Análisis de las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo

David Arnau y Luis Puig Espinosa
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

Resumen

En este trabajo presentamos una división en pasos ideales del Método de Resolución de la Hoja Electrónica de Cálculo y analizamos las dificultades propias del método que su uso plantea al resolutor. También mostramos los resultados de un estudio exploratorio realizado con alumnos de primer curso de secundaria en el que pretendíamos observar cómo resolvían problemas en el entorno de la hoja de cálculo y cómo se enfrentaban a las dificultades propias del método.

Abstract

In this work we show a division in ideal steps of the Spreadsheet Resolution Method and analyze the difficulties of the method itself the use of which raises to the solver. We also show the results of an exploratory study made with students of first course of secondary in which we tried to observe the way they solved problems in the spreadsheet environment and how they faced the difficulties of this method itself.

INTRODUCCIÓN

Como señalan Bednarz y Janvier (1996) los conceptos y procedimientos de origen aritmético, que serán la base sobre la que se construirá el conocimiento algebraico, pueden actuar como obstáculos en el uso del álgebra para resolver los problemas verbales. Nuestro proyecto de investigación pretende determinar el carácter mediador del Método de Resolución de la Hoja Electrónica de Cálculo (MHEC), señalando qué aspectos del método fomentan la evolución hacia el pensamiento algebraico y cuáles pueden intervenir como obstáculos en el proceso.

En esta comunicación expondremos la división en pasos ideales del MHEC, analizaremos las dificultades que su uso puede plantear al resolutor y mostraremos algunas observaciones de cómo los estudiantes se enfrentan a una de estas dificultades.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Nuestro marco teórico y metodológico ha sido el que Filloy (1999) denomina “Modelos Teóricos Locales”, que venimos utilizando desde hace años en los trabajos de nuestro grupo (Fernández, 2001; Nassar, 2001 y Puig, 1996).

ANTECEDENTES

A partir de los trabajos de Dettori, Garuti y Lemut (2001), Rojano (1996) y Rojano y Sutherland (1991, 1993a, 1993b, 1997) hemos realizado un catálogo de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo, que nos ha permitido elaborar el modelo de cognición del modelo teórico local.

Rojano y Sutherland (1993a) señalan que el uso de la hoja de cálculo favorece la evolución del pensamiento aritmético hacia el pensamiento algebraico. Los estudiantes de entre 10 y 11 años, a los que se les plantea la resolución de problemas en el entorno de la hoja de cálculo, tienden inicialmente a pensar con ejemplos específicos y tienen dificultad en aceptar el trabajar con cantidades desconocidas como si fueran conocidas (Rojano y Sutherland, 1993a). Tras recibir instrucción en la resolución de problemas verbales en este entorno se observa:

- Un aumento de la percepción de todas las relaciones entre valores conocidos y desconocidos.

- El uso del simbolismo de la hoja de cálculo para expresar relaciones generales.

- La aparición de estrategias de prueba y error cuando los alumnos trabajan en un entorno no informático.

- La integración de los métodos no algebraicos parte-todo y de prueba y error en un método de la hoja de cálculo.

- Una evolución hacia un "método más general y algebraico" consistente en ir de lo desconocido a lo conocido.

(Rojano y Sutherland, 1993b)

Algunos estudios previos han realizado análisis no exhaustivos de las limitaciones que el entorno de la hoja de cálculo plantea a la enseñanza del álgebra. Dettori, Garuti y Lemut (2001) señalan, entre otras, las siguientes:

- La ecuación nunca puede ser explícitamente expresada. El signo igual en la hoja de cálculo significa asignación de un valor calculado a una celda, mientras que en álgebra significa relación. La incapacidad de escribir relaciones en una hoja de cálculo indica que no es posible usarla para manejar modelos algebraicos.

- Las manipulaciones formales no se pueden llevar a cabo en el entorno de la hoja de cálculo, sólo podemos asociar significado a los símbolos.

- Otro aspecto del lenguaje algebraico que tampoco se puede plasmar es la lectura de una relación en cualquier dirección ya que las relaciones en sí mismas no están presentes en la hoja de cálculo.

LA DIVISIÓN EN PASOS IDEALES DEL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE LA HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO

La división en pasos ideales del MHEC supone el catálogo de aquello que debemos hacer cuando resolvemos problemas verbales algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo, sin que ello suponga un orden estricto.

- El primer paso es una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.

- El segundo, la elección de las celdas que van a representar a las cantidades, ya sean conocidas o desconocidas, y qué celda, representante de una cantidad desconocida, servirá de referencia en el paso siguiente. A esta celda, que debe ser única, la llamaremos "celda de referencia" ya que todas las celdas que representan cantidades desconocidas harán referencia directa o indirecta a ella.

