Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor[1]

Gianfranco Arrigo y Bruno D'Amore

Resumen: En este artículo, estudiamos los obstáculos epistemológicos y didácticos encontrados en estudiantes italianos y suizos (de edad comprendida entre 17 y 19 años) en el estudio del teorema de Cantor, que afirma el hecho de que la infinidad de los números reales comprendidos entre 0 y 1 es mayor que la infinidad del conjunto de los números racionales. El enfoque está centrado en los obstáculos didácticos, creados casi siempre por los mismos profesores en los niveles escolares precedentes, cuando presentan modelos intuitivos que crean falsas concepciones, a veces insuperables.

Palabras clave: didáctica del infinito matemático, obstáculos didácticos, obstáculos epistemológicos, uso de teoremas de Cantor en didáctica de la matemática, aceptación de una demostración por parte de los estudiantes.

Abstract: In this article we study the epistemological and didactical obstacles encountered by Italian and Swiss students (from 17 to 19 years-old) in understanding Cantor's theorem, which asserts that there is a larger infinite number of real numbers between 0 and 1 than the infinite number of natural or rational numbers. Particular attention is paid to didactical obstacles, created at the begining by the same teachers in previous years, of intuitive models that then become transformed into misconceptions that sometimes turn insuperable.

Keywords: didactics of mathematical infinity, didactical obstacles, epistemological obstacles, Cantor's theorems use in mathematics education, acceptance of a proof by the pupils.

[1] Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de la Unidad de Bolonia: "Investigaciones sobre el funcionamiento del sistema: alumno-maestro-saber: motivaciones para la falta de devolución", inserto dentro del Programa de Investigación Nacional "Dificultades en matemáticas; instrumentos para observar, interpretar, intervenir", cofinanciado con fondos del MIUR.

INTRODUCCIÓN

En un trabajo precedente (Arrigo y D'Amore, 1999) habíamos puesto en evidencia las enormes dificultades que hacen casi imposible que un gran número de estudiantes de los últimos dos años de la escuela secundaria superior (entre los 17 y los 19 años) acepten el célebre teorema de Georg Cantor según el cual, para decirlo de la manera más simple posible, existen tantos puntos en un cuadrado como en uno de sus lados.[2]

En dicho trabajo, más de la mitad de los estudiantes observados parecía no comprender el sentido mismo del enunciado; una minoría significativa declaró haberlo entendido, pero con oportunas entrevistas habíamos reconocido que no se trataba de una verdadera y propia comprensión.

Esta revelación nos condujo a investigar nuevamente, en particular sobre *cómo* el estudiante está dispuesto a aceptar el hecho de que existen diversas cardinalidades infinitas, hecho que nos llevó a proponer otros teoremas de Georg Cantor que tienen que ver con la cardinalidad.[3]

APUNTES HISTÓRICOS SOBRE LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE INFINITO MATEMÁTICO Y NOTAS CRÍTICAS

Los contenidos matemáticos relacionados con esta nueva investigación han constituido por más de dos milenios un difícil y fascinante terreno de investigaciones y de grandes discusiones en el cual han trabajado importantes pensadores, desde los filósofos griegos (en particular Aristóteles) hasta Cantor y Dedekin, pasando por las reflexiones de Giovanni Duns Scoto, Galileo Galilei y Bernhard Bolzano (pensadores a los cuales les reconocemos incluso aportes didácticos).

Con los estudiantes que intervienen en las pruebas, nos centramos básicamente en dos aspectos fundamentales:

- la numerabilidad del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y la no numerabilidad del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y
- la equipotencia de segmentos y rectas (entendidos como conjuntos de puntos).

[2] Para informaciones histórico-críticas de este teorema y para una formulación más adecuada a la realidad histórica, véase Arrigo y D'Amore (1999).

[3] El informe en extenso de esta investigación aparece en Arrigo y D'Amore (2002).

DESCRIPCIÓN DEL CUADRO TEÓRICO DE REFERENCIA

La complejidad del aprendizaje del infinito está ampliamente demostrada y documentada en el contexto internacional, por una vasta literatura, testimoniada, por ejemplo, en D'Amore (1996).

