Reflexiones sobre experiencias matemáticas de estudiantes de 3 a 5 años

José María Chamoso Sánchez, Christine Mitchell y William B. Rawson

Resumen: El artículo se centra en las destrezas matemáticas de estudiantes de 3 a 5 años. Para ello, se han considerado episodios reales de niños de esas edades. La reflexión sobre ellos permite observar que, cuando los estudiantes realizan actividades relacionadas con matemáticas, presentan un alto nivel de razonamiento que se puede favorecer por el estímulo y diálogo apropiado del docente. Esto permite concluir que, si se confía en sus capacidades, se podrá descubrir que son capaces de hacer mucho más de lo que se espera.

Palabras clave: destrezas matemáticas, nivel de razonamiento, infantil, constructivismo.

Abstract: This article focuses on the mathematical abilities of children from 3 to 5 years-old. Actual classroom incidents are considered. Reflecting on these allows one to observe that when these children engage in mathematical activities, they reveal a high level of reasoning ability that is extended by the teacher's appropriate interaction. This allows one to conclude that if one acknowledges these abilities, one discovers that they are capable of far more than what is expected.

Key words: mathematical abilities, level of reasoning ability, infantile, constructivism.

INTRODUCCIÓN

"Es indispensable que, cada día, todo enseñante comience su clase como si los conocimientos que propone a sus alumnos fueran descubiertos por primera vez en el mundo y como si este hallazgo fuera decisivo para el porvenir de la humanidad." Esta frase aparecía como lema de un curso para profesores de infantil, añadiéndose como única referencia que era de Jeremy Kilpatrick. Leerla mentalmente sugirió una pregunta interna: "¿No es lo que todo docente debe hacer cada día? ¿Por qué le dan una importancia especial en este curso?"

La reflexión personal posterior aclaró que esas palabras siempre son actuales y habría que tenerlas en mente todos los días antes de empezar las clases, porque de su cumplimiento depende gran parte del éxito de la enseñanza. Pero, ¿cómo se puede conseguir? Simulando como unos perfectos actores porque, en caso de que no sea así, quizás se estropee el plan del día e, incluso, la futura actuación docente durante el año. Esto puede ser exagerado pero, en una película, cuando el "bueno" tiene un caballo peor que el del "malo", un balazo en el brazo y el "malo" corre mucho pero no lo alcanza, ¿no dan ganas de abandonar esa visión, porque ya no parece real y tampoco se creerá lo que venga a continuación? Por eso el profesor no se puede arriesgar a que se descubra que no es un buen actor, sino que debe actuar de ese modo porque realmente lo cree así, de la forma más natural posible.

Este punto de vista es, posiblemente, más importante en las primeras edades, donde el descubrimiento cotidiano suele ser motivo de asombro constante, a partir del cual los niños empiezan a fraguar su pensamiento, formación y actuación futura. Hay que recordar que se trata de seres humanos en todo el sentido de la palabra, quizás con menos experiencia y conocimientos que los adultos y con más ingenuidad, pero capaces de realizar mucho más de lo que se puede suponer. Ese descubrimiento natural diario de cada persona es una de las bases del constructivismo.

Este artículo se preocupa por las destrezas matemáticas de los estudiantes de 3 a 5 años. Considerando el constructivismo como forma de aprendizaje, se estudian actividades que realizan los estudiantes a partir de sus propios intereses. Esas tareas de enseñanza serán auténticas si nacen de una necesidad personal. En ellas se observa que establecen regularidades, realizan predicciones, descubren patrones y desarrollan el entendimiento, es decir, establecen un determinado orden intelectual. Consideramos que ése es uno de los objetivos de las matemáticas.

EL CONSTRUCTIVISMO, UNA FORMA DE APRENDIZAJE

Recorriendo la variedad de estudios existentes y las distintas formas de conseguir la información, existen muchas teorías diferentes referidas a cómo aprenden los seres humanos. El desarrollo del conocimiento matemático se ha explicado en el marco de tales teorías. Por ejemplo, el behaviorismo se centra en los resultados del aprendizaje más que en cómo éste se produce (Thorndike, 1922). A partir de esta teoría, se han desarrollado medidas de actuación acordes con la rutina de la práctica y la recompensa (Gagné, 1965). Sin embargo, el behaviorismo es incapaz de explicar cómo una persona se convierte en un matemático creativo. La práctica mecánica y la recompensa pueden producir respuestas correctas y pueden cambiar la actuación, pero no aclaran, por ejemplo, cómo se producen relaciones dentro de un problema particular o cómo una persona construye el conocimiento. Para explicar por qué distintas personas construyen significados diferentes a partir de la misma experiencia, está la teoría constructivista del desarrollo de Piaget (Piaget, 1972). Sus ideas hicieron que florecieran una gran variedad de teorías constructivistas de aprendizaje.

Frente al empirismo y racionalismo tradicionales, Piaget (1971, 1977) situó la fuente del conocimiento en la relación interdependiente entre el sujeto que conoce y el objeto de conocimiento, dentro del contexto social en que se enmarca. Así, el estudiante modifica sus esquemas internos para acomodarlos al medio, a la vez que transforma las estructuras externas para ajustarlas a dichos esquemas. De este doble proceso de asimilación y acomodación resulta una construcción personal, de manera que cualquier nivel de conocimiento, individual o científico, siempre es una reorganización del anterior. De esta manera, la construcción se convierte en algo evolutivo que nunca se concluye.

Ello se complementa con las consideraciones de Vygotsky (1977, 1979), quien señaló que, a diferencia de la adaptación animal, la humana está determinada por una configuración sociohistórica del medio (de "fuera a dentro"). Es decir, la escuela de Vygotsky tiene en cuenta la mediación del contexto social de modo que el individuo se apropia de los conocimientos que existen, como herencia cultural, en la realidad en que se desenvuelve (Tudge y Rogoff, 1995). Y, después de esa apropiación, se realiza una adaptación de los nuevos elementos al propio conocimiento del sujeto (tal proceso puede ser definido como "la reconstrucción interna de una operación externa" (Vygotsky, 1979, p. 92).

Existe una creciente cantidad de investigaciones en diversos países del mundo referidas a la relevancia de lo social en el aprendizaje de las matemáticas (por ejemplo, Ernest, 1991). Aunque algunos investigadores han coincidido en que fijar el objetivo del conocimiento como un sistema social olvida la búsqueda del pensamiento individual de cada estudiante, realmente no debería ser así, sino que se debe mantener este foco, pero teniendo en cuenta el contexto social como elemento que influye en el aprendizaje de las matemáticas. Es decir, se considera el individuo pero entendido dentro de un grupo. Por ello, hay que poner énfasis en la negociación como algo más esperanzador que la tradicional interacción del "paso a paso" controlada por el profesor. Porque en clase de matemáticas no sólo se aprenden matemáticas, sino también a negociar con un experto, el docente, que debe permitir que el estudiante siga diversos caminos de la misma manera que, como ciudadano, tendrá que hacer frente a diversos problemas que no tendrán un único camino o solución exacta, o que lo harán tomar una decisión que difiera de la del experto. El diálogo que mantengan permitirá entender el sentido que sigue la instrucción, lo que ayudará al profesor a intervenir de manera adecuada (Chamoso, 2000).

