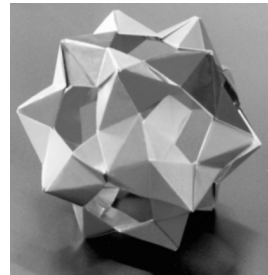
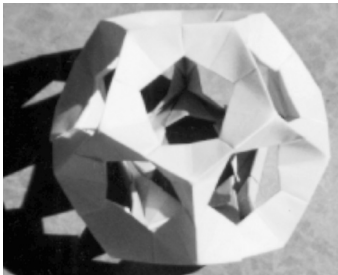
CONSTRUCCIÓN DE LOS PRIMEROS POLIEDROS

Una vez que se ha mostrado cómo se hacen los módulos de origami, el lector podría comenzar por construir dos dodecaedros, uno con cada tipo de módulo. Para esta construcción conviene comenzar por ensamblar los módulos a fin de obtener anillos pentagonales (posteriormente se harán también anillos exagonales), tal como se muestra en la figura 2a. Estas construcciones le permiten al profesor elegir alguno de los dos módulos (o los dos) para utilizarlos en clase, experimentando directamente las ventajas y dificultades de cada caso. En la figura 2b aparecen dos dodecaedros: el de la izquierda se construye usando el módulo triangular y el de la derecha, usando el módulo PHiZZ.

Figura 2



a. Anillos pentagonales construidos con módulos triangulares (izquierda) y módulos PHiZZ (derecha).

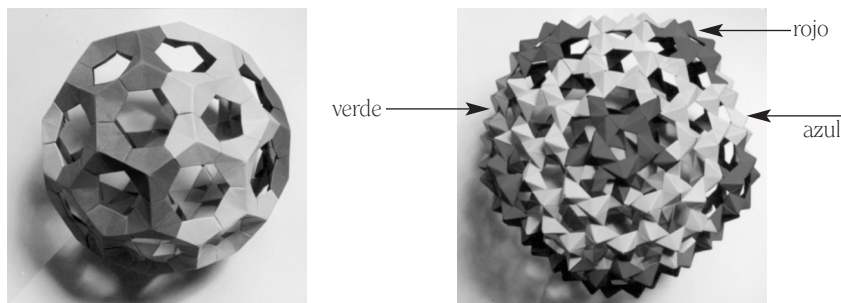


b. Dodecaedros construidos con módulos triangulares (izquierda) y módulos PHiZZ (derecha).

Una vez elegido el módulo que se va a utilizar, se puede continuar construyendo un icosaedro truncado (como el de la figura 3a), para lo cual habría que determinar primero cuántos módulos se necesitan para su construcción. ¿Podría el lector determinar este dato tanto para el caso del módulo triangular como para el del módulo PHiZZ? Resultaría interesante permitir a un grupo de alumnos que especulen (conjeturen) sobre esta información necesaria para la preparación del material antes de la construcción. Más adelante, retomaremos las conclusiones que se irán generando al respecto.

El siguiente paso es plantearse el reto de construir un buckiedro más grande y comenzar por determinar la cantidad de módulos que serán necesarios. Un primer progreso podría ser el de añadir una misma cantidad de exágonos alrededor de cada uno de los pentágonos del icosaedro truncado, llevándonos necesariamente a la construcción de un buckiedro como el de la figura 3b.

Figura 3



a. Icosaedro truncado ($5^{12}-6^{20}$) hecho con módulos triangulares.

b. Buckiedro de 122 caras ($5^{12}-6^{110}$) hecho con módulos PHiZZ. (Nótese que los pentágonos están contruidos en rojo y los exágonos en azul celeste o verde.)

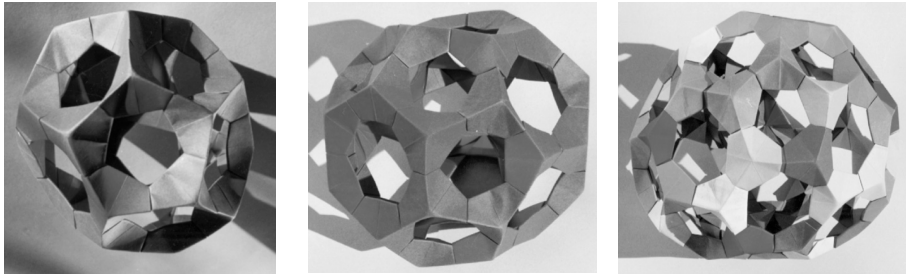
Hay que hacer el señalamiento de que esta manera de hacer que “crezcan” los buckiedros no es la única, pues se pueden añadir cantidades distintas alrededor de cada cara pentagonal. Sin embargo, en este trabajo estableceremos, de aquí en adelante, la nueva restricción de sólo considerar los *buckiedros esféricos*, que son los que tienen sus doce caras pentagonales⁷ separadas a una misma distancia una de otra. (En la figura 4 se muestran algunos *buckiedros no esféricos*.) No obstante, continuaremos llamándoles simplemente buckiedros por sencillez.