Para no repetir aquí las consideraciones ya hechas ni el cuadro teórico descrito en Arrigo y D'Amore (1999) que cubre ampliamente el presente trabajo, nos limitamos a recordar sólo aquellos textos que constituyen una estrecha referencia con la actual investigación.

Tratándose de una correspondencia biunívoca entre entes geométricos, y en particular entre segmentos, es fundamental el trabajo clásico de Tall (1980) que evidencia el fenómeno que nosotros hemos llamado *dependencia,* según el cual existen más puntos en un segmento largo (en el límite en una recta), respecto a uno más corto.

En este trabajo, la demostración (por reducción al absurdo) de hechos ligados a la cardinalidad se sustenta, como se evidenciará, sobre las maneras de escribir los números, es decir, sobre las formas de escritura de los números reales. Esto desencadena la problemática denominada *deslizamiento,* evidenciada en una cierta perspectiva (básicamente lingüística) por Duval (1995) y ampliada por nosotros en Arrigo y D'Amore (1999), según la cual, el estudiante acepta con reticencia, o de hecho no acepta, una demostración en la cual se pasa de un objeto de discurso a otro; por ejemplo, se habla de hechos geométricos y se pasa a consideraciones aritméticas (como en el caso de la demostración objeto de nuestro trabajo de 1999) o también, si se está hablando de una lista de números en una sucesión, se pasa a consideraciones sobre las modalidades de escribir los mismos números (como sucederá en el presente caso).

También en este trabajo se busca mayor claridad, en particular, sobre el fenómeno de *aplanamiento,* nombre que habíamos dado a lo ya evidenciado en los clásicos trabajos de varios autores, entre los cuales señalamos a Waldegg (1993) y algunas otras contribuciones de la escuela de Tel Aviv, con particular referencia a Efraim Fischbein y sus alumnos. Se trata del fenómeno, ya recordado líneas antes, sobre la base del cual el estudiante, impulsado por la solicitud del profesor o del investigador, acepta que algunos conjuntos infinitos sean entre ellos equipotentes (como $\mathbf{N}$ y $\mathbf{Z}$) y lo hace porque piensa que esto está ligado con el hecho de ser infinitos y, por tanto, como generalización, todos los conjuntos infinitos son equipotentes. Esta falsa concepción es el resultado de un avance positivo de una primera concepción en la cual (para decirlo con palabras sugeridas por un estudiante) "En **Z** existe el doble de elementos de **N**, es obvio", a una segunda concepción en la cual, después de haber aceptado la demostración de que **N** es, por el contrario, equipotente a **Z**, "todos los conjuntos infinitos son equipotentes entre ellos, dado que son infinitos". La segunda falsa concepción es, en un cierto sentido, un "mejoramiento" respecto de la precedente, una "escalada" lenta y gradual hacia la construcción de un concepto final correcto, que podríamos llamar "modelo de infinito".

Dependencia y *aplanamiento* son fenómenos, para nosotros, difíciles de distinguir; son como dos caras de una misma moneda. Esto no sólo en este trabajo en el cual

- *dependencia*: se da para comparar el intervalo abierto (0, 1) en **R** y todo $\mathbf{Q}_a$ (los racionales absolutos, 0 incluido); es obvio que, como imagen visual, parece que el primer "segmento" pudiera estar incluido en el segundo,
- *aplanamiento*: los dos conjuntos por comparar son ambos infinitos,

se pueden pensar como dos aspectos de un mismo *error*, como lo demostraremos más adelante, que consiste en intentar *aplicar a conjuntos infinitos procesos propios de aquellos finitos,* intento ya ampliamente evidenciado en la literatura (Shama y Movshovitz Hadar, 1994), pero revelado por nosotros en forma explícita, en particular, en las discusiones y en las entrevistas.