Cuando Wheeler (1993) examina la dicotomía de si se inventa o se descubre, también describe el conocimiento matemático. Sugiere como respuesta que "las matemáticas son, a la vez, inventadas y descubiertas" (p. 89). El contraste existente entre invención y descubrimiento hace pensar en un antagonismo entre las teorías del constructivismo y el platonismo pero, en lugar de contraponerlas, Wheeler considera que las matemáticas tienen algo muy especial: el discurso humano. Según Wheeler (p. 89), es "la clave que permite que el pensamiento crezca de manera que esa conversación lleva consigo más pensamiento y así sucesivamente". De esta manera, también se concede importancia a la relación horizontal educando-educando en un sistema en el que la interacción profesor-alumno se ha considerado como la más decisiva para el logro de los objetivos educativos.

Ese aprendizaje, donde el conocimiento debe ser construido por el estudiante a partir de la activación, combinación, modificación y crítica de elementos conocidos dentro del contexto existente, contrasta con el tradicional, donde el conocimiento suele ser transmitido por el profesor o el libro de texto. El primero debe mejorar al segundo pues, a diferencia de los objetivos mecanicistas y repetitivos de muchos libros de texto, permite trabajar modelos significativos que puedan enlazarse con símbolos y posibiliten construir modelos de manera directa (Baroody, 1990). Cuando se observa a los estudiantes en ambientes constructivistas, en los que se permite construir ideas matemáticas desde cada situación, es posible darse cuenta de que formalizar matemáticamente se puede conseguir casi a cualquier edad (por ejemplo, Carpenter *et al.*, 1993). Ello contrasta con la rigidez que marcan los currícula oficiales de algunos países que, por ejemplo, señalan que el objetivo de una cierta edad es conocer hasta un número determinado. El mundo en el que vivimos, que es para el que se pretende formar a esas personas, no tiene el conocimiento delimitado de esa forma tan estricta.

Para ello es importante el trabajo de los profesores como facilitadores del aprendizaje de los estudiantes (NCTM, 1991a, 1991b, 2000). Deben ser conscientes de que es necesario dejar pensar a sus alumnos, permitirles hablar y opinar. Cuando los escuche, se dará cuenta de la originalidad de su pensamiento y de los diversos caminos en que razonan para entender y dar sentido a las matemáticas. Esto también ayudará a que comprendan que los estudiantes tienen diferentes visiones de un mismo mundo que los rodea.

Existen muchos trabajos con niños de esas edades en diversos sentidos, pero la mayor parte de ellos se centra en contenidos concretos como, por ejemplo, estudio de la relación parte-todo cuando se ha producido un cambio (Fisher, 1990; Irwin, 1996), independencia del resultado en relación con la forma de conseguirlo (Baroody, 1993), adiciones mentales de una cifra (Baroody, 1989), conocimiento de fracciones (Hunting y Sharpley, 1988; Payne, Towsley y Huinker, 1990), habilidad para estimar (Baroody y Gatzke, 1991), conceptos geométricos (Clements *et al.*, 1999), problemas discretos de redistribución (Davis y Pepper, 1992), resolución de problemas (Schroeder y Lester, 1989; Worth, 1990), importancia de la cooperación (Wiegel, 1998). Desde nuestro punto de vista, existen pocos trabajos en que el foco más importante sea una enseñanza constructivista (salvo algunos autores aislados como Kamii, 1984, 1994, por ejemplo), entendiendo con ello que al estudiante se le deja trabajar libremente y, a partir de ello, se observa su comportamiento.

EPISODIOS DEL AULA

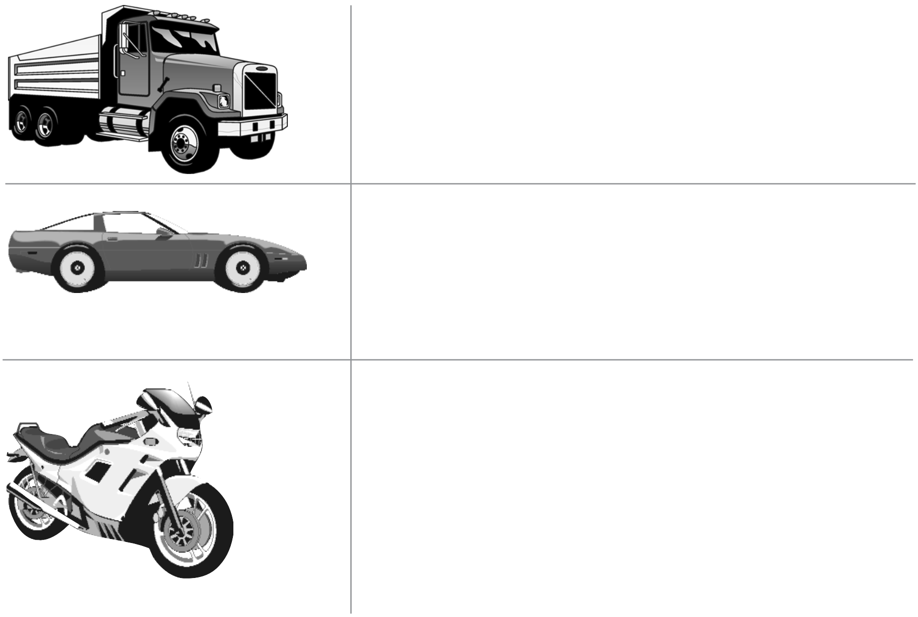
A continuación, se presentan diversos episodios extraídos de situaciones reales. Se han tomado de la práctica diaria de los autores, de su propia aula o del trabajo de compañeros cercanos, a fin de estudiar las reacciones de los jóvenes estudiantes cuando desarrollan actividades. Son experiencias en las que se observa que el desarrollo de su propio pensamiento puede dar oportunidades al docente para ayudarlos en diversos contenidos matemáticos. Y es porque consideramos que, en esos pensamientos, subyacen matemáticas.

