

Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos?*

Michèle Artigue

Resumen: La enseñanza de la matemática atraviesa actualmente un periodo de crisis y debe afrontar diferentes desafíos. En este texto, me pregunto qué puede aportar la didáctica de la matemática hoy para pensar la solución de estos problemas y afrontar sus desafíos. Intento mostrar que las evoluciones recientes del campo didáctico son en ese sentido prometedoras; me refiero en particular a tres cuestiones: la evolución de los enfoques teóricos y la articulación que favorece entre los diferentes niveles de análisis en didáctica, la evolución de la mirada sobre los docentes y, por último, la evolución de la mirada sobre las herramientas de trabajo matemático y la sensibilidad creciente a las cuestiones de instrumentación.

Palabras clave: matemática, didáctica, teoría de las situaciones, teoría antropológica, praxeologías matemáticas, praxeologías didácticas, transposición didáctica, transición institucional, álgebra, prácticas docentes, formación de profesores, representaciones semióticas, tecnología, génesis instrumental, instrumentación, calculadoras simbólicas.

Résumé: L'enseignement des mathématiques traverse aujourd'hui une période de crise et doit faire face à différents défis. Dans cet article, nous nous interrogeons sur ce que peut apporter la didactique des mathématiques pour penser la solution des problèmes rencontrés et affronter les défis actuels. Nous essayons en particulier de montrer que les évolutions récentes du champ didactique sont de ce point de vue prometteuses, en abordant successivement trois points: l'évolution des cadres théoriques et l'articulation que cette évolution favorise entre les différents niveaux d'analyse didactique, l'évolution du regard porté sur l'enseignant, l'évolution enfin du regard porté sur les instruments du travail mathématique et la sensibilité croissante aux questions d'instrumentation.

Mots clés: mathématiques, didactique, théorie des situations, théorie anthropologique, praxéologies mathématiques, praxéologies didactiques, transposition

* Traducción del francés de Amalia Bergé.

didactique, transition institutionnelle, algèbre, pratiques enseignantes, formation des professeurs, représentations sémiotiques, technologie, genèse instrumentale, instrumentation, calculatrices symboliques.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática, objeto de expectativas y de discursos poco coherentes con las decisiones políticas que se toman, sometida a las tensiones profundas que atraviesa el mundo de la educación, está hoy día en un periodo de desequilibrio.

Por ejemplo, si bien en nuestras sociedades parece ser cada vez más compartida la idea de que es necesaria una cultura matemática y científica sólida para que todos los individuos puedan ejercer sus responsabilidades ciudadanas, esas mismas sociedades se han organizado para funcionar sobre la base de una cultura matemática y científica poco profunda. Y todavía hoy día muchos de nuestros dirigentes políticos, económicos y culturales siguen declarando, casi con orgullo, no comprender nada de matemática.

Se afirma con frecuencia que la cultura matemática que necesita actualmente el ciudadano va mucho más allá del tradicional “contar” (parte integrante de la trilogía básica: saber leer, escribir y contar), pues esta cultura debe permitirle razonar en las situaciones de riesgo e incertidumbre, descifrar y saber analizar de manera crítica la avalancha de informaciones codificadas que recibe (Steen, 2002). Pero, al mismo tiempo, en muchos países se reduce la cantidad de horas dedicadas a la enseñanza de la matemática.

Paralelamente, el fenómeno de masificación de la enseñanza, que en numerosos países alcanza ahora a la universidad, obliga a hacer frente a nuevos públicos, menos sincronizados culturalmente con los valores tradicionales de la escuela, y a hacer frente a una mayor heterogeneidad. Además, independientemente de ese fenómeno, la evolución de las relaciones sociales entre niños, jóvenes y adultos desestabiliza las bases de las relaciones didácticas tradicionales, volviendo aún más problemática la posición del docente.