Nos parece oportuno anticipar aquí una conclusión que veremos más adelante, ésta es: se convierte en modelo intuitivo del concepto de equipotencia aquel que (correctamente) está en el campo finito y que, aun pudiéndose y debiéndose extender en el infinito, provoca traumas cognitivos. Si "infinito" es un número natural, y si existen diversos conjuntos con tal cardinalidad, entonces todos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca entre ellos. El origen de esta falsa concepción (que, sin embargo, tiene las características de un obstáculo epistemológico, claramente evidenciadas por la historia de la matemática y por un sinnúmero de investigaciones) es de naturaleza básicamente didáctica, el alumno, mediante conteo y mediante correspondencias biunívocas, se apropia con seguridad de tales conceptos. Por otra parte, el obstáculo no es en sí mismo asimilable a un error; el obstáculo es una idea que, en el momento de la formación de un concepto, fue eficaz para afrontar problemas precedentes (incluso solo cognitivos), pero que se revela ineficaz cuando se intenta aplicarla a una nueva situación. Visto el suceso obtenido (es más: con mayor razón a causa de este suceso), se intenta conservar la idea ya adquirida y comprobada y, a pesar del fracaso, se busca salvarla; pero este hecho termina con ser una barrera hacia sucesivos aprendizajes.

Esta observación y los resultados de la actual investigación nos impulsan a examinar la posibilidad –necesidad– de volver a estudiar los contenidos de carácter disciplinar que se deberían proponer en el curso de la formación inicial de los profesores, incluso de profesores de la escuela primaria; no tanto para que modifiquen los contenidos de su acción didáctica, sino para que eviten la formación en sus alumnos de aquellos modelos intuitivos que serán después causa de situaciones de malestar cognitivo.

Volvamos al cuadro teórico.

Todas las precedentes consideraciones involucran otros dos fenómenos interesantes:

- la dificultad que parece tener el estudiante al tratar con el infinito actual, más que con el infinito potencial, ya revelada en múltiples trabajos y que sólo marginalmente toca el nuestro (por lo tanto, remitimos al cuadro teórico expuesto en Arrigo y D'Amore, 1999); sin embargo, señalamos a Tsamir (2000), quien evidencia cómo este tipo de dificultad no se encuentra sólo entre estudiantes, sino también entre profesores (en formación), lo que refuerza la necesidad de examinar siempre más los obstáculos didácticos y los contenidos disciplinares de la formación;
- la dificultad que encuentra el estudiante para darse cuenta de cuándo dos afirmaciones están en contradicción; y aún más, la casi total indiferencia que demuestra si se da cuenta de dicha contradicción. También sobre este punto recordamos sólo dos clásicos (Stavy y Berkovitz, 1980; Hart, 1981), remitimos a nuestro trabajo precedente para una bibliografía más amplia.

PROBLEMAS QUE HAN ESTIMULADO LA INVESTIGACIÓN

P1. Siguiendo un recorrido didáctico, ¿es posible hacer que los estudiantes de los dos últimos cursos de la escuela superior lleguen a comprender el sentido de las afirmaciones puestas como tesis en los teoremas objeto de este trabajo?

P2. En caso negativo, ¿por qué no? ¿Cuáles son los motivos? Los obstáculos epistemológicos son evidentes, la misma historia de la matemática nos los ilustra; pero, ¿existen también obstáculos didácticos?

P3. En caso positivo, ¿qué será del *aplanamiento*? Es decir, si aquellos estudiantes que inicialmente cayeron en la trampa del aplanamiento (por ejemplo, entre **N** y **Z**) durante el recorrido didáctico comprenderán el teorema que establece la no numerabilidad de **R**, ¿cómo reaccionarán ante la evidente contradicción?

P4. ¿Hasta qué punto está consolidado el aprendizaje de los estudiantes que responden correctamente al test? En otras palabras, ¿lo cree porque lo ve o lo cree porque esta realmente convencido?

HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Las hipótesis se apoyan en algunos elementos probados por la precedente investigación; en particular, se consolida la intención de recurrir a coloquios y entrevistas clínicas con los alumnos que responden el test, dado que las respuestas escritas no revelan en su totalidad la calidad del aprendizaje.

H1. Incluso si las demostraciones de los nuevos teoremas examinados aparecen, a los ojos de matemáticos expertos, como muy elementales, hipotetizamos que serían pocos los estudiantes capaces de comprenderlos verdaderamente, dado que, en cada teorema, es necesario distinguir entre:

- el significado de la tesis
- la demostración de dicha tesis.