Regresando al poliedro de la figura 3b, ¿podría el lector calcular la cantidad de módulos PHiZZ necesarios para su construcción?, ¿y el número de caras y vértices? Es más, ¿éste es el tercer buckiedro más pequeño, o podrá existir uno intermedio entre éste y el icosaedro truncado? Estas interrogantes permiten un acercamiento al estudio de estos poliedros y la generalización de algunas de sus propiedades.

⁷ En general, *todos* los buckiedros tienen doce caras pentagonales; en otras palabras, en la notación de la forma 5^r-6^s se tiene que para este tipo de poliedros siempre ocurre que $r=12$. Esto se puede demostrar utilizando la misma fórmula de Euler, pero ello iría más allá del objetivo del trabajo.

Figura 4 Tres ejemplos de *buckiedros no esféricos*: $n5^{12}-6^2$ (un tetradecaedro), $n5^{12}-6^8$ y $n5^{12}-6^{17}$

(La n que aparece antes del 5 es para indicar que son *no esféricos*)



POLIEDROS DUALES Y BUCKIEDROS

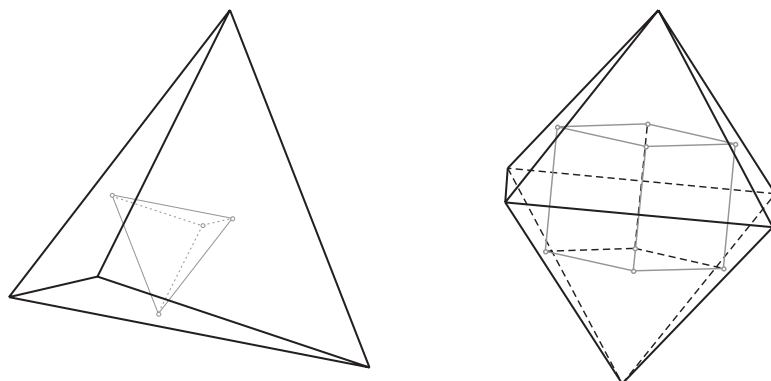
En la parte final de la sección “Origami modular para buckiedros”, se planteó como interrogante la relación que puede existir entre los dos buckiedros más pequeños: el dodecaedro y el icosaedro truncado; y más aún, se dejó al lector la tarea de determinar (o investigar) la relación entre el dodecaedro y el icosaedro, la cual está sugerida por la misma notación: $\{5,3\}$ y $\{3,5\}$, respectivamente.

En términos generales, si se toma un poliedro, se marcan los centros de cada una de sus caras y se unen cada uno de estos puntos con los puntos de las caras adyacentes, se obtiene el poliedro dual del original (en la figura 5 se muestran tres ejemplos). Así, los vértices de este último corresponden a las caras del primer poliedro (y viceversa).

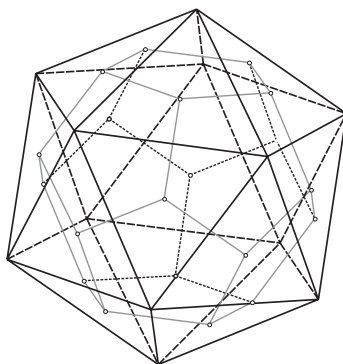
Un hecho que conviene resaltar es que, si en un poliedro se toma una cara de n lados, entonces en el vértice correspondiente de su poliedro dual concurren n aristas (una para cada lado de la cara del poliedro original). Así pues, para el caso del dodecaedro $\{5,3\}$ se tiene que su poliedro dual es aquel en el cual en sus vértices concurren cinco aristas o, de hecho, cinco caras (q , entonces, valdría 5); además, este poliedro dual tiene caras triangulares, pues en cada vértice del dodecaedro concurren tres aristas; por tanto, el símbolo de Schläfi del poliedro dual del dodecaedro sería $\{3,5\}$, ique corresponde precisamente al icosaedro! (véase la figura 5c).

Sin embargo, el icosaedro no es un buckiedro, y no se puede construir con los módulos de origami expuestos, sólo si se trunca, aparecen los pentágonos (donde estaban los vértices) y los exágonos.

Figura 5



- a. El poliedro dual de un tetraedro [3,3] (en trazo grueso) es otro tetraedro [3,3] (en trazo delgado y punteado).
- b. El dual del octaedro [3,4] (en trazo grueso) es el exaedro [4,3].