Al mismo tiempo, la institución escolar debe adaptarse a una evolución tecnológica cuyos tiempos son mucho más cortos que los suyos. Aun si es consciente de las nuevas posibilidades que la tecnología informática ofrece a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática, la escuela apenas si consigue sacar provecho de la integración de calculadoras y programas de geometría dinámica, aun cuando las

tecnologías de la información y de la comunicación ya se han generalizado, modificando profundamente el contexto tecnológico.

Todos esos fenómenos se producen en un mundo donde la imagen de la ciencia se ha degradado fuertemente, donde ya no se asocian sistemáticamente el desarrollo del conocimiento científico y el progreso, y donde los estudios científicos atraen cada vez menos a los estudiantes. Se producen en un mundo cada vez más rico y productivo, pero en el que las desigualdades no se reducen y son, con la evolución de las tecnologías de la información y la comunicación, cada vez más visibles e insoportables. Se producen, en fin, en un mundo donde la educación se presenta como un valor fundamental, un derecho humano, pero donde, cada vez más, tiende a concebirse como un mercado igual a otros y, se le concibe a someter los sistemas educativos a las normas de rentabilidad de los mercados.

La enseñanza de la matemática debe entonces remontar nuevos desafíos y hacer frente a nuevos problemas. La investigación didáctica, que ha tenido un desarrollo importante en el mundo entero en los últimos 30 años, ¿qué puede aportarnos para afrontarlos? Ésa es la pregunta que deseo abordar en este texto. Mi propósito no es trazar un balance esquemático de los avances de las investigaciones, sino mostrar cómo algunas evoluciones recientes del campo didáctico nos permiten hoy día abordar de manera renovada –y espero, más eficaz– estos desafíos. Me apoyo para ello, principalmente, en los trabajos que conozco mejor: los de la didáctica francesa, pero deseo subrayar que las evoluciones que voy a puntualizar superan ampliamente el marco de esta didáctica. Vemos en las obras didácticas, en formas diferentes y teniendo en cuenta la diversidad de las culturas didácticas, evoluciones similares en la investigación, donde sea que ésta se lleve a cabo.

En un texto, es necesario hacer elecciones y he hecho las siguientes: me centraré en un pequeño número de evoluciones, de avances que me resultan particularmente característicos:

- Una mejor articulación de lo microdidáctico y de lo macrodidáctico a través de enfoques teóricos parcialmente renovados.
- Una nueva mirada sobre ese actor esencial de la relación didáctica que es el docente.
- Una mayor atención a las herramientas materiales y simbólicas de la actividad matemática, a su papel en los aprendizajes y una mirada más lúcida sobre la evolución tecnológica y sus posibles efectos.

LA EVOLUCIÓN DE LOS ENFOQUES TEÓRICOS

De manera universal, la investigación en didáctica de la matemática se desarrolló inicialmente centrándose en el sujeto que aprende, rechazando el hecho de verlo como un simple receptor de conocimientos y saberes, preocupada más bien por tener en cuenta sus concepciones y el modo en que éstas modelan los aprendizajes y son transformadas por ellos; en una palabra: restituyendo a quien aprende una dimensión epistemológica. Esto constituyó, sin duda, un primer paso en el abordaje de la realidad que nos preocupa –la enseñanza de la matemática–, pero no fue más que un primer paso. En el clásico triángulo que vincula profesor, alumnos y saberes, la investigación introducía un desequilibrio evidente, centrándose en uno de los polos. Aun la didáctica francesa, en el seno de la cual la teoría de situaciones creaba *a priori* un foco de atención diferente, no escapó a ese desequilibrio ni a sus efectos, como veremos en seguida.