Era nuestra convicción que algunos estudiantes se habrían ilusionado de comprender tanto la tesis como la demostración, pero, una vez en situación de defender verbalmente la verdadera naturaleza del sentido de la tesis, habrían mostrado más de una duda o tal vez un rechazo. La literatura internacional evidencia claramente que una de las cláusulas del contrato didáctico lleva precisamente a aceptar tesis de teoremas por confianza en el profesor como representante de la institución y como depositario del saber. Consideramos importante, además, examinar las reservas de los estudiantes y la modalidad de sus expresiones.

H2. En caso de la no aceptación de la tesis de los teoremas, hipotetizábamos que, además de los obstáculos epistemológicos, era posible revelar obstáculos didácticos. Dos de éstos tienen que ver con la naturaleza de la densidad y de la continuidad, por demás confusas, incluso en la mente de los estudiantes que conocen un poco el Análisis (el conjunto $\mathbb{R}$, la continuidad, etc.), pero que no siempre tienen *construido* tal concepto de manera correcta. La pregunta central es: ¿*cuáles* obstáculos didácticos están influyendo la no comprensión de las tesis de los teoremas que estamos examinando? Nuestra atención se ha dirigido, en los últimos años, al "modelo del collar", que viene explícitamente indicado, desde la escuela elemental, como modelización para representar mentalmente los puntos sobre la recta y que parece resistir cada "ataque" sucesivamente. Por ejemplo, cuando se ubican los llamados números fraccionarios sobre la "recta racional" r_Q, el modelo-collar resiste y la densidad queda como un hecho cognitivo potencial y no natural. Para muchos estudiantes la densidad aparece ya como... "relleno" de la recta y, por tanto, no entienden qué diferencia existe entre r_Q y r. Ni les ayuda mucho, pocos años después, el estudio de $\mathbb{R}$ y la definición de continuidad... Nuestra hipótesis, en sustancia, era que habríamos encontrado obstáculos didácticos asociados a modelos del todo elementales.

H3. La respuesta al tercer problema nos parecía la más interesante. Estábamos convencidos de que, durante un adecuado recorrido didáctico, los estudiantes más maduros habrían aceptado que, contrariamente a la intuición, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son equipolentes entre sí y aquí pensábamos que más de un estudiante (verbalmente) habría hecho referencia al *aplanamiento*. En el momento en el que el nuevo teorema habría mostrado que, al contrario, existen conjuntos infinitos no equipolentes entre sí, habríamos podido apreciar la reacción de los estudiantes más motivados frente a una situación de contradicción explícita.

H4. Ya en el curso de la investigación precedente, habíamos quedado perplejos con las razones reales que han llevado a los estudiantes a responder de un cierto modo. Básicamente, nuestras objeciones se referían a la fiabilidad de los resultados del test individual. Este test nos muestra, indudablemente, lo que el estudiante responde, pero no nos dice nada sobre el *por qué* responde de dicha manera. Nos parecía marcada la confianza que el estudiante coloca en lo que el maestro expone. Además, impulsando al límite la reflexión, se podría incluso hipotetizar que ciertas respuestas correctas tienen como base falsas concepciones, como ya lo habíamos anticipado. Por último, también estamos interesados en el grado de convicción que el estudiante demuestra tener cuando debe confrontar lo que ha aprendido. La particular problemática relativa a los conjuntos infinitos impide al alumno verificar la credibilidad de las informaciones que recibe por medio de sus sentidos, obligándolo, en el mejor de los casos, a modificar las propias imágenes mentales y a transformarlas en modelos cognitivos. Pero en realidad, ¿se presenta siempre este proceso?, y si no es así, ¿en qué medida?

Para hacer frente a esta delicada problemática, pensamos efectuar coloquios individuales con la intención de establecer tanto las verdaderas motivaciones que se esconden en las respuestas de los estudiantes, como el grado de convencimiento que demuestra el estudiante en relación con las afirmaciones que declara haber hecho propias.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Con todos los estudiantes se desarrolló un recorrido didáctico, organizado por el profesor de la clase, con base en un material de aprendizaje preparado por los autores de la investigación. Al final del proceso de estudio, se asignaba a cada estudiante un cuestionario.[4]

Fueron partícipes de la actividad de aprendizaje y después del test, 189 estudiantes de escuela superior, 90 suizos y 99 italianos; de éstos, 68 fueron entrevistados (36 suizos y 32 italianos).

DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS Y VERIFICACIÓN DE LAS HIPÓTESIS PRESENTADAS

Las *preguntas 1a, 1b* y *2a* sondean elementos de comprensión (sobre cómo contar los elementos de un conjunto) que habrían podido hacer no creíbles los resultados de la investigación: los resultados fueron para nosotros tranquilizadores.

En la *pregunta 2b* el estudiante debe expresarse sobre el hecho de que son tantos múltiplos de 997 (997 *k*) como números naturales (*k*). Por una parte, la mayoría de los estudiantes entendió la demostración (existencia de una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos); por la otra, recorriendo los números naturales, "ve" que para construir el primer conjunto se excluyen muchos números, lo que les impide (en un 27% aproximadamente) "creer" verdaderamente en el resultado teórico. Es un primer ejemplo de tratamiento del infinito actual

[4] Estos documentos, así como los resultados del test, están publicados en su totalidad en Arrigo y D'Amore (2002)

con procesos del finito. El estudiante puede sacar la conclusión de que la matemática es algo completamente fuera de la realidad (véase D'Amore y Fandiño Pinilla, 2001).

La *pregunta 2c* enfrenta al estudiante con la equipotencia entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de los cuadrados (alcanzada en un 80%); la *pregunta 2d* lo enfrenta con la equipotencia entre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$ (alcanzada en un 50%). Esta última pregunta, dada de manera intrigante ("Alguien sostiene que el cardinal de $\mathbb{Z}$ es el doble del cardinal de $\mathbb{Z}^+$"), puso en ansia principalmente más a los estudiantes suizos, más "escolarizados" (40% de respuestas correctas), que a los italianos (60% de respuestas correctas).

También la *pregunta 3* es en parte desorientadora: hace notar al estudiante la densidad de $\mathbb{Q}$, para después pedirle si confirma aún que $\mathbb{Q}$ es numerable, resultado obtenido en la demostración estudiada. En general, los estudiantes italianos tuvieron un mayor éxito que sus compañeros suizos: 82% de ellos afirma creer que son tantos números racionales como números naturales, contra 58% de los suizos. Pero si se analizan las razones adoptadas, desciende bruscamente el porcentaje de italianos que cree en virtud del fenómeno de aplanamiento (67% contra 30% de los suizos). Por otra parte, los suizos no desmienten lo observado en el curso de la pregunta 2, ya que 28% de ellos cree en la equipotencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$, puesto que "han visto en una clase una demostración clara y convincente".

En la *pregunta 4a* se interroga si en (0,1) hay más racionales o más reales (éxito: 60%); la *pregunta 4b* lleva a confrontar los reales en (0,1) y la totalidad del conjunto $\mathbb{Q}$ (éxito: 35%); la *pregunta 4c* propone la comparación entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ (éxito: 54%). Los estudiantes suizos dan globalmente 75% de respuestas exactas contra 45%. Cierto, ya no existe el "sentido común" que pueda ayudar: quien tiene más confianza en lo que se hace en la escuela, tiene más probabilidad de responder correctamente.

La *pregunta 4d* pide señalar si son más puntos en un segmento largo (2 cm) o en toda la recta (éxito: 52%).

Entre las respuestas, surgen los efectos de la *dependencia* de la cardinalidad de la "magnitud" del conjunto y del *aplanamiento* (este último puede incluso haber inducido respuestas "correctas").

DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS DE LOS COLOQUIOS Y VERIFICACIÓN DE LAS HIPÓTESIS PRESENTADAS

Se concentró la atención principalmente en las preguntas 2b, 2d, 3, 4b y 4d. El objetivo principal del coloquio era buscar, dentro de lo posible, entender las razones que se esconden detrás de las respuestas. El investigador trató de poner en dificultad a los estudiantes entrevistados, a fin de ver hasta qué punto habían realmente construido de manera personal su aprendizaje. (I = estudiantes italianos; CH = estudiantes suizos).