- El tercero, representar ciertas cantidades mediante expresiones en la forma superficial de la hoja de cálculo que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras. En esta fase puede ser necesario resolver una lista de dificultades que pueden surgir y que expondremos más adelante.

- El cuarto, el establecimiento de una ecuación, lo que se hace igualando explícita o implícitamente dos celdas que representan la misma cantidad. La igualación explícita se hace usando una función booleana (=Celda1=Celda2) que implementa la hoja de cálculo[1] y que da VERDADERO cuando el valor contenido en las celdas igualadas es el mismo, o FALSO cuando no lo es. De manera implícita la comparación la hace el usuario.

- El quinto paso será la variación del valor presente en la celda de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad.

- En el tercer paso las decisiones que tome el resolutor pueden provocar la aparición de dos dificultades asociadas a las limitaciones del entorno:

- El exceso de colisiones.

- Las referencias circulares.

Llamamos "colisión" a la presencia de dos celdas que representan la misma cantidad. El exceso de colisiones se produce cuando al poner el problema en la hoja de cálculo aparece más de una colisión. Esto conlleva la existencia de más de una celda de referencia y de más de una igualdad en el segundo y cuarto paso, respectivamente. Para evitar el exceso de colisiones debemos modificar las fórmulas generadas a partir de las relaciones involucradas en las colisiones hasta que el número de éstas se reduzca a una.

Las referencias circulares surgen cuando en una celda encontramos una fórmula que depende del valor de otra celda y en ésta aparece una segunda fórmula que depende, de manera directa o indirecta, del valor de la primera celda. Para resolver una referencia circular hemos de duplicar una de las dos cantidades y reestructurar el problema (evitando la aparición de exceso de colisiones) para que estas dos celdas, que representan la misma cantidad, sean la condición que plantee la ecuación.

LOS GRAFOS

Para representar la estructura de relaciones entre cantidades en los problemas utilizamos una representación en forma de grafo, evolucionada a partir de los grafos trinomiales (Fridman, 1990). Estos grafos, a diferencia de los estudiados por la teoría de grafos, pueden tener más de dos vértices en una arista. Cada arista representa una relación entre cantidades y cada vértice situado sobre la arista representa a una de estas cantidades. Las cantidades conocidas se representan por vértices oscuros y las desconocidas, por vértices claros.

Cuando la lectura del problema se plasma sobre la hoja de cálculo, las relaciones entre cantidades se expresan como operaciones aritméticas. Hemos modificado los grafos con la finalidad de que puedan representar la estructura de cantidades y relaciones de los problemas y dar cuenta del proceso de solución en el entorno de la hoja de cálculo. A los grafos que representan las operaciones entre las cantidades les llamaremos grafos orientados. Orientar una arista de un grafo es indicar con una flecha el vértice que representa a la cantidad resultante de realizar la operación con los otros vértices de la arista, a los que llamaremos antecedentes. Si la operación es conmutativa[2], el orden de los antecedentes es intrascendente. Si la operación no es conmutativa (únicamente consideraremos relaciones ternarias), el primer antecedente será el vértice más alejado del que representa la cantidad resultante.

En la Figura 1 se muestra el uso de los grafos orientados para identificar los dos tipos de colisión que se pueden producir al resolver un problema en el entorno de la hoja de cálculo. La colisión sobre vértice oscuro obligaría a dedicar dos celdas a la misma cantidad, una para el valor conocido y otra para el resultado de operar los antecedentes. La colisión sobre vértice claro también exigiría dedicar dos celdas a la misma cantidad, una para cada uno de los valores obtenidos de operar con los antecedentes de las dos aristas.

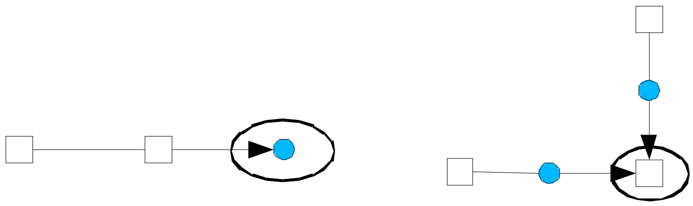

Figura 1. Tipos de colisión.

LA EXPERIMENTACIÓN

LOS SUJETOS

Hemos seleccionado 12 alumnos de primer curso de secundaria del Col·legi Sant Bertomeu de Godella elegidos entre los que tenían mejor historial académico en matemáticas. El test inicial se administró individualmente, mientras que el estudio de casos se realizó agrupando a los alumnos por parejas por las razones descritas en Schoenfeld (1985) y Puig (1996). Tanto en la secuencia de enseñanza como en el estudio de casos a cada pareja se le asignó un ordenador que disponía de la hoja de cálculo Microsoft Excel 2000. Los estudiantes debían resolver los problemas planteados utilizando esta hoja de cálculo.