EPISODIO 1

Como ocurre cada cierto tiempo, un niño de 4 años ha estado a punto de ser atropellado en las cercanías del centro. A pesar del interés de padres y profesores, parece inevitable que un pequeño descuido pueda ser preludio de una tragedia. Por eso, se intenta que los propios estudiantes sean conscientes del peligro que los vehículos pueden llegar a suponer. Muchos docentes aprovechan sus clases para recordarlo de manera directa o para organizar actividades que lo hagan de manera indirecta. La profesora de infantil intenta ser creativa y considera que es escasamente productivo repetir lo mismo muchas veces. Por ello piensa que es preferible desarrollar alguna actividad para que los alumnos observen la gran cantidad de vehículos existente. Ésa es la razón por la que pide que cuenten los camiones y coches que pasan por la avenida, a fin de que organicen la información que reciban y realicen una clasificación.

Pero la docente está convencida de la necesidad de desarrollar una enseñanza que ofrezca oportunidades a los estudiantes para que construyan su propio conocimiento. Por tanto, entrega a cada niño una hoja doble de papel con un cuadro que tiene, en el lado izquierdo, dibujos de un camión, un coche y una moto (Ernest y Rawson, 1995). El objetivo es que los alumnos vayan dibujando palotes para señalar cuando pasa alguno de ellos (figura 1). Es decir, algo similar a lo siguiente:

Figura 1 Plantilla para anotar los vehículos que pasan



Según el concepto de algunos docentes, ésa sería una típica clase constructivista en contraposición a una típica clase magistral. La maestra se siente orgullosa. Pero, realmente, ¿dónde está la construcción? Los estudiantes están haciendo lo que les han dicho y como les han indicado. ¿No es más bien una enseñanza dirigida, aunque desde un punto de vista diferente al tradicional? Distinto sería que ellos organizaran la información de la manera que les pareciera conveniente, con ayuda de sus compañeros y donde el profesor se mantuviera al margen. Para ello utilizarían sus propios signos, los cuales tendrían que explicar posteriormente.

Supongamos que están desarrollando la actividad mencionada con un cuadro como el anterior. ¿Qué ocurriría cuando surja algo no previsto? Por ejemplo, si aparece un autobús, que no tiene espacio asignado, ¿qué deben hacer los estudiantes? Los que están acostumbrados a pensar por sí mismos puede que traten de solucionar el problema de la manera que les parezca más adecuada como, por ejemplo, incluirlo en el espacio inferior que ha quedado vacío. Pero, ¿y si aparece una bicicleta? ¿También lo incluirán ahí? Unos chicos lo harán así y otros no, pero lo decidirán los propios estudiantes, ya sea personalmente o después de llegar a un acuerdo entre ellos.

En cambio, en otras ocasiones los alumnos esperan la respuesta del profesor para saber qué tienen que hacer. El docente piensa que, si cada estudiante lo hace de una manera diferente, se armaría un gran desbarajuste. Por tanto, cuando pasa un autobús delante del colegio y se da cuenta de que los niños pueden encontrar dificultades para realizar la tarea asignada, detiene el desarrollo de la actividad para reorganizar cómo hay que realizarla. Se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué es lo que se pretende? Cuando surge una dificultad, siempre es importante pensar qué se quiere conseguir. Si se está enseñando educación vial con el objetivo de que los estudiantes sean responsables y tengan cuidado cuando la puerta del colegio se abre, quizás sería aconsejable que, en la parte inferior del cuadro, se incluyeran todo tipo de vehículos distintos de camiones, coches y motos. Por tanto, eso es lo que dice a los alumnos. Está contento. Los estudiantes están haciendo unos trabajos muy buenos, organizados y ordenados. Pero se mantiene la pregunta: ¿Dónde está la construcción? Se trata de una construcción dirigida, siguiendo las indicaciones externas del profesor.

Supongamos que personas adultas tuviesen que organizar esa información. Es de esperar que todos serían capaces de hacerlo pero, seguramente, cada uno lo haría de una manera distinta. Entonces, ¿por qué ese empeño en señalar a los estudiantes un único camino de solución cuando desarrollan una actividad?, ¿por qué no se confía en que serán capaces de resolver los problemas que surjan de manera adecuada para poder seguir adelante?, ¿cuál puede ser el objetivo de conseguir unos bonitos cuadros ordenados o conocer que han pasado 23 camiones, 43 coches y 16 motos? Habría que dar más importancia al cómo que al qué si el objetivo es la formación de la persona.

Episodio 2

Observemos el trabajo de varios niños de 3 y 4 años cuando construyen diversos números (figura 2). El observador externo se queda perplejo: "Jonathan escribe el 3 al revés". "¿Dónde está el 9 de José?" La reacción inmediata es corregir el 3 del primero y explicarle al segundo cómo se escribe el 9. Pero que lo hayan hecho de esa manera tendrá una explicación. Por tanto, quizás sería preferible preguntar por qué lo hacen así para que ellos mismos descubran cómo está correcto. "¿Cómo

Figura 2 Números hechos por niños de infantil

Jonathan: 4 años, "pero tendré 4 el jueves"

"Yo sé como es un 3"

"Sé qué es un 4, pero no puedo escribir elefante. Por ello dibujaré uno".

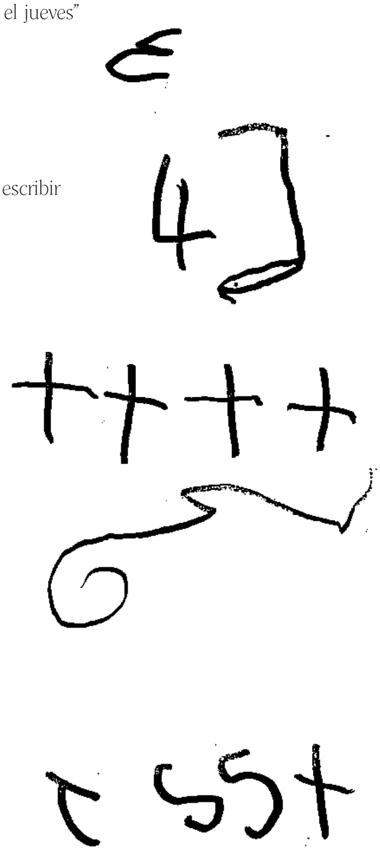
José, 4 años:

"Esto significa 4 (pero no 4 elefantes)"

"Yo conozco un número muy grande, que llaman 9"

Jessica, 3 años:

"Esto significa 3 elefantes"



entiende Jonathan un elefante?" Seguro que ese dibujo tiene su razón de ser. En general, lo que los niños dicen no es lo que escriben ni lo que manipulan ni lo que dibujan. Por tanto, hay que escucharlos. Puede ser que Jonathan haya expresado aquellos aspectos que más le llamaron la atención cuando vio un elefante o lo que más recuerda de él, que quizás sea la trompa. O puede ser otra cosa.