Pregunta 2b (¿Existen tantos múltiplos de 997 como números naturales?)

CH. Cambio de opinión: 5 de 36 (14%). Dos estudiantes rechazaron la respuesta correcta dada en el test; tres estudiantes la corrigieron oportunamente.

I. Cambio de opinión: 7 de 32 (22%). Cuatro estudiantes pasaron de la respuesta correcta "del todo convencido" a la respuesta "para nada convencido"; tres estudiantes pasaron de la respuesta "suficientemente convencido" a la respuesta "para nada convencido". Todos los cambios de opinión fueron, por tanto, hacia lo negativo: el aprendizaje de estos estudiantes no era el resultado ni de una construcción ni de una competencia.

Pregunta 2d (relativa a la equipotencia entre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$*)*

CH. Cambio de opinión: 9 de 36 (25%). Seis alumnos de 36 rechazaron la respuesta correcta dada en el test. Tres alumnos, al contrario, mejoraron el propio aprendizaje y alcanzaron total conciencia al respecto.

I. Cambio de opinión: 8 de 32 (25%). Cuatro estudiantes rechazaron la respuesta correcta dada en el test; tres estudiantes, aun cambiando la respuesta, permanecen en el error; un estudiante admite no saber qué decir ni qué pensar.

Resulta evidente que para los estudiantes no es hipotetizable un orden de los elementos de $\mathbb{Z}$ que no sea el "natural": la imagen de la recta numérica invade otras medidas. Además, es evidente que quien responde correctamente lo hace no tanto porque está convencido de la demostración vista, sino por motivos de *aplanamiento*.

Pregunta 3 (Visto que $\mathbb{Q}$ *es denso, ¿crees aún que es numerable?)*

CH. Cambio de opinión: 12 de 36 (33%). Ocho estudiantes rechazaron la respuesta correcta dada en el test. Los otros cuatro habían dado la respuesta correcta en el test, pero impulsados por razones ligadas al *aplanamiento*; en el coloquio los cuatro se inclinaron hacia la *dependencia*.

I. Cambio de opinión: 11 de 32 (34%). Ocho estudiantes pasaron de la respuesta "existen tantos racionales como naturales, porque lo habíamos demostrado" a la respuesta negativa "existen más elementos en **Q**" (de nuevo por *aplanamiento*). Tres estudiantes pasan de la respuesta correcta, pero dada por *aplanamiento,* a la respuesta negativa; la causa de esto es la *dependencia.*

Se mezclan aquí: uno de los axiomas euclidianos (*El todo es mayor que las partes*) que funciona bien en la praxis didáctica, y el frecuente y más veces denunciado intento de prolongar la aplicabilidad de modelos intuitivos que funcionan en el finito, al infinito, falsa concepción de origen didáctica.

Pregunta 4b (*comparación entre la cardinalidad del intervalo real (0,1) y* **Q**)

CH. Cambio de opinión: 11 de 36 (31%). De éstos, sólo uno había dado la respuesta correcta en el test y después del coloquio se decide por "no se puede decir". De los otros, cuatro estudiantes se refugian en el "no se puede decir", cuatro eligen la opción de la misma cardinalidad, impulsados por el *aplanamiento,* dos estudiantes cambian de opinión bajo el efecto de la *dependencia.*

I. Cambio de opinión: 10 de 32 (31%). Siete estudiantes cambian y eligen la respuesta "existen más racionales", cinco estudiantes desplazan su convicción sobre "los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad"; uno solo de los estudiantes corrige oportunamente la respuesta.

Tuvimos la impresión de que un atento examen del verdadero significado de las preguntas pone en crisis a los estudiantes, no sólo quien basa su respuesta positiva en el contrato cede ante el primer análisis crítico, sino incluso quien aparentemente ha construido el conocimiento parece haberlo hecho de manera débil y poco fundada.

Pregunta 4d (¿Existen más puntos en un segmento de 2 cm o en toda la recta?)