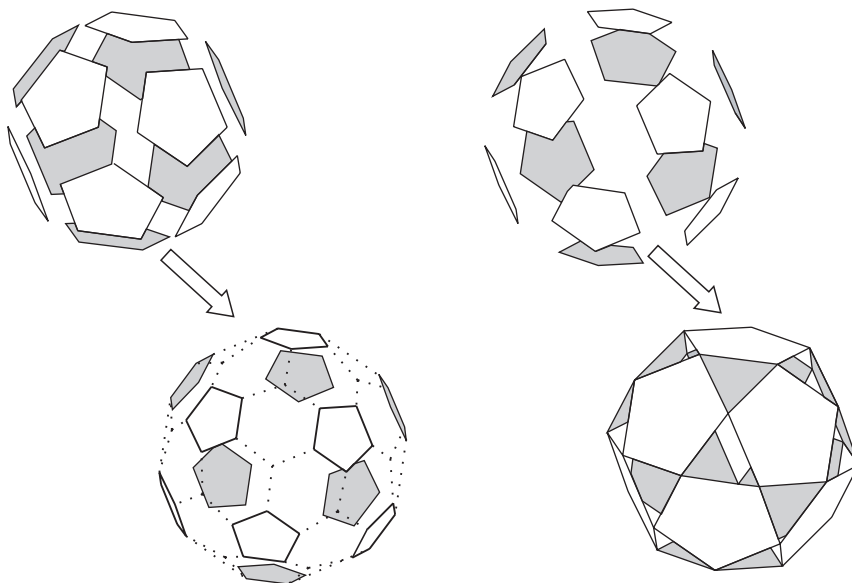


- c. El dodecaedro [5,3] (en trazo delgado) y el icosaedro [3,5] (en trazo grueso) son duales entre sí

El hecho de la dualidad entre el dodecaedro y el icosaedro puede servir de aquí en adelante de una manera indirecta, pues como todos los buckiedros tienen doce pentágonos, éstos pueden ser “colocados” en los vértices de un icosaedro e irlo “inflando”. La pregunta que surge a continuación es: ¿entonces se puede obtener un icosaedro truncado “inflando” un dodecaedro, o viceversa?

Antes de responder, obsérvese la figura 6. A la izquierda se muestra un dodecaedro “inflado” (compárese con la figura 1a correspondiente), con los pentágonos separados en el espacio y con algunas posibles aristas que unirían a los

Figura 6



a. Dodecaedro “inflado”, con los pentágonos separados en el espacio.

b. Icosaedro truncado “desinflado”: habiendo eliminado sus caras exagonales, las pentagonales se juntan hasta tocarse entre sí.

vértices en líneas punteadas (nótese que se han forzado esas “posibles aristas” y se han introducido nuevos vértices para poder formar caras exagonales, ya que de otra manera se obtendría un poliedro parecido al rombicododecaedro). A la derecha se muestra un icosaedro truncado “desinflado”, de tal manera que los pentágonos están tocándose entre sí lo menos posible: tan sólo por los vértices (compárese con la figura 1b); en este caso, se puede apreciar la forma de otro poliedro

semirregular (o quasirregular): el icosidodecaedro (símbolo de Schläfi $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right\}$). Lo

anterior permite contestar negativamente la pregunta, pues la figura 6a muestra un posible buckiedro que *no* es un icosaedro truncado y evidentemente la figura 6b *no* muestra un dodecaedro. Entonces, hasta el momento se pueden identificar dos familias de buckiedros: la del dodecaedro, que “une” a los pentágonos por las

aristas y a la que llamaremos de *pentágonos “unidos” por aristas* (o familia *PUA*); y la del icosidodecaedro, que “une” a los pentágonos por vértices y a la que llamaremos de *pentágonos “unidos” por vértices* (o familia *PUV*).

Para continuar, podríamos considerar el caso de una familia y luego el de la otra.

LA FAMILIA PUV

Al contrario del orden establecido al final de la sección anterior, primero abordaremos el caso de la familia *PUV* por facilidad, pues se parte de un icosaedro truncado (presumiblemente ya construido al momento) y se le añaden exágonos alrededor de cada uno de los pentágonos para irlo “inflando”. Este procedimiento parece simple, pero es conveniente plantear, antes de cualquier construcción, al menos la cantidad de módulos que serán utilizados (y, por tanto, del material), lo cual nos lleva necesariamente a determinar la cantidad de vértices y, de paso, de caras y aristas.

Recordando la relación entre los buckiedros y los icosaedros en relación con la cantidad de pentágonos en unos y el de vértices en el otro, se puede comenzar por pensar que, entre más se “inflen” los buckiedros más parecerán icosaedros, en cuyas caras habrán teselados de exágonos. Así pues, se puede plantear a los alumnos el reto de hacer la división de cada una de las caras de un icosaedro en exágonos para poder dibujar, en un inicio, un icosaedro truncado. Este reto incluye varias pruebas para, quizá, descubrir que lo más fácil es dividir cada cara triangular en teselados de triángulos para después juntar varios de éstos y formar los arreglos exagonales requeridos (esto ocurre nuevamente aprovechando las relaciones entre los triángulos y los exágonos, las cuales quizá convendría que fuesen explicitadas por los propios alumnos) y, después, determinar en cuántas partes se tienen que dividir cada una de las caras del icosaedro.

Se pueden hacer varios esquemas, tal como los cinco icosaedros de la figura 7, en los cuales aparecen teselados triangulares en sus caras.