Episodio 3

Una maestra explica lo que ocurrió en su aula con un niño de 4 años y 11 meses cuando éste se le acercó y le dijo (Rawson, 1992):

Tomás: Quiero hacer un calendario de Adviento. ¿Me puedes ayudar?
Maestra: ¿Cómo quieres que sea tu calendario de Adviento?
Tomás: Quiero que se parezca a una casa.
Maestra: De acuerdo. ¿Qué material vas a necesitar? Haré una lista para que podamos conseguir lo necesario.
Tomás: Necesito cartón, lápices de colores y cintas.

La maestra hizo la lista. Después de conseguir lo que quería, Tomás se dispuso a recortar el cartón de la forma que deseaba. Para ello solicitó la ayuda de la maestra. Posteriormente escribió 1 y 24. Sabía que 24 era el día de Nochebuena. La maestra sentía que Tomás tenía una cierta idea de los números que había que escribir entre 1 y 24. Empezó escribiendo 3 o 4 números de cualquier manera, sin ningún orden, y pidió a la maestra que los colocara para él. Todo esto sucedió en la tarde de un viernes. Cuando volvió el lunes siguiente continuó su trabajo enseguida y escribió, rápidamente y de manera ordenada, todos los números hasta el 20.

Tomás: Ahora dos... y cero.
Maestra: Ése es el veinte. Ya no quedan muchos. Tienes puesto el 24. ¿Sabes cuántos faltan?
Tomás: (contando con los dedos y sosteniéndolos en alto): 21, 22, 23, 24. Necesito tres más.

Tomás se mostró jubiloso. Unos minutos después...

Tomás: Terminé. Pero... No hay ningún dibujo debajo de los números.
Maestra: Eso es lo siguiente que hay que hacer, Tomás. ¿Qué vas a dibujar?
Tomás: Árboles de Navidad.

Un poco más tarde...

Tomás: Oh, mira. El número 6 está muy alto y es demasiado ancho.
Maestra: No te preocupes, Tomás. Podrías poner otra puerta pequeña a su lado que lo tapara, como si fuera la puerta de un establo.

La reflexión de la maestra sobre el trabajo realizado por Tomás parece resumir las ventajas de conceder oportunidades a los estudiantes para desarrollar su pensamiento: "Volví a equivocarme. Actué espontáneamente para apoyar a Tomás, porque tenía mucho interés en lo que estaba haciendo y necesitaba una pequeña ayuda. Pero el trabajo que hizo confirma mi idea sobre el desarrollo del pensamiento matemático en los chicos de infantil: Trabajan con números más grandes que los que suponía, controlan su propio aprendizaje, consiguen realizar una tarea de manera sostenida, muestran persistencia para desarrollar su trabajo, tienen una motivación personal, demuestran conocimiento espacial, utilizan vocabulario apropiado y, ¡probablemente más!"

Episodio 4

En otra ocasión, a la clase en la que estaba Tomás se llevó una gran caja en forma de cubo de aproximadamente dos metros y medio de lado (Rawson, 1994a). Parecía una piscina sin agua, por lo que los estudiantes la llamaban "piscina de pelotas de goma". Por las cercanías había varios sacos con pequeñas pelotas de goma de colores. Los niños estaban emocionados. La maestra hizo una pregunta: "¿Cuántas pelotas son necesarias para llenar la piscina?". Después de una discusión, enseguida se aceptó el acuerdo general de que el número debería ser grande. "Realmente un número grande", según uno de los miembros de la clase. Intentando precisar un poco más, cada uno dio una respuesta en su turno. Con el diálogo posterior, llegaron finalmente al acuerdo de cuál era el número grande. La maestra comentó el resultado con un compañero:

Maestra: ¿Sabes cuál era el número grande? ¡9! ¡9 pelotas de goma!

Maestro: Es decir, ¿9 era el número grande? Nunca lo habrías supuesto, ¿no? Nunca habrías imaginado que, para ellos, 9 es un número grande.

Maestra: Realmente no lo había pensado porque, si lo hubiera hecho, quizás se me habría ocurrido esa posibilidad.

Maestro: Fíjate lo importante que es, para un docente, saber escuchar cuidadosamente a sus alumnos para conseguir entender el desarrollo del entendimiento. Y saber preguntar de manera adecuada. ¿Cómo les explicaste que estaban equivocados?

Maestra: Dije: "Vamos a ver cuántas bolas se necesitan para llenarla". Y lancé una al interior del recipiente. Posteriormente otra, lentamente, y así sucesivamente mientras todos coreábamos: "Una, dos, tres...". Pero según decíamos 8, acercándonos al 9, varias voces dijeron: "Es mucho más que 9. Se necesitan muchas más bolas para llenar la piscina".

Maestro: Es curioso. Existen muchas maneras de poder adentrarse en el tema de la magnitud de los números.

Maestra: Fíjate lo que pasó después. Cuando la piscina estaba completamente llena, hasta el borde, un niño se precipitó en el interior lo que hizo que varias pelotas se cayeran fuera. Posteriormente lo hizo otro y salieron otras 4 o 5 pelotas.

Maestro: De ese modo se dieron cuenta de que los cuerpos ocupan lugar y, si entra un cierto volumen, tendrá que salir otro.

Maestra: Exactamente.

Maestro: Pero, ¿explicaste el principio de Arquímedes a tus estudiantes de infantil?

Maestra: Claro. Al ver lo que estaba pasando busqué cajas similares a las de zapatos. Con ayuda de sus padres, conseguí una para cada alumno. Al día siguiente cada niño tenía su propio estanque que rellenó con pelotitas de papel. De esa manera, cada uno pudo observar lo que ocurría al meter un oso, dos osos, tres osos... Entre ellos comentaron lo que ocurría, según su contexto.

Maestro: También se puede preparar un estanque con agua y ranas que estén fuera. Cuando una rana salta al agua, la altura de ésta sube. ¿Por qué ocurre eso? Porque la rana pesa. Se presenta la misma situación anterior.

Maestra: Pero, ¿son capaces los niños de ver que ambas cosas son la misma? ¿Tú crees que se les debe explicar esos contenidos a esas edades?

Maestro: Si se pregunta a adultos cuál es el principio de Arquímedes, muchos no sabrán qué responder. Otros dirán: "espera, espera, que me lo sé. Todo peso sumergido en un fluido experimenta... ¿cómo seguía?". ¿No crees que es más fácil recordar las pelotas de goma, los ositos o las ranas? Eso no se olvida nunca y realmente es la misma teoría de Arquímedes.

Episodio 5

En un determinado día, una maestra, sentada con un gran libro sobre su regazo, pasaba lista y acompañaba cada contestación de "presente" de cada niño con una marca en la página correspondiente. La docente observó que la niña situada a su izquierda también había anotado a los estudiantes que estaban en el aula (figura 3). Entonces, quiso comprobar si ambos datos coincidían y pudo observar que la alumna entendía el proceso que se estaba desarrollando. Por tanto, a partir de una actividad real y por medio de la observación de un hecho que se repetía frecuentemente en el aula, la estudiante pudo experimentar y comprobar que la forma escrita también es algo que puede servir para comunicar. En la figura se puede observar cómo utiliza una notación matemática para representar sus ideas (Rawson, 1994b).