CH. Cambio de opinión: 8 de 36 (28%). De los ocho estudiantes que han cambiado de idea durante el coloquio, cinco habían dado la respuesta correcta en el test; cuatro de ellos corrigieron en "no se puede decir", dos estudiante optaron por "más puntos sobre la recta" (en ambos casos por el efecto *dependencia*). Por último, un estudiante que había dado como respuesta "más puntos en el segmento" dice haberse equivocado al indicar la respuesta y corrige en "misma cardinalidad", pero, justificándose, se alínea entre las víctimas del *aplanamiento.*

I. Cambio de opinión: 9 de 32 (28%). Seis estudiantes han rechazado la respuesta correcta dada en el test (tres eligen "más puntos sobre la recta", tres "no se puede decir"). Dos estudiantes corrigen oportunamente su respuesta. Un estudiante pasa de la respuesta "más puntos sobre el segmento" a la respuesta "no se puede decir". También aquí se hacen presentes los efectos del *aplanamiento* y de la *dependencia.*

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS PLANTEADAS EN LA INVESTIGACIÓN

Estamos finalmente en grado de responder las preguntas de investigación.

P1. Nos parece poder afirmar que el sentido de estos teoremas y sus demostraciones se revelan ampliamente más allá de la capacidad de comprensión de los estudiantes de los últimos años de la escuela superior, por más maduros que sean. El sentido de los teoremas escapa a la comprensión de la mayoría; aun si las demostraciones han sido calificadas en el momento de estudiarla como: "fáciles", "yo las entendí" e incluso "bellas", cuando se entrevista al estudiante, se evidencia que éstas no inciden, no se asimilan, no se interiorizan, en fin, no alcanzan a formar parte del equipaje cognitivo de un estudiante de dicha edad (en particular, el teorema que establece la no numerabilidad de $\mathbb{R}$).

P2. Resulta evidente de la investigación que, además de los obstáculos epistemológicos ya señalados, existen fuertes obstáculos didácticos. Éstos tienen que ver básicamente con el... misterio que crea la escuela, en los niveles precedentes, en todo lo concerniente al infinito, que no viene tratado para nada o viene reducido banalmente a una extensión del finito. Ésta es la causa de modelos intuitivos que constituyen verdaderas y propias falsas concepciones. Por ejemplo, el "ser subconjunto" que implica el "tener menos elementos": verdadero en el finito, pero no en el infinito; la recta como "collar" de puntos, que hace compleja o tal vez incluso imposible la idea de densidad y que colabora a hacer imposible la idea de continuidad; el modelo "natural" del orden de $\mathbb{Z}$ que se revela después único e insuperable. Incluso, *aplanamiento* y *dependencia*, ya puestos en el banquillo de los acusados en Arrigo y D'Amore (1999), se confirman culpables de múltiples falsas concepciones.

P3. Existen, por tanto, obstáculos didácticos diversos y evidentes. En particular, el *aplanamiento* y la *dependencia* nos aparecen como caras de una misma moneda, ramas de una misma raíz: la extensión de procesos de conjuntos finitos directamente a conjuntos infinitos.

P4. De los coloquios, se evidenció claramente como la comprensión de este argumento es bastante superficial, basada por lo general en la confianza acrítica de lo que viene propuesto en clase o bien en los dos errores más frecuentes:

aplanamiento y *dependencia*. Estos resultados inducen la necesidad de intervenir en el plano didáctico para hacer que el estudiante pueda afrontar el estudio del Análisis, habiendo ya adquirido una buena competencia sobre los conjuntos infinitos.

CONCLUSIONES

Anteponemos que, para nosotros, la educación matemática actual no puede prescindir de algunas competencias fundamentales sobre los conjuntos infinitos.

El manejo de las problemáticas concernientes al infinito actual exige el desarrollo de modelos intuitivos diversos y, en algunos casos, contradictorios respecto de los que se usan en el finito. Se deriva la necesidad de desarrollar una acción didáctica ya a partir de la educación básica, tanto en el campo numérico como en el campo geométrico.

En el campo numérico, se requiere básicamente convencerse de la caída del axioma euclidiano *el todo es mayor que las partes*, del hecho de que un conjunto que tiene elementos infinitos puede ser puesto en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio, de las aparentes "rarezas" que se obtienen cuando se aplican las operaciones aritméticas a los números transfinitos.