Obsérvese que sólo el segundo (que tiene nueve triángulos en cada cara y cuyas aristas están divididas en tres partes) y el quinto (que tiene 36 triángulos y las aristas divididas en seis partes) de estos poliedros podrían permitir que apareciesen exágonos, tal como se muestra en la figura 8 con líneas gruesas (se han dejado algunos puntos extras en las aristas adyacentes para mostrar algunas caras pentagonales).

Figura 7

(Para simplificar sólo ha sido teselada una de las caras de cada icosaedro.)

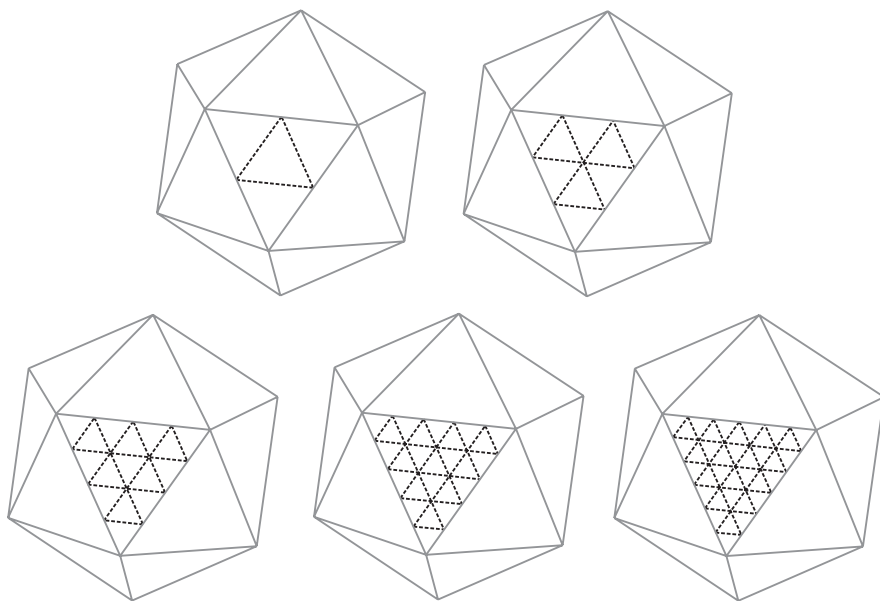
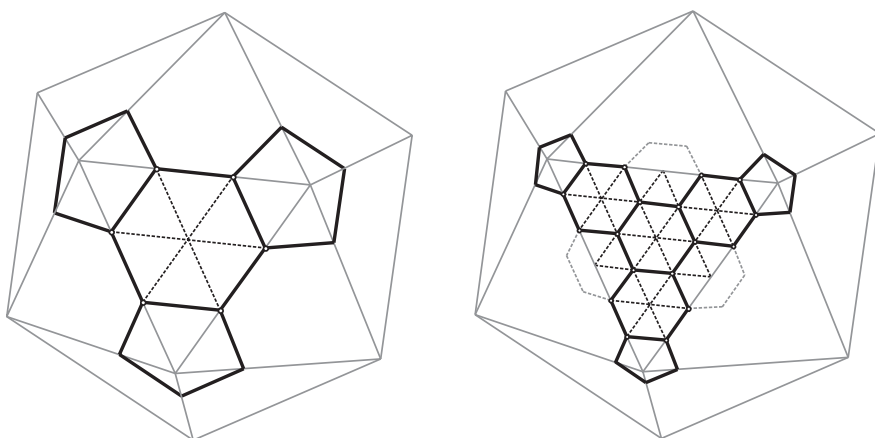


Figura 8



Con el de la izquierda, se forma un icosaedro truncado y con el de la derecha el siguiente buckiedro de esta familia. Se pueden seguir haciendo teselados triangulares en las caras de un icosaedro para hacer exágonos y se podrán observar dos hechos: a) sólo se pueden formar exágonos cuando las aristas se dividen en una cantidad que es múltiplo de 3; y b) algunos exágonos pertenecen a dos caras.

Con esta información, se puede comenzar a establecer un cuadro como el que sigue:

Partes en las que se divide cada arista (n)	Triángulos obtenidos en cada cara	Exágonos que se pueden obtener en cada cara	
		completos (e_c)	mitades (e_m)
3	9	1	0
6	36	4	3
9	81	10	6
12	144	19	9
15	225	31	12

Después de mucha observación, se puede llegar a la conclusión de que, si n es el número de partes en las que se divide cada arista, entonces la cantidad de triángulos se obtiene de sumar todos los números impares desde 1 hasta $(2n - 1)$, es decir, $1 + 2 + \dots + (2n - 1)$, que también se puede expresar como n^2 (¿puede el lector determinar por qué se afirma esto?, aunque podría convenir investigar sobre sucesiones aritméticas y series).