Efectivamente, en la teoría de las situaciones didácticas (cf. Brousseau, 1996, para una visión sintética), el objeto fundamental no es el sujeto que aprende, sino la situación en la que ese sujeto interactúa con otros y con la matemática. El análisis se organiza alrededor de la situación, ya que ésta –debido a las restricciones y potencialidades que ofrece al reencuentro con el saber– nos permite conocer lo que *a priori* puede ser aprendido. A través del juego que se ejerce sobre las variables didácticas de esta situación, se puede esperar –en un sentido por precisar– optimizar el aprendizaje. La teoría de situaciones didácticas nos ha permitido comprender mejor los mecanismos fundamentales del juego didáctico y construir ingenierías didácticas (Artigue, 1989, 2002) apoyadas en esta comprensión, en este conocimiento. Los trabajos pioneros de G. Brousseau sobre el aprendizaje del número en la escuela elemental ofrecen, sin duda, el mejor ejemplo, pero los ejemplos de ingenierías didácticas desarrolladas por los investigadores sobre la base de esta teoría son muchísimos, desde la escuela maternal hasta la universidad.

Muy rápidamente, la teoría de la transposición didáctica, iniciada por Y. Chevallard (Chevallard, 1985) contribuyó a reforzar este enfoque sistémico de la didáctica francesa, proporcionándonos, esta vez, los medios para cuestionar los saberes escolares, para interrogarnos sobre sus fuentes de legitimidad, sobre su economía y su ecología. Así como el alumno no podía ser visto como un experto “en miniatura”, el saber escolar no podía ser considerado simplemente como una copia débil del saber sabio que lo legitimaba. El saber escolar obedecía a una lógica propia, vivía su vida según el designio de las instituciones didácticas; y a tra-

vés de un proceso complejo -el de la transposición didáctica- nos mostraba en la vida real de las clases, objetos a menudo muy alejados de los que se suponía que eran, pero explicables y comprensibles para el investigador.

Aun si todas estas construcciones ayudaron a hacerse cargo de la complejidad de los sistemas estudiados y sus dinámicas -incluso mejor que otras en su época-, sus límites permanecían muy visibles. En el trabajo dentro de la teoría de las situaciones didácticas, la intensidad de la mirada puesta sobre los actores clave de la relación didáctica -alumno y docente- era profundamente asimétrica. Y la relación que se podía establecer entre los niveles microdidácticos de análisis del funcionamiento del alumno o de la clase y el nivel macrodidáctico de análisis del funcionamiento de los sistemas didácticos quedaba limitada.

En la didáctica francesa, el desarrollo de la teoría antropológica, también iniciada por Y. Chevallard (Chevallard, 1991), ha desempeñado, sin lugar a dudas, un papel decisivo en la articulación de lo micro y lo macrodidáctico, como lo ha hecho en otras culturas didácticas la transición hacia enfoques socioculturales inspirados en los trabajos de Vigotsky (Sierpinska y Lerman, 1996). Para este enfoque, el objeto de base no es el sujeto que aprende ni la situación didáctica, sino la institución en la que están insertos. Los saberes no existen sino como emergentes de prácticas¹ situadas institucionalmente. Esas instituciones, a través de las prácticas que reconocen y valoran, crean sistemas de valores y normas en relación a los saberes, y saber alguna cosa -las fracciones, el álgebra, las funciones- sólo puede tener un sentido relativo. Para una institución dada, es poder producir ciertos comportamientos, discursos acordes con las normas y valores institucionales, lo que Y. Chevallard llama "relaciones institucionales". En las instituciones, las expectativas relativas a los saberes, los papeles que se ejercen, dependen fuertemente de las posiciones institucionales ocupadas, la del alumno no es la del docente, y se diferencian sutilmente a partir de esas dos importantes categorías. Ciertamente, no se trata más que de un esquema trazado rápidamente pero, espero, suficiente para permitir comprender cómo la perspectiva didáctica se ve modificada. Ya no se concibe pretender entender los fenómenos de enseñanza y aprendizaje en sus relaciones mutuas sin tener en cuenta estas características de los sistemas estudiados.