EL DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

Se aplicó un test individual que evaluaba las habilidades previas en la lectura e interpretación de enunciados y que permitió determinar que los esquemas utilizados por los estudiantes en la solución de los problemas eran aritméticos (incluso en aquellos problemas del test que se resolvían habitualmente de manera algebraica[3]).

A continuación se desarrollo la fase de enseñanza en el aula de informática del centro a lo largo de ocho sesiones de cincuenta minutos. En ella podemos diferenciar dos partes: la familiarización del estudiante con el entorno de la hoja de cálculo y la aplicación de un modelo didáctico basado en la división en pasos ideales del MHEC.

Por último se llevó a cabo un estudio de casos que consistió en observar las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentaban a una prueba formada por cuatro problemas. Éstos se eligieron con la finalidad común de observar cómo aplicaban el MHEC, qué dificultades encontraban y qué errores cometían. La recogida de datos se realizó mediante grabaciones en vídeo y anotaciones del investigador, a partir de las cuales se obtuvo la transcripción de las sesiones. Por tratarse de una investigación que pretende observar la resolución de problemas, tomamos la decisión de que el investigador tuviera un grado de intervención muy bajo.

ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES EN EL ESTUDIO DE CASOS

Analizaremos cómo los estudiantes se enfrentaron a dos problemas que fueron seleccionados con el propósito concreto de observar cómo actuaban ante la presencia de un exceso de colisiones. El problema 1 presenta dos colisiones sobre vértice oscuro (ver Figura 2); mientras que en el problema 2 se observa una colisión en vértice claro y otra colisión en vértice oscuro (ver Figura 3).

Problema 1. En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

Número de cabezas = Nc = 20.
Número de patas = Np = 52.
Conejos = C.
Gallinas = G.
Número de patas por conejo = Pc = 4.
Número de patas por gallina = Pg = 2.
Número de patas de los conejos = Tpc.
Número de patas de las gallinas = Tpg.

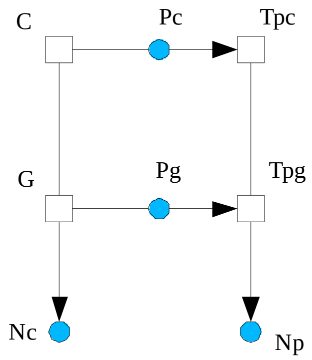

Figura 2. Grafo del problema 1.

Problema 2. Tres muchachos ganaron novecientos sesenta euros. Luis ganó veinticuatro euros menos que Joan y la décima parte de lo que ganó Roberto. ¿Cuánto ganó cada uno?

Dinero total ganado = T = 960.
Dinero ganado por Luis = L.
Dinero ganado por Joan = J.
Dinero ganado por Roberto = R.
Cantidad que resta = S = 24.
Cantidad que divide = D = 10.

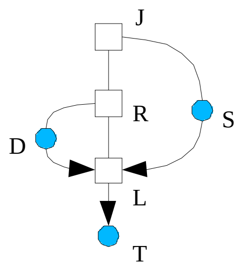

Figura 3. Grafo del problema 2.

LAS ACTUACIONES EN EL PROBLEMA 1

El problema 1 se abordó mayoritariamente de manera aritmética y ninguna pareja consiguió resolverlo correctamente. Únicamente la pareja formada por Ángel y Javier utilizaron las cantidades desconocidas como conocidas, pero no tuvieron en cuenta todas las relaciones presentes en el problema.

La actuación de Ángel y Javier.

Presentamos un fragmento del diálogo que mantuvieron en el que observamos como Ángel percibe la necesidad de duplicar la cantidad Nc con la finalidad de establecer una ecuación.

Ángel: ¡Ah! Pero es que te dice cuántos conejos y cuántas gallinas. ¿No sería número de conejos y número de gallinas? O sea total de conejos y gallinas. ¿Sabes?

Javier: Sí.

Javier: Sería total de conejos y gallinas…

Ángel: Total de conejos y gallinas. (Escribe en la celda A5 “total de conejos y gallinas”.)

Javier: Veinte.

Ángel: Sí, pero podríamos hacer de otra manera.

Javier: ¿Cómo?

Ángel: Poner B1 más B2.

Javier: Sí

(Ángel escribe en la celda B5 “=B1+B2”.)