Asimismo, la cantidad de exágonos completos (e_c) que se obtienen en cada cara del icosaedro base al dividir las aristas en n partes es la cantidad de exágonos obtenidos en el renglón anterior (misma columna) del cuadro más $n - 3$. En otras palabras, y considerando a m como el renglón del cuadro (para simplificar), después de un rato se puede llegar a observar que el valor de e_c se puede obtener con una serie de la forma $1 + 0 + 3 + 6 + 9 + \dots + a_m$ (de $m + 1$ términos); con la ayuda de fórmulas para calcular series se podría llegar al resultado de que

e_c en el m -ésimo renglón del cuadro vale $\frac{3}{2}m(m-1) + 1$; y como $m = \frac{n}{3}$, entonces se tiene que, para el caso en que se divida cada arista del icosaedro base en n

partes iguales, $e_c = \frac{n(n-3)}{6} + 1$.

Finalmente, la última columna se obtiene con la expresión $n - 3$.

Entonces, para calcular la cantidad de caras de un buckiedro de esta familia, considerando n como hasta ahora, es necesario sumar la cantidad de exágonos completos (e_c) y la mitad de los medios exágonos (e_m) por cada cara del icosaedro y luego multiplicarlo por 20. En otras palabras, considerando la notación $5^r - 6^s$,

$$\text{se tiene que } s = 20 \left(e_c + \frac{e_m}{2} \right) = \frac{10}{3} (n^2 - 3).$$

Pero antes de concentrar esta información en un cuadro, pensaremos en otro dato necesario para la construcción de los buckiedros con origami modular: los vértices.

La forma de calcular la cantidad de vértices de un buckiedro de esta familia podría ser similar a la que hemos presentado para el caso de las caras exagonales, es decir, consideremos los icosaedros base y contemos los vértices en una cara para cada caso en que se divida la arista en n partes. En la figura 8 se han marcado los vértices de los buckiedros que están en una de las caras del icosaedro y haremos una clasificación de ellos semejante a la que se hizo con las caras exagonales: hay vértices en el interior (v_i) de la cara del icosaedro (que están en una y sólo una cara de éste) y hay vértices en las aristas (v_a) del icosaedro (que pertenecen a dos caras de éste); después de hacer varios esquemas más de las caras del icosaedro (hechos presumiblemente por alumnos), se podría llenar un cuadro como el siguiente:

Partes en las que se divide cada arista (n)	Vértices	
	en el interior (v_i)	en las aristas (v_a)
3	0	6
6	6	12
9	18	18
12	36	24
15	60	30

Nuevamente, considerando fórmulas para calcular series, se tiene que el valor de v_i para el caso en que las aristas del icosaedro base se divida en n partes es $\frac{n(n-3)}{3}$, mientras que el valor de v_a se obtiene con la expresión $2n$. Y, similar-

mente al caso de las caras exagonales del buckiedro, la cantidad total de vértices (V) se puede obtener con la expresión $V = 20 \left(v_i + \frac{v_a}{2} \right) = \frac{20}{3} n^2$.

Finalmente, para calcular la cantidad de aristas (A) de un buckiedro, se puede utilizar la fórmula de Euler y si C es la cantidad de caras de éste, considerando n como hasta ahora, se tiene que:

$$A = C + V = \left[\frac{10}{3}(n^2 - 3) + 12 \right] \left(\frac{20}{3} n^2 \right) - 2 = 10n^2$$

Entonces, podemos sintetizar toda esta información en el siguiente cuadro:

n	Buckiedro	Caras exagonales (s)	Vértices (V)	Aristas (A)
3	$5^{12}-6^{20}$ (icosaedro truncado)	20	60	90
6	$5^{12}-6^{110}$ (figura 3b)	110	240	360
9	$5^{12}-6^{260}$	260	540	810
12	$5^{12}-6^{470}$	470	960	1 440
15	$5^{12}-6^{740}$	740	1 500	2 250
...
n	$5^{12}-6^s$	$\frac{10}{3}(n^2 - 3)$	$\frac{20}{3}n^2$	$10n^2$

Así pues, por ejemplo, cuando $n = 6$, se tiene el caso del buckiedro de la figura 3b. También se puede decir que, si las aristas de un icosaedro base, como los considerados en la figura 6, se dividen cada una en 30 partes, se podría construir el buckiedro $5^{12} - 6^{2990}$, es decir, uno que tendría 3 002 caras (2 990 exagonales y las 12 pentagonales obligatorias); además, tendría 6 000 vértices y 9 000 aristas. Con esta información, se podría calcular, entre otras cosas, el trabajo, el tiempo y el material necesario para construirlo utilizando origami modular.

LA FAMILIA PUA

La familia *PUA* o *del dodecaedro* se puede obtener “inflando” este poliedro, al añadirle una cantidad igual de exágonos alrededor de cada uno de sus pentágonos. De esta manera, el siguiente buckiedro que se obtiene es el $5^{12}-6^{30}$, mostrado en la figura 9 y esbozado en la 4a. Con esto, se puede contestar la pregunta planteada en el último párrafo de la sección “Construcción de los primeros poliedros” que se refería a si el buckiedro $5^{12}-6^{110}$ era el tercero más pequeño, lo cual evidentemente no es así, pues el buckiedro mostrado en la figura 9 ocupa ese lugar.