Añadiré algo que me parece importante. Para nosotros, no se trataba de susti-

¹ Chevallard utiliza, para tener en cuenta estas prácticas, la noción de praxeología. Una praxeología matemática está formada por un tipo de tarea, por una técnica que permite resolver esta tarea, por una tecnología (discurso que sirve para explicar y justificar esta técnica) y, finalmente, una teoría que, pudiendo permanecer implícita, fundamenta esta tecnología.

tuir un paradigma por otro, sino más bien de integrar estas diferentes aproximaciones teóricas en una construcción global y coherente, donde cada una tenga su lugar, su función, y en donde se organicen de manera más eficaz las relaciones entre las diferentes centraciones posibles en las investigaciones didácticas y entre los diferentes niveles de análisis, del microdidáctico al macrodidáctico. Voy tratar de ilustrarlo mediante un ejemplo.

UN EJEMPLO ILUSTRATIVO

El ejemplo elegido es la investigación de una de mis estudiantes, B. Grugeon (Grugeon, 1995). Ella elaboró una tesis, defendida en 1995, que constituye sin duda un trabajo pionero en esta articulación. Esta investigación surgió de un problema institucional: el relativo fracaso de las clases de adaptación creadas en Francia para permitir que los mejores alumnos que salían de los liceos profesionales se unieran a la enseñanza general.² Los alumnos empezaban motivados, seguros de sí, pero en pocos meses muchos de ellos empezaban a fracasar y a perder confianza en sí mismos. El centro del fracaso era el álgebra. En el nivel de las explicaciones de la disfunción, se habían desarrollado razonamientos muy tentadores, como el siguiente: la orientación de esos alumnos hacia la enseñanza profesional se debía mayoritariamente a su fracaso en la enseñanza general; entonces, no era sorprendente que algunos años más tarde, a pesar de ciertos éxitos locales, fueran alumnos cognitivamente incapaces de seguir una enseñanza general. Inclusive las investigaciones en didáctica del álgebra podrían haberse puesto directamente al servicio de los argumentos en ese momento, puesto que permitían proponer a los alumnos un buen repertorio de tareas, de relacionar sus respuestas con categorías bien definidas y de interpretarlas en términos de concepciones y de niveles de conceptualización, para constatar la debilidad de estos últimos.

¿En qué ha cambiado en esta investigación el hecho de adoptar un enfoque antropológico?

Lo que este enfoque ha cambiado es la problemática de la investigación en sí misma, proyectando el problema encontrado en una categoría mayor de pro-

² Existen en Francia dos tipos de liceos: los de enseñanza general y tecnológica, donde se cursa el bachillerato general o tecnológico en tres años, y los de enseñanza profesional, que preparan primero en dos años para el BEP (diploma de estudios profesionales) y luego para el bachillerato profesional (dos años más). En los liceos profesionales, la enseñanza es mucho más práctica y ligada al aprendizaje de profesiones particulares.

blemas: los problemas de transición institucional, pues lo que estaba en juego en principio era la transición entre dos instituciones: el liceo profesional y el liceo de enseñanza general. La teoría antropológica nos conducía a postular que estas dos instituciones habían desarrollado relaciones institucionales diferentes con el dominio del álgebra, reconocido por ambas como dominio de enseñanza. Por eso, pasar de una institución a otra sólo necesita un cambio de cultura algebraica y se debía preguntar: ¿Cómo lo manejaba el sistema?

Las diferencias en las relaciones institucionales pueden ser de naturaleza diversa. Ciertos objetos pueden existir en una institución y no en otra. Por ejemplo, en la institución liceo profesional existen contenidos que involucran nociones de matemática financiera: fórmulas vinculadas al cálculo de tasas, de devoluciones de préstamos, que no están en el programa de la enseñanza general. Asimismo, en un nivel similar, ciertos saberes sobre las funciones están en el programa de enseñanza general y no en el de enseñanza profesional. Pero no son éstas las diferencias más problemáticas, sino las más visibles. Mucho más problemáticas son las diferencias de relación institucional sobre los objetos comunes, porque se piensa que se habla de la misma cosa, que se esperan las mismas cosas, en otros términos, que no cambia el contrato didáctico, pero no es así. Esas diferencias son la fuente esencial de los malentendidos de la transición institucional.