Ángel: Y ahora… ¡Madre mía! Hay dos sin número y tendría que haber una. (Inaudible). No sé me he *liao*… Es que lo de las patas sería …

La constatación de que “hay dos sin número” nos indica que Ángel se ha dado cuenta de que para resolver el problema mediante el MHEC es necesario que haya una única celda de referencia (una única celda sin número). En lugar de seguir buscando relaciones en el problema para conseguir una única celda de referencia, prefirieron intentar resolverlo aritméticamente sin llegar a la solución correcta.

LAS ACTUACIONES EN EL PROBLEMA 2

Para resolver el problema 2 los estudiantes utilizaron mayoritariamente el MHEC y tres de las parejas que emplearon este método consiguieron dar la solución correcta. Mostramos a continuación tres fragmentos en los que se observa cómo los estudiantes identifican la doble colisión y cómo se enfrentan a ella.

La actuación de Manel y Jorge.

En el fragmento de diálogo que presentamos se observa cómo esta pareja se centró en la relación entre las cantidades L y R para evitar la doble colisión.

Manel: Luis veinticuatro euros menos que a Joan. (Escribe en la celda B2 =B3-24)

Jorge: Luis la décima parte de lo que gana Roberto… (Silencio.) También dice que tiene veinticuatro euros menos que Joan, entonces no se pueden poner los dos… la décima parte… al revés será igual que por diez.

Manel: Sí.

Jorge: Esto es igual a esto por diez. (Escribe =B2*10 en la celda B4 al tiempo que habla)

La estructura de relaciones y cantidades que acabaron representando en la hoja de cálculo se muestra en la Figura 4, donde entre paréntesis se especifica la celda o celdas que representan cada cantidad.

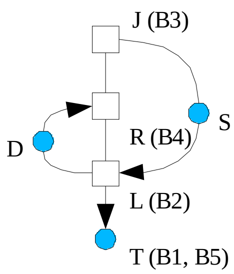

Figura 4. La representación del problema 2 en la hoja de cálculo según Manel y Jorge.

La actuación de Clara y Lucía.

Lucía elaboró un plan para deshacerse de la doble colisión en el que podemos identificar las siguientes partes: establecer como celdas de referencia las celdas que representan a las cantidades J y R; eliminar la cantidad T, y con ella la relación que producía la colisión en vértice oscuro; y duplicar la cantidad L, aquélla en la que se produce la colisión sobre vértice claro.

Clara: Ya está. A ver. Luis ganó veinticuatro menos que Joan.

Lucía: Vale pues. Es igual…

Clara: A esto menos veinticuatro. (Introduce =B3-24 en la celda B2)

Lucía: Y…

Clara: Joan ganó la décima parte… (Silencio)

Lucía: Pues vamos a poner dos libres.

Clara: Esto es igual… No.

Lucía: Espérate. Vamos a hacer una cosa. Vamos a quitar de aquí el total y vamos a poner Luis. (Eliminan la etiqueta de la cantidad T y la sustituyen por otra etiqueta para la cantidad L.)

Lucía: Y tenemos que es igual también…

Clara: A la décima parte de Joan. (Al mismo tiempo que hablan escribe =B4/10 en la celda B1)

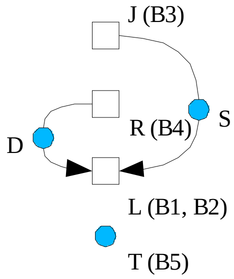

Figura 5. La representación del problema 2 en la hoja de cálculo según Clara y Lucía.

Esta pareja continuó en su empeño de obtener la solución del problema aun sin haber tenido en cuenta todas las relaciones del problema (ver Figura 5). En coherencia con la decisión de “poner dos celdas libres” (dos celdas de referencia), generaron dos secuencias iguales de posibles soluciones para las cantidades J y R. En el fragmento de diálogo que se presenta a continuación, Clara se da cuenta de que el hecho de que las dos secuencias de valores sean iguales equivale a introducir una relación entre las cantidades J y R que no aparecía en el problema.

Clara: Pero entonces ¿qué se supone?, ¿que Joan y Roberto tienen los mismas?

Lucía: No tienen los mismos. O sea no tendrían que tener las mismas. Vale me he dado cuenta; pero es que aunque salga la misma cantidad no tiene por qué (inaudible)… O sea…

Profesor: Queréis hablar un poco más alto. Aunque sea la misma cantidad, ¿qué?

Lucía: Que aunque sea la misma cantidad, si el resultado de Luis no es el mismo, es imposible que sea… Vale, y no va a dar bien.

La actuación de Jaume y Miquel.