De hecho, el proceso de “inflado” puede continuar, pero una de las razones por las que se ha tomado esta familia como segundo caso es porque, al estudiarla de una manera semejante a la de la familia *PUV*, es necesario considerar los llamados teselados duales, los cuales se obtienen de una manera similar al caso del de los poliedros: uniendo los centros de cada una de las teselas originales. En la figura 10 hay cuatro teselados, de los cuales, cada pareja de cada lado son duales entre sí.

Una ventaja que se puede apreciar en los teselados de la derecha es que el dual de un teselado triangular es uno exagonal, y esto se puede aplicar al análisis de la familia *PUA* de los buckiedros, pues las caras de los icosaedros que se toman como base (como los de la figura 7) están divididas con teselados triangulares y lo que se necesitan son precisamente caras exagonales. En la figura 11,

Figura 9

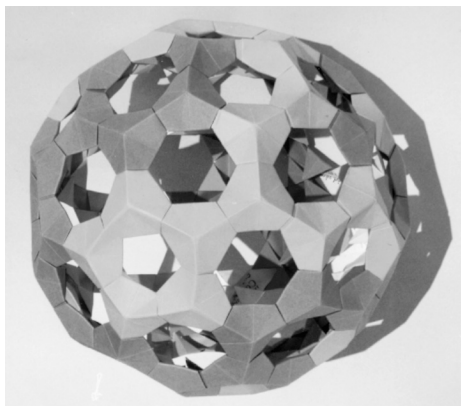


Figura 10

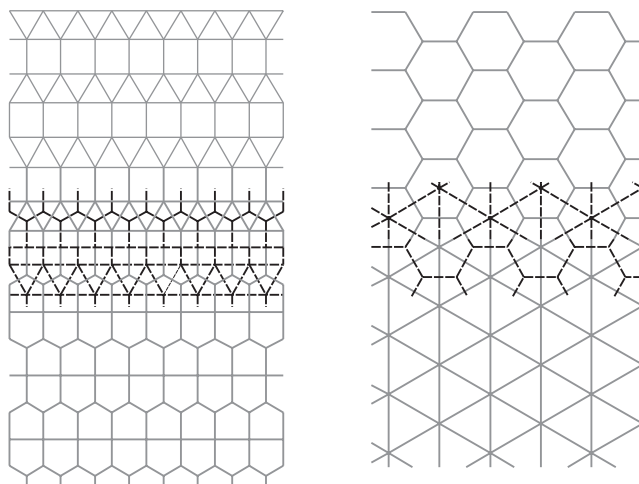
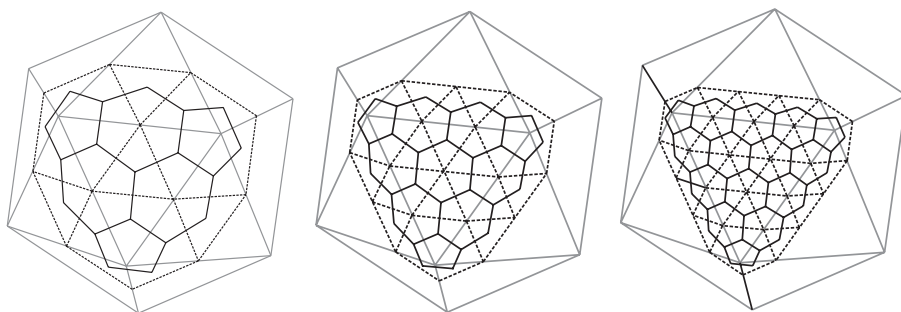


Figura 11

(Aunque sólo se ha teselado una de las caras de cada uno de los icosaedros, se han incluido algunos fragmentos de los teselados correspondientes a las caras adyacentes.)



hay tres ejemplos de tales icosaedros con las aristas divididas en 2, 3 y 4 partes (el valor de n), con sus teselados triangulares y sus correspondientes duales (los exagonales en trazo grueso). Es posible observar que no importa que los valores de n (la cantidad de divisiones de las aristas de los icosaedros) sean múltiplos de 3, sino que cualquier valor sirve.

Para contar la cantidad de caras exagonales, éstas se pueden clasificar en las que están en el interior de cada cara del icosaedro original (e_i) y las que quedan sobre las aristas de éste (e_a). Con esa información y con más diagramas, es posible contar también los vértices (marcados en la figura 11) en cada una de las caras del icosaedro que sirve de base, a fin de llenar el siguiente cuadro:

Partes en las que se divide cada arista (n)	Exágonos		Vértices
	en el interior (e_i)	en las aristas (e_a)	
1	0	0	1
2	0	3	4
3	1	6	9
4	3	9	16
5	6	12	25
6	10	15	36

Después de una orientación similar a la que se hizo con el análisis de la familia PUV , se puede observar que la segunda columna del cuadro (el valor de e_i) está compuesta a partir del tercer renglón por *números triangulares*,⁸ es decir (y sin contar los primeros dos renglones), el m -ésimo renglón se obtiene sumando los primeros m números enteros positivos o bien $n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2)$; por lo tanto, los valores de esa columna se pueden calcular con $e_i = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. (¿Podría el lector determinar por qué se puede utilizar esta expresión? Se pueden utilizar fórmulas para calcular series.)