Algo parecido es lo que quiso hacer Daniel, de 4 años (Rawson, 1994b). Acababa de realizar su primer viaje en metro y estaba emocionado. El maestro se enteró de su aventura y le pidió que contara sus experiencias. La figura 4 es el resultado. De una manera simbólica, sin ayuda de nadie, Daniel hizo una representación de su viaje. Esa imagen muestra los primeros pasos hacia el simbolismo de las matemáticas. Esconde una mente alerta, preparada para razonar e inter-

Figura 3 Anotaciones de los estudiantes que estaban en el aula

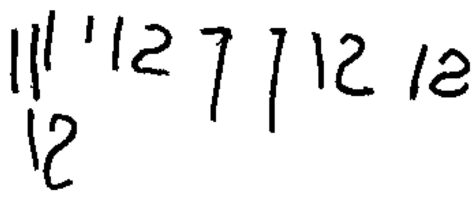
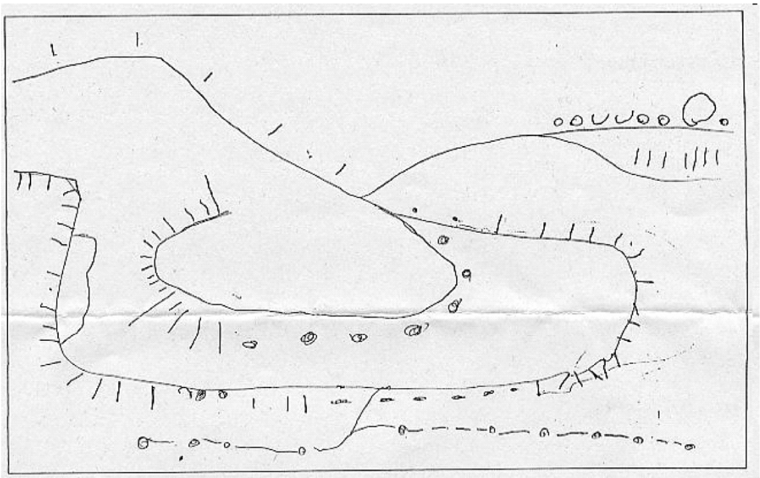


Figura 4 Dibujo de David de lo que recordaba de su viaje en el metro



pretar el mundo en el que vive. Daniel explicó su significado de la siguiente manera: "Estaciones viejas, estaciones donde pasan determinados Metros, estaciones nuevas, estaciones que se tienen que construir, líneas terminales".

ACTIVIDADES AUTÉNTICAS DE ENSEÑANZA

Se han presentado una serie de episodios que invitan a reflexionar en diversos sentidos. Por ejemplo, en el episodio 1 se muestra una actividad con dos maneras distintas de llevarla al aula. La diferencia fundamental entre ambas maneras de actuar es el comportamiento del docente. En un caso, se mantiene al margen, mientras que, en el otro, dirige completamente la enseñanza de modo que el trabajo estará mal hecho si no se desarrolla de la manera indicada. Un aspecto importante que las distingue es la confianza en la actuación de los estudiantes. Muchas veces se considera que no son capaces de realizar la tarea por ellos mismos y la realidad es muy distinta: lo hacen siempre que se les den posibilidades. Pero ello conlleva un riesgo, pues el docente no puede tener preparada la respuesta de antemano.

Esa confianza en los estudiantes puede animar a actuar de una determinada manera ante su trabajo, tratando de entender lo que hacen y, sobre todo, escuchándolos (episodio 2). Seguro que tiene un sentido, especialmente si lo han realizado a partir de un interés personal (episodio 3). Es muy probable que ellos mismos sean capaces de resolver sus dudas y superar sus dificultades, siempre que se les dé la oportunidad de hacerlo (episodios 4 y 5), aunque el docente tiene que cuidar que no confundan la anécdota con la actividad científica para que no se produzca el efecto Jourdain (Brousseau, 1997).

Actividades de este tipo surgen constantemente de manera espontánea, aunque también es labor del docente favorecer que esto ocurra. Para ello, él también tiene que tener confianza en lo que hace. Por ejemplo, imaginemos a los niños de una clase de 5 años sentados en círculo mientras la maestra cumple su diaria costumbre de "pasar lista". Esos momentos se pueden aprovechar para resolver problemas numéricos de modo natural: "Hay presentes 7 muchachos y 6 muchachas. ¿Cuántos chicos hay más que chicas?" O realizar clasificaciones con diversas excusas, cómo comprobar si todos están en clase; cuántos están ausentes; quiénes se quedan a comer; quiénes llevan bocadillo; quiénes tienen jersey, abrigo o plumífero de un determinado color; cuál es el número anterior y posterior de esta página; cómo contamos las escaleras cuando las subimos y cuando las bajamos; qué hacemos cuando repartimos los caramelos entre los amigos y no hay para todos... (Rawson, 1994a).

Estas actividades, extraídas de sucesos de la vida de estudiantes de infantil, las llamaremos "actividades auténticas", porque tienen un objetivo, son coherentes y son significativas. Son "prácticas ordinarias de nuestra cultura" (Brown, Collins y Duguid, 1989, p. 34). Desarrollar ese tipo de actividades en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas permite que los alumnos resuelvan los problemas de maneras muy variadas. Pero, en cualquier caso, la autenticidad se produce cuando se percibe una necesidad personal.

Las actuales teorías constructivistas de aprendizaje defienden que, cuando las personas reciben nueva información, utilizan su experiencia y el conocimiento para dar sentido a ese nuevo material. Es posible interpretar los anteriores episodios del aula desde esta perspectiva. Por ejemplo, la imagen de la aventura de Daniel en el Metro esconde inferencias del conocimiento de sus trenes de juguete a las vías férreas, estaciones y terminales de línea de su nueva experiencia de vida. Es decir, partiendo del conocimiento que posee, elabora nueva información y nuevo material. Posteriormente, su diálogo con uno de los autores de este artículo hizo que reformulara dicha información y reestructurara su conocimiento para acomodar las características diferentes de las vías férreas y del Metro.

El dibujo es un instrumento de expresión muy importante para los estudiantes de estas edades. Les gusta hacerlo y no suelen tener el sentido del ridículo de muchas personas adultas. Los niños reflejan el mundo como lo ven y sus trabajos permiten descubrir gran cantidad de cosas de las que son conscientes. Por ejemplo, a una persona que ven grande la dibujarán enorme, resaltando aquellos rasgos que más le llaman la atención, mientras que al que ven pequeño lo dibujarán todavía más reducido.