En el fragmento de diálogo entre Jaume y Miquel se observa que evitan la doble colisión centrando su atención en la relación existente entre las cantidades L y R y entre las cantidades L y J.

Jaume: Dinero de Joan igual a dinero de Luis más veinticuatro. (Escriben =B2+24 en la celda B3.)

Miquel: A mí no me cuadra esto. Yo creo que sería…

Jaume: Espera, espera. Y dinero de Roberto… (Vuelve a leer en voz alta parte del enunciado.) Luis ganó veinticuatro euros menos que Roberto y la décima parte que Joan.

Miquel: Por eso. Sería Luis igual a dinero de Joan menos veinticuatro.

Jaume: Y dinero de Roberto sería igual a dinero de Luis…

Miquel: Correcto.

Jaume: … por diez.

Miquel: Dinero de Luis por diez.

En la Figura 6 se muestra la estructura de relaciones y cantidades que acabaron representando en la hoja de cálculo, en la que se observa cómo utilizaron como celda de referencia la celda que representaba la cantidad L.

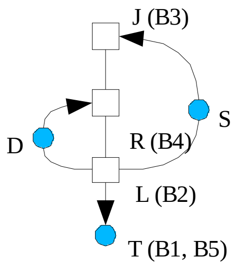

Figura. 6. La representación del problema 2 en la hoja de cálculo según Jaume y Miquel.

CONCLUSIONES

Como conclusiones teóricas destacamos que hemos elaborado una división en cinco pasos ideales del MHEC y hemos identificado las dos dificultades propias del método que su uso plantea al resolutor: el exceso de colisiones y las referencias circulares. También hemos definido y utilizado los grafos orientados para analizar la estructura de los problemas verbales cuando se resuelven en el entorno de la hoja de cálculo.

Tras la enseñanza del MHEC hemos constatado que los estudiantes utilizan elementos propios de la resolución algebraica al enfrentarse a problemas verbales; ya que son capaces de considerar las cantidades conocidas y desconocidas como si fueran conocidas y de utilizar la igualdad como comparación de dos cantidades. Además se aprecia una tendencia a trabajar con las relaciones generales que se establecen entre las cantidades de los problemas.

Respecto a las actuaciones de los estudiantes ante la presencia de colisiones, hemos de indicar que el problema 1 no proporcionó información, ya que ningún estudiante lo resolvió mediante el MHEC. La única pareja que lo intentó no consiguió establecer la relación no explicitada entre el número de conejos y gallinas, el número de patas por conejo y por gallina y el total de patas. Sin embargo, de las actuaciones del problema 2 podemos concluir que los estudiantes, ante la necesidad de resolver una colisión sobre vértice claro o una colisión sobre vértice oscuro, prefieren eliminar (o se muestran más competentes al eliminar) las colisiones sobre vértice claro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra*, pp. 115-136. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Dettori, G.; Garuti, R. & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on School Algebra*, pp. 191-207. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora,* 17-18, pp. 51-59.

Nassar, A. (2001). *El efecto de enseñar algunas estrategias de resolución de problemas en la actuación de los alumnos del nivel 3º de Secundaria al resolver problemas verbales algebraicos en Gaza (Palestina)*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In E. Filloy y T. Rojano (eds.) *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.

Rojano, T. (1996). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving Within a Spreadsheet Environment. In Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (eds.), *Approaches to Algebra*, pp. 137-145. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1991). Symbolising and Solving Algebra Word Problems: The Potential of a Spreadsheet Environment. *Proceedings of the 15th Psychology of Mathematics Education Conference*, vol. 3, pp. 207-213. Assisi, Italy.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1993a). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, pp. 353-383.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1993b). Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets. *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference*, vol. 1, pp. 189-196. Tsukuba, Japan.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1997). Pupils' Strategies and the Cartesian Method for Solving Problems: The Role of Spreadsheets. *Proceedings of the 21st Psychology of Mathematics Education Conference*, vol. 4, pp. 72-79. Lahti, Finland.

Schoenfeld, A. (1985). Making Sense of "Out Loud" Problem-Solving Protocols. *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 4, pp. 171-191.

[1] En contra de lo afirmado por Dettori, Garuti y Lemut (2001) la hoja de cálculo sí que dispone de un igual comparador.

[2] La conmutatividad de la que hablamos no es la de la operación aritmética abstracta sino la del significado en la situación de las cantidades que se operan. Por ejemplo, en una situación de cambio, la adición no es conmutativa.

[3] Evitamos referirnos a los problemas como algebraicos ya que lo que puede considerarse aritmético o algebraico es el proceso de resolución, la lectura analítica o la ecuación que traduce el enunciado; pero no el problema (Puig y Cerdán, 1990).