En cierta medida, es fácil observar que la tercera columna se puede calcular con la expresión $e_a = 3(n - 1)$. Además, observando la figura 11, se puede llegar a la conclusión de que la cantidad de vértices se obtiene con la suma de los primeros n números impares positivos, así que la última columna se puede calcular con n^2 .

⁸ El nombre de *números triangulares* se debe a que, si cada unidad se representa por un punto, cada uno de estos números se obtiene añadiendo una hilera de puntos de tal manera que siempre se pueden acomodar en arreglos triangulares cuyos lados tienen un punto más que en el caso del número precedente.

Así pues, la cantidad total de caras exagonales de un buckiedro de esta familia se puede calcular multiplicando la suma de los hexágonos en el interior de una cara y la mitad de los que están en las aristas por 20. Asimismo, para el número total de vértices (V) hace falta tan sólo una multiplicación.

Finalmente, la cantidad de aristas (A) se puede calcular con la fórmula de Euler, para así concentrar toda esta información en un cuadro como el siguiente:

n	Buckiedro	Caras exagonales (s)	Vértices (V)	Aristas (A)
1	$5^{12}-6^0$ (dodecaedro)	0	20	30
2	$5^{12}-6^{30}$ (figura 8)	30	80	120
3	$5^{12}-6^{80}$	80	180	270
4	$5^{12}-6^{150}$	150	320	480
5	$5^{12}-6^{240}$	240	500	750
...
n	$5^{12}-6^S$	$10(n^2 - 1)$	$20 n^2$	$30 n^2$

Regresando un poco al primer párrafo de esta sección, resulta evidente que el buckiedro $5^{12}-6^{110}$, mencionado en la sección “Construcción de los primeros poliedros”, no es ni siquiera el cuarto más pequeño, pues, si $n = 3$, en esta familia hay uno más pequeño.

CONSIDERACIONES PARA LAS CONSTRUCCIONES

Así pues, se pueden realizar los análisis de los buckiedros (esféricos) de estas dos familias, haciendo simultáneamente las construcciones con origami y las observaciones, diagramas, conjeturas, cálculos, etc., con algo de papel y lápiz.

Sin embargo, haremos a continuación algunas consideraciones sobre el procedimiento de construcción en sí, que pueden ser útiles para un docente que plantee estas actividades en clase.

Un punto importante es el cálculo del número de vértices de un buckiedro que se va a construir, pues éste determina el número de módulos necesarios. Para el caso del módulo triangular, la cantidad de piezas y vértices es la misma, pero para el caso del módulo PHiZZ no es así. En esta situación, hay que considerar que cada módulo toca dos vértices del buckiedro, pero que en cada vértice hay tres módulos; esto se puede poner a consideración de los alumnos para concluir que la cantidad de módulos necesarios se puede calcular multiplicando el número de vértices por $\frac{3}{2}$.

Por otro lado, existe la máxima en el origami de “no cortar, no pegar”, que se aplica comúnmente también en el origami modular y, de hecho, en el caso de los dos módulos expuestos aquí, se puede aplicar: ninguno necesita pegamento (mucho menos el PHiZZ), aunque, si se quiere que los buckiedros construidos con el módulo triangular puedan ser manipulados constantemente y sin el riesgo muy real de que se desarmen, entonces se podría considerar la conveniencia de pegar algunos de ellos (ninguno de los buckiedros cuyas fotografías aparecen en este trabajo tienen módulos pegados entre sí).

Para terminar esta parte, se ha de decir que comúnmente se recomienda que primero se hagan todos los módulos necesarios y luego se proceda a ensamblarlos. Sin embargo, y más si se trabaja con un grupo de alumnos, no existe impedimento de que se vaya construyendo el buckiedro a medida que se construyen los módulos. Algo muy importante que hay que tener en mente es que, invariablemente, los últimos módulos son los más difíciles de ensamblar y esto requiere habilidad manual y paciencia.

ALGUNOS COMENTARIOS FINALES

Se han presentado algunos análisis de un tipo de poliedro, utilizando como base una tecnología que es accesible a la mayoría de las escuelas y que permite no sólo el estudio de la geometría del espacio, sino también del plano. Estos análisis, con las actividades que se han descrito aquí, pueden ser aplicados en clase con alumnos de nivel medio principalmente, adaptándolas y proponiendo nuevas por parte del profesor.