Debido a que la construcción del conocimiento es un proceso cognitivo interno, es necesario descubrir indicaciones externas que reflejen que se está desarrollando dicha construcción. Los sucesos elegidos apoyan la creencia de que el conocimiento es, en parte, un producto de la actividad, el contexto y la cultura en las que se desarrolla. Por tanto, cada concepto evolucionará, dependiendo de la situación en la que se utilice. Por ejemplo, los esfuerzos de Tomás para relacionar cada puerta con un número en el calendario de Adviento da lugar a situaciones nuevas y actividades alternativas negociadas. El papel del adulto en este proceso es importante. Las palabras que se utilizan también son conceptos en desarrollo. Son conceptos abstractos en sí mismos y el entendimiento de su significado es posible en el contexto en que se emplean. El caso de la niña que relaciona la palabra "presente" con una representación simbólica cuando se pasa lista demuestra cómo se pueden desarrollar conceptos a través de una actividad.

Brown, Collins y Duguid (1989, p. 34) comparan el trabajo de los expertos con muchas de las actividades que se desarrollan en las aulas:

> En las aulas escolares se desarrollan actividades híbridas que se presentan como trabajos o aspectos importantes de escritores, lectores, matemáticos, historiadores, economistas, geógrafos... Pero, realmente, muchas de ellas no tienen sentido fuera del aula ni se pueden asociar con actividades de estos expertos. Y, lo que es más, estas actividades híbridas limitan el acceso futuro de los estudiantes a las posibilidades educativas que existen a partir del contexto.

Esta fuerte declaración debe hacer reflexionar a cada docente sobre su propia práctica diaria en el aula, cualquiera que sea el nivel. Enseñamos matemáticas, pero nos preguntamos: ¿lo hacemos con el pensamiento marcado por las características de un matemático profesional? Para poder responder a esa pregunta, hay que definir qué constituye el pensamiento y la actividad de un matemático.

UN ASPECTO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA: EL ESTUDIO DE PATRONES

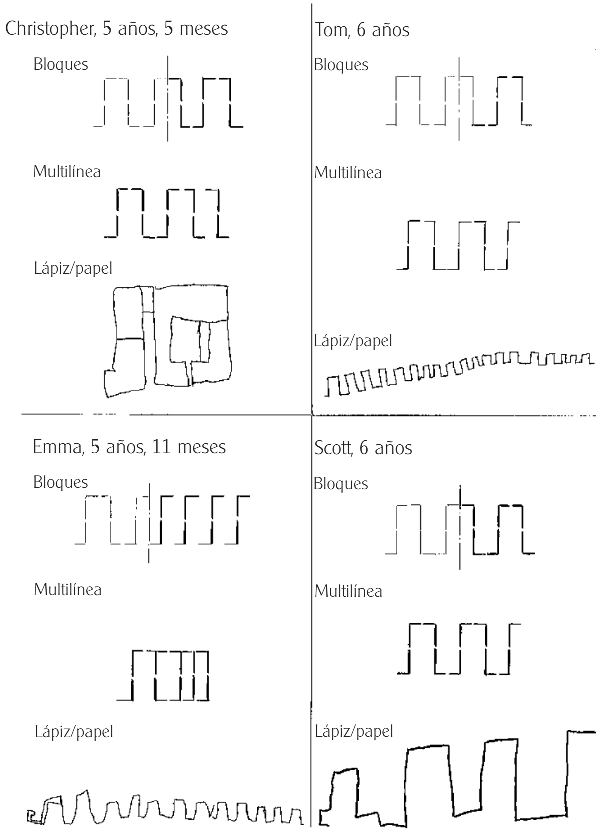
Descubrir un modelo es un elemento importante cuando se resuelven problemas. Sin embargo, es sumamente difícil entender cuál es el proceso de elaboración de un modelo y cómo se reconoce o entiende. Existen muchos estudios relacionados con ese reconocimiento que han acercado posturas teóricas sobre percepción como, por ejemplo, los análisis de la psicología de la Gestalt.

Llegar a realizar un modelo es el resultado de un proceso mental complejo ante una interrogación matemática. Sawyer (1959) considera que éste es un elemento importante que favorece su fascinación hacia la materia. Piensa que la matemática es la clasificación y estudio de todos los posibles modelos. Este término se utiliza de una manera en la que no todas las personas estarían de acuerdo, pues se entiende en un sentido amplio para cubrir cualquier tipo de regularidad que pueda ser reconocida por la mente. De hecho, dice que "los buenos matemáticos son muy sensibles a modelos".

Según lo anterior, se sugiere observar a los niños de las primeras edades cuando trabajan con modelos. *A priori,* les llama la atención su lado artístico, pero es llamativo que exista tanta diferencia entre mirar y comprender lo que se ve. Son muchos los signos que compiten para atraer la atención de cualquier observador, pero lo que vemos y cómo lo vemos no sólo depende de factores psicológicos y fisiológicos, sino también de las fluctuaciones en la intensidad de la luz y de las variaciones en la posición de los objetos dentro del campo de visión existente. Por ejemplo, motivos aislados invitan a un intenso escrutinio de su estructura. En cambio, cuando el motivo se repite, se pierde su individualidad y dominan nuevas características.

Los niños de 3 a 5 años tienen su percepción de modelo. Entendemos que ese término tiene connotaciones distintas en el campo de la educación matemática, pero nos referimos a aquello que se repite en un patrón, o más ampliamente, a una regularidad. En los siguientes casos, se trabaja con materiales concretos organizados para que los estudiantes descubran el proceso por el que se ha construido. La actividad consiste en representar la parte superior de las murallas de un castillo. Primeramente, el profesor lo construyó con bloques de madera y los niños tenían que continuarlo con otros bloques. Posteriormente, en lugar de los bloques de madera tenían que usar cubitos de plástico para extender la muralla. Finalmente, tenían que dibujar el modelo de muralla. En los cuatro ejemplos que se presentan se pueden ver diferentes representaciones con tres materiales

Figura 5 Diversas representaciones de la muralla



distintos (figura 5). Por ejemplo, las construcciones con madera de Emma indican que no entendía el proceso de construcción, pero su dibujo posterior muestra que realmente sabía continuar el modelo. Christopher fue capaz de construir la muralla con cubos de plástico, pero no parecía que supiera dibujarla. Pero este caso demuestra la importancia de dialogar para entender el trabajo, pues escucharlo permitió comprender las dificultades que encontró para ello. ¡La razón es que intentaba realizar un dibujo en perspectiva! El modelo de una muralla de un castillo necesita una representación muy distanciada y abstracta del original (Rawson, 1990).