En el campo geométrico, es urgente trabajar sobre la topología de la recta: los conceptos de densidad y de continuidad no se comprenden en absoluto; además, la imagen ingenua de la recta como collar de perlas (en la cual cada perla representa un punto geométrico) es para muchos el único fundamento de la teoría.

Trabajar con cuidado los conceptos relativos a los conjuntos infinitos desde la educación básica no debe ser leído en el sentido de una introducción en los programas de nuevos contenidos. Por el contrario, de esta manera no se haría más que repetir los errores que desde hace años se están cometiendo en la enseñanza del Análisis, donde, en general, se presenta una teoría demasiado formalizada a estudiantes que no están en grado de entenderla debido a que su experiencia y competencia no son suficientes. Significa, por el contrario, ofrecer a los estudiantes una serie de actividades, cuyo objetivo sea el de acercar al alumno a la delicada pero fascinante problemática relacionada con el infinito, que lo ayuden en la formación de imágenes que le permitan llegar a un modelo mental del infinito lo más correcto posible.

Por lo que concierne al análisis de los errores, validamos que, para nosotros, las dos formas patológicas *aplanamiento* y *dependencia* tienen un origen común: *la aplicación incondicional a los conjuntos infinitos de los procesos propios de los conjuntos finitos*. Esta actitud es resultado de una evidente concepción falsa, generada por años de aplicación de determinados procesos siempre y únicamente en el ámbito finito, procesos que, con el tiempo, se convierten en verdaderos y propios modelos universales.

Por último, no podemos dejar inadvertido el problema de la no confiabilidad (relativa) de los tests escritos. En este sentido, los resultados obtenidos en los coloquios son claramente indicativos. Puestos en la estrechez de los coloquios, los estudiantes cambian de opinión y modifican las respuestas propias dadas en el test. Algunos pasan de una respuesta correcta dada en el test, a una errada, dada con convicción. Otros pasan de una respuesta errada a otra también errada. Otros, por el contrario pasan de una respuesta errada a una correcta que parece ser el fruto de un aprendizaje que se adquiere precisamente durante el curso de la entrevista.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrigo, G. y B. D'Amore (1999), "'Lo veo, pero no lo creo', Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual", *Educación Matemática,* México, vol. 11, núm. 1, pp. 5-24.

—— (2002), "'Lo vedo ma non ci credo...', seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor", *La Matematica e la sua didattica,* núm. 1, pp. 4-57.

D'Amore, B. (1996), "El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas", *Epsilon,* España, núm. 36, pp. 341-360.

D'Amore, B. y M.I. Fandiño Pinilla (2001) "La 'matemática de la cotidianidad'", *Paradigma,* Venezuela, núm. 1, pp. 59-72.

Duval, R. (1995), "Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?", *Actas de l'École d'été,* 1995.

Fischbein, E. (1985), "Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari", en L. Chini Artusi (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base,* Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 122-132.

Shama, G. y Hadar N. Movshovitz (1994), "Is Infinity a Whole Number?", *Actas del XVIII PME,* Lisboa, pp. 265-272.

Stavy, R. y B. Berkovitz (1980), "Cognitive Conflict as a Basic for Teaching Qualitative Aspects of the Concept of Temperature", *Science Education,* núm. 28, pp. 305-313.

Tall, D. (1980), "The Notion of Infinity Measuring Number and its Relevance in the Intuition of Infinity", *Educational Studies in Mathematicas,* núm. 11, pp. 271-284.

Tsamir, P. (2000), "La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti", *La matematica e la sua didattica,* núm. 2, pp. 167-207.

Waldegg, G. (1993), "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction", *Annales de Didactique et de Sciences cognitives,* núm. 5, pp. 19-36.

DATOS DE LOS AUTORES

Gianfranco Arrigo

Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Cantón Ticino, Bellinzona, Suiza

Alta Scuola Pedagogica, Locarno

gianfranco.arrigo@span.ch

Bruno D'Amore

Departamento de Matemáticas, Universidad de Bolonia, Italia

damore@dm.unibo.it