Además, otras opciones muy interesantes quedan abiertas al “jugar” con el origami modular, por ejemplo:

- Determinar qué otros tipos de buckiedros se pueden construir, tanto esféricos como no esféricos, y estudiar sus simetrías. Un hecho que se va a descubrir es que para el caso de los *buckiedros no esféricos* resulta un poco inconveniente el uso del módulo triangular, pues su construcción obliga a que todas las caras del poliedro sean polígonos casi regulares (o regulares), mientras que el módulo PHiZZ es mucho más flexible para la construcción de caras exagonales y pentagonales no regulares.
- Determinar si todos los *buckiedros esféricos* pertenecen a las familias descritas anteriormente. Si no es así, se pueden buscar contraejemplos o métodos para su construcción en clase. Para ello, le recomendamos al lector (antes de usarlo en clase) mirar un poco la figura 12 y analizar la disposición de los diferentes tipos de caras.
- Determinar qué otros poliedros se pueden construir con los módulos expuestos. Hay que observar que no todos los poliedros en cuyos vértices concurren tres aristas (es decir, de grado 3) se pueden construir con estos módulos, debido al llamado *ángulo diedral*. ¿Podría, por ejemplo, determinar el lector si con los módulos triangular y PHiZZ se puede construir un cubo?, ¿qué modificaciones serían necesarias en la construcción de los módulos?
- Aprovechar las diferencias entre los buckiedros $5^{12}-6^{20}$ (el icosaedro truncado: $t\{3,5\}$, ilustrado en la figura 1b) y $5^{12}-6^{30}$ (véase la figura 9), que son el segundo y tercer *buckiedros esféricos* más pequeños, en el sentido de que uno es un poliedro semirregular y el otro no, a pesar de que ambos tienen un anillo de exágonos alrededor de cada uno de sus pentágonos. Éste puede ser un camino para estudiar las características de los poliedros se-

Figura 12 El *buckiedro esférico* $5^{12}-6^{60}$



mirregulares, lo cual incluye, por ejemplo, el desarrollo de definiciones jerárquicas.

- A partir del tamaño de los trozos de papel con que se hacen los módulos, determinar el tamaño de las caras y las aristas de los buckiedros construidos. Además, esto se puede ampliar (y hacer más complejo), calculando, por ejemplo, el diámetro de los buckiedros que se construyan, aunque esto requiere un poco más de conocimientos sobre poliedros y de trigonometría esférica.
- Se podría establecer con los alumnos relaciones entre la geometría del espacio, más particularmente los poliedros, con la teoría de gráficas, aprovechando los llamados *esquemas de Schlegel*.⁹

Estas actividades apuntan al desarrollo de habilidades de razonamiento, análisis y observación, así como al de actitudes positivas hacia la investigación, particularmente en campos abstractos como el de la matemática.

Conviene, por tanto, recalcar que toda propuesta en educación puede ser (o parecer) adecuada y eficiente en la medida en que *el profesor* muestre también una actitud adecuada. Finalmente, el origami es una tecnología (así como la regla y el compás o las microcomputadoras) que puede servir para enseñar o aprender matemática, y no constituye en sí el objeto de aprendizaje en el caso de actividades como las planteadas. Considero que el carácter de obsoleto de una técnica o de un conocimiento en la enseñanza de la matemática no lo proporciona su “edad” (el tiempo medido desde su desarrollo o descubrimiento hasta el momento), como han considerado varios profesores que defienden tecnologías o conocimientos específicos, sino que está determinado por otros aspectos como son su uso, aplicabilidad y las actitudes que demuestre el profesor al respecto (incluidas las actividades que desarrolle en el aula y la propia manera en que las aborde).

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la licenciada Noraisa González González por la ayuda prestada para la construcción de algunos de los modelos que aparecen fotografiados aquí y por sus útiles comentarios.

⁹ De hecho, para la demostración de la fórmula de Euler, se pueden utilizar estos diagramas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ansill, Jay y Mark Hill (1992), *Lifestyle Origami*, Estados Unidos, Harper Collins.
- Coxeter, Harold Scott MacDonald (1971), *Fundamentos de geometría*, México, Limusa-Wiley.
- Fusè, Tomoko (2000), *Unit Origami*, Estados Unidos, Japan Publications.
- Gurkewitz, Rona y Bennett Arnstein (1995), *3-D Geometric Origami: Modular Polyhedra*, Estados Unidos, Dover Publications.
- Kasahara, Kunihiko (2000), *Amazing Origami*, Estados Unidos, Sterling.
- Hilton, Peter y Jean Pedersen (1988), *Build Your Own Polyhedra*, Estados Unidos, Addison-Wesley.
- Hull, Tomas (2001), *Origami Mathematics* (sitio web) <http://chasm.merrimack.edu/~thull/OrigamiMath.html>. Visita: 27/09/01, actualización: 21/03/01.
- Larios Osorio, Víctor (2001), *Doblando la geometría* (sitio web) <http://www.uaq.mx/matematicas/origami/>. Visita: 29/09/01, actualización: 06/01.
- Plank, James S. (1996), *Penultimate Polyhedra*, Estados Unidos, Department of Computer Science, University of Tennessee <http://www.cs.utk.edu/~plank/plank/pics/origami/origami.html>.
- Wenninger, Magnus J. (1974), *Polyhedron Models*, Estados Unidos, Cambridge University Press.

DATOS DEL AUTOR

Víctor Larios Osorio

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México
vil@uaq.mx