Por ejemplo, los módulos o hierros de un radiador, ¿son un patrón? Muchos piensan que sí, porque es la misma estructura repetida muchas veces. Otros que no, porque los extremos estropean la similitud o porque todos son iguales y consideran que modelos son seriaciones (por ejemplo, cuadrado, triángulo, cuadrado, triángulo, cuadrado, triángulo...). Por tanto hay que entender lo que ellos piensan o creen. Y hay que escucharlos, porque hay mucha diferencia entre lo que creemos que dicen y lo que realmente dicen.

Vamos a examinar un contenido concreto con más detalle. Como hemos dicho, nos referimos a patrones cuando es posible identificar la repetición de un motivo, pero esto no es tan fácil con niños de esas edades. Se presentó papel de envolver coloreado con imágenes de Papá Noel a un grupo de 17 alumnos de 5 años y sus opiniones fueron diversas. Algunos consideraron que era un patrón, porque "es rojo, blanco y amarillo", "una cara está así y la otra en dirección diferente", "todo es lo mismo", "un Papá Noel mira en esta dirección y el otro en aquélla". En cambio, otros pensaron que no era un patrón, porque "todo es lo mismo", "es simplemente un rectángulo", "no tiene modelo".

Durante tres semanas se mantuvieron entrevistas con los 17 niños que hablaron de patrones a partir de 15 estructuras diferentes. Sus opiniones permitieron establecer sus concepciones acerca de su significado. Consideraron que se podían clasificar como sigue: *1*) repetición de un motivo, *2*) simetría, *3*) color, y *4*) el borde del objeto. Es importante observar que muchos de los modelos espaciales y lineales sugeridos para construir contenían un aspecto de cambio como, por ejemplo, triángulo, rectángulo, triángulo, rectángulo (dibuja lo que sigue); rojo, azul, rojo, azul.... (¿qué color va a continuación?). Ello tuvo un efecto importante en su pensamiento acerca de qué es o no un patrón. Sin embargo, no se puede olvidar que, por ejemplo, una transformación de la misma figura o motivo también lo es. Así, poco a poco, aprenden a clasificar cada día, utilizando ejemplos de situaciones diferentes. Lo importante no es qué se hace, sino cómo se hace. ¿Serán capaces de hacer esto los chicos de edades de infantil? Naturalmente que lo son, siempre que se les deje, aunque quizás no hagan tanto como se desearía. Pero lo mismo nos ocurre a los docentes.

ALGUNAS REFLEXIONES

De los ejemplos citados, se puede comprobar que los niños piensan de manera diferente a como lo hacen las personas mayores. Su pensamiento suele ser inmaduro, pero, a la vez, normalmente complejo. Suele estar influido por el contexto en el que se aprende. El razonamiento matemático se empieza a desarrollar cuando su pensamiento se estructura a través de la interacción con compañeros y adultos. Esa interacción social depende de cómo éstos perciban las capacidades de cada persona, lo que influirá en la manera en que los niños organicen sus experiencias. El pensamiento del docente también es importante, pues sus expectativas, su incremento en la consecución de objetivos y sus normas de educación desempeñan un papel fundamental en el proceso de aprendizaje (Mitchell y Williams, 1998).

La respuesta de los jóvenes estudiantes en los sucesos seleccionados ilustran el conocimiento, las destrezas y el entendimiento que poseen cuando entran a la escuela. Indican que ya son pensadores matemáticos. Estos ejemplos muestran posibilidades para operar con símbolos, trabajar con números, interpretar conceptos espaciales y generalizar resultados matemáticos. Todos los niños que aparecen utilizan matemáticas de alguna manera antes de que éstas surjan explícitamente. En este escenario, el profesor tiene que centrarse más en lo que se puede hacer con el niño que en lo que no debe hacerse, aunque no es fácil conseguirlo.

Recordamos la cita de Kilpatrick de la introducción para añadir que, para cada docente, es importante ver cómo trabaja cada estudiante y, sobre todo, saber responder en cada momento de la manera adecuada. Sin embargo, a veces se oye en las aulas de secundaria (12-16 años) o, incluso, de primaria (6-12 años): "Olvidad todo, pensad que no sabéis nada y empezaremos de cero". No parece oportuno echar la culpa a los profesores de cursos previos y, en vez de intentar olvidar los conocimientos que se tienen, quizás se podría intentar aprovecharlos para partir de ellos.

Los profesores de infantil tienen la oportunidad de aprovechar los múltiples y diferentes conocimientos de cada alumno que entra en sus clases por primera vez. Los niños de esas edades están encantados de hacer cosas cada día y van contentos al colegio, se muestran abiertos y dispuestos a trabajar. Si visitamos cualquier aula de infantil, es probable que encontremos un ambiente vivo y expectante ya que, a esas edades, los niños suelen serlo. Los docentes deben ser conscientes de ello, para que, por ejemplo, existan los típicos rincones en los que, cada estudiante, cambia de sitio cada semana: en uno de ellos estará la entrada de la puerta del médico, la sala de espera, utensilios de médico, un teléfono, papel para apuntar... Así los niños juegan, fingen que son médicos, pacientes, la mamá, la enfermera, llaman por teléfono para concertar una cita y piden hora como lo han visto hacer a sus padres o, al menos, lo ha visto alguno de ellos. Otra semana simulan un banco donde hay carteles con números muy grandes colgados en la clase, con millones de euros... Y tienen máquina de escribir. Es como jugar, pero en un ambiente de formación de las matemáticas. Ellos van viendo lo que tienen y lo que les falta. Ven que necesitan más sillas, porque siempre hay gente esperando o lo que sea.

CONCLUSIONES

A lo largo del escrito consideramos que hemos proporcionado evidencia significativa de que los niños de 3 a 5 años pueden presentar un alto nivel de razonamiento cuando realizan actividades relacionadas con matemáticas, agrandado por la comunicación, el estímulo y la adecuada intervención del docente. Este trabajo invita a realizar estudios más profundos. También creemos que el entendimiento matemático no sólo se consigue en el aula, sino que también se gana en situaciones donde tienen que resolver problemas diarios fuera de la escuela. Por otra parte, consideramos que la competencia en matemáticas no sólo se refiere al conocimiento de su contenido, sino también a la manera de aplicarlo. Los niños tienen que reflexionar sobre sus actos si se desea que sean capaces de controlar su pensamiento y de aplicar lo que aprenden. No ganarán en autonomía si son dirigidos constantemente por el profesor, sino que, por el contrario, necesitan que les proporcionen oportunidades para que tengan que tomar decisiones por ellos mismos.

Todos los niños de 3 a 5 años poseen destrezas de pensamiento y razonamiento. Lo que varía de unos a otros es su capacidad para verbalizar lo que piensan, pero el que no son capaces de utilizar el lenguaje adecuadamente no tiene por qué hacer suponer que no sean capaces de razonar. Sin esa capacidad, el profesor no puede conocer suficientemente los conocimientos que poseen, lo que le impide avanzar adecuadamente para que aprendan nuevos contenidos. Por eso se considera que se necesita mucho trabajo de investigación en esta parte de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las matemáticas requieren actividad mental y abstracción y, para ello, es necesario trabajar duro. El elemento fundamental que puede enlazar "hacer matemáticas" y "pensar matemáticamente" es el diálogo apropiado.

En definitiva, no se debe subestimar la capacidad de los estudiantes de estas edades. En primer lugar, porque pueden tratar aspectos complejos, aunque sea con ayuda. El papel del docente es crucial en ese proceso de aprendizaje. Su participación debe contribuir al desarrollo del razonamiento abstracto y del pensamiento matemático. En segundo lugar, tomar decisiones sobre cómo abordar una tarea es trabajar matemáticas, es decir, decidir los materiales que se necesitan y organizar el trabajo de manera consistente desarrolla el pensamiento y el comportamiento matemático. En tercer lugar, la incapacidad para decir con palabras lo que quieren expresar no debe hacernos suponer que son incapaces de pensar y razonar. Una manera de aprender a hacerlo es por medio del diálogo y la discusión con alguien que tenga más experiencia. En estos momentos, parecen adecuadas las palabras de Caleb Gattegno: "Dejad que los niños nos enseñen a enseñar".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baroody, A. J. (1990), "How and When Should Place-Value Concepts and Skills Be Taught?", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 21, núm. 4, pp. 281-286.

—— (1989), "Kindergartners' Mental Addition with Single-Digit Combinations", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 20, núm. 2, pp. 159-172.

—— (1993), "The Relationship between the Order-Irrelevance Principle and Counting Skill", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 24, núm. 5, pp. 415-427.

Baroody, A. J. y M. R. Gatzke (1991), "The Estimation of Set Size by Potentially Gifted Kindergarten-Age Children", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 22, núm. 2, pp. 59-68.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics,* Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

Brown, S. J., A. Collins y P. Duguid (1989), "Situated Cognition and the Culture of Learning", *Educational Researcher,* núm. 18, pp. 32-42.

Carpenter, T. P., E. Ansell, M. L. Franke, E. Fennema y L. Weisbeck (1993), "Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 24, núm. 5, pp. 428-441.

Chamoso, J. M. (2000), *Análisis de una experiencia de resolución de problemas para la mejora de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas,* Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, España.

Clements, D. H., S. Swaminathan, M. A. Z. Hannibal y J. Sarama (1999), "Young Children's Concepts of Shape", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 30, núm. 2, pp. 192-212.

Davis, G. y K. Pepper (1992), "Mathematical Problem Solving by Pre-School Children", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 23, pp. 396-415.
Ernest, P. (1991), *The Philosophy of Mathematics Education,* Basingstoke, Reino Unido, Falmer Press.
Ernest, P. y W. B. Rawson (1995), *Developments in Primary Mathematics,* Exeter, Reino Unido, University of Exeter.
Fischer, F. E. (1990), "A Part-Part-Whole Curriculum for Teaching Number in the Kindergarten", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 21, núm. 3, pp. 207-215.
Gagné, R. (1965), *The Conditions of Learning,* Nueva York, Holt, Rinehart and Winston.
Hunting, R. P. y C. F. Sharpley (1988), "Fraction Knowledge in Preschool Children", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 19, núm. 2, pp. 175-180.
Irwin, K. C. (1996), "Children's Understanding of the Principles of Covariation and Compensation in Part-Whole Relationships", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 27, núm. 1, pp. 25-40.
Kamii, C. (1984), *El número en la educación preescolar,* Madrid, Visor Aprendizaje.
—— (1994), *Reinventando la aritmética III,* Madrid, Visor Aprendizaje.
Mitchell, C. y H. Williams (1998), *Teaching Mathematics to Young Children 4-7,* Cambridge, Reino Unido, Chris Kington.
NCTM (1991a), *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática,* Sevilla, SAEM, Thales.
—— (1991b), *Professional Standards for Teaching Mathematics,* Virginia, Reston, NCTM.
—— (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* Virginia, Reston, NCTM.
Payne, J. N., A. E. Towsley y D. M. Huinker (1990), "Fractions and Decimals", en J. N. Payne (ed.), *Mathematics for the Young Child,* Virginia, Reston, NCTM, pp. 175-200.
Piaget, J. (1977), *Epistemología genética,* Argentina, Solping.
—— (1971), *Psicología y epistemología,* Barcelona, Ariel.
—— (1972), *Psychology and Epistemology: Towards a Theory of Knowledge,* Harmondsworth, Penguin Books.
Rawson, W. B. (1992), "Authentic Activity in Learning Primary Mathematics", *Mathematics Teaching,* núm. 141, pp. 34-36.
—— (1990), "Copy and Continue-Evidence of Attainment", *Mathematics in School,* vol. 19, núm. 5, pp. 1-6.
—— (1994a), "In at the Deep End", *Child Education,* vol. 71, núm. 8, pp. 16-17.
—— (1994b), *Mathematics for Curriculum Leaders,* Londres, Routledge.

Sawyer, W. W. (1959), *Mathematician's Delight,* Penguin Books.
Schroeder, T. L. y F. K. Lester Jr. (1989), "Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving", en P. R. Trafton y A. P. Shulte (eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics, 1989 NCTM Yearbook,* Virginia, Reston, NCTM, pp. 31-42.
Thorndike, E. L. (1922), *The Psychology of Arithmetic,* Nueva York, Macmillan.
Tudge, J. y B. Rogoff (1995), "Influencias entre iguales en el desarrollo cognitivo; perspectivas piagetiana y vygotskiana", en Fernández y Melero (eds.), *La interacción social en contextos educativos,* Madrid, Siglo XXI de España Editores, pp. 99-133.
Vygotsky, L. S. (1977), *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas,* Buenos Aires, La Pléyade.
—— (1979), *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores,* Barcelona, Grijalbo.
Wheeler, D (1993), "Epistemological Issues and Challenges to Assessment: What is Mathematical Knowledge?", en N. Mogens (ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education,* Dordrecht, Reino Unido, Kluwer Academic Publishers.
Wiegel, H. G. (1998), "Kindergarten Students' Organization of Counting in Joint Counting Tasks and the Emergence of Cooperation", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 29, núm. 2, pp. 202-224.
Worth, J. (1990), "Developing Problem-Solving Abilities and Attitudes", en J. N. Payne (ed.), *Mathematics for the Young Child,* Virginia, Reston, NCTM, pp. 39-61.

DATOS DE LOS AUTORES

José María Chamoso Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca, Salamanca, España
jchamoso@usal.es

Christine Mitchell
School of Education, University of Exeter, Exeter, Inglaterra
C.H.Mitchell@exeter.ac.uk

William B. Rawson
School of Education, University of Exeter, Exeter, Inglaterra
UE10985249410@eurociber.es