A ésta se une otra dificultad también inherente a las transiciones institucionales. Los conocimientos matemáticos que desarrollamos están fuertemente contextualizados –otros dirían situados–, asociados a ciertas experiencias matemáticas, a ciertos episodios de vida. Sólo una pequeña porción de esos conocimientos es descontextualizada bajo la forma de saberes. Los docentes lo saben bien, aun si no lo explicitan y ese conocimiento se manifiesta en las estrategias que desarrollan para ayudar a los alumnos a movilizar los conocimientos necesarios, evocando un momento, un episodio de la historia de la clase. Toda transición institucional impide estas estrategias de evocación, pues no hay más historia que compartir y el establecimiento de conexiones que permite la movilización de conocimientos –que pasa a estar bajo la responsabilidad del alumno– se vuelve mucho más aleatorio.

Postular la existencia de estos fenómenos antes de haber buscado identificarlos con precisión conducía a reproblematicar la investigación. ¿Era legítimo atribuir el fracaso en álgebra de estos alumnos en proceso de transición institucional solamente a sus debilidades cognitivas? Incluso si existían ciertas debilidades, ¿no podía plantearse la hipótesis de que este fracaso era debido, en parte, y reforzado, por las diferencias sutiles de la relación institucional? Generadoras de malentendidos,

impedirían a los alumnos comprender las expectativas de los docentes y reinvertir sus conocimientos para hacerles frente y, en sentido inverso, impedirían a los docentes reconocer los conocimientos de sus alumnos y ayudarles a movilizarlos. ¿Y no podía pensarse que era más razonable y constructivo para entender y quizás para ayudar a resolver este problema institucional, investigar primero las diferencias de relaciones institucionales y sus efectos posibles en términos de malentendidos?

Ése fue el proyecto de investigación que emprendió B. Grugeon, enfocándose en el problema de la transición en álgebra entre el liceo profesional y el liceo general, y rechazando el hecho de caer en las primeras interpretaciones tan tentadoras. Para estudiar las relaciones institucionales con el álgebra desarrolladas por ambas instituciones, así como las relaciones personales hacia este dominio desarrolladas por los alumnos, ella construyó inicialmente una herramienta metodológica: una malla multidimensional de análisis de la competencia algebraica que se suponía, *a priori*, independientemente de tal o cual dependencia institucional. Construyó esa malla, apoyándose, ciertamente, en los múltiples trabajos existentes en didáctica del álgebra y esto la condujo a organizar esta estructura alrededor de cuatro dimensiones de naturaleza cualitativa con vistas a determinar las coherencias curriculares o las coherencias en el funcionamiento de los alumnos:

- Una dimensión aritmética-álgebra (con vistas a situar la posición en relación con la transición aritmética-álgebra).
- Una dimensión formación y tratamiento de expresiones algebraicas.
- Una dimensión funcionalidad del álgebra y racionalidad algebraica.
- Una dimensión articulación entre marcos y registros susceptibles de intervenir en el trabajo algebraico.

A estas dimensiones se añadió una dimensión cuantitativa más clásica. A cada dimensión se asociaron diferentes criterios, a cada criterio valores posibles, y la herramienta se fue volviendo más fina a medida que la investigación avanzaba. Esta malla de análisis, aplicada al estudio de las relaciones institucionales a través de diferentes corpus (programas, manuales, textos de evaluación, cuadernos de alumnos) confirmó la existencia de diferencias en las relaciones institucionales relativas a objetos comunes, y su poca visibilidad en los programas y textos oficiales. Asociada a una veintena de tareas de diagnóstico, sirvió también para estudiar las relaciones personales desarrolladas por los alumnos y para obtener, para cada uno de ellos, un perfil, poniendo en evidencia no solamente un grado de des-

treza en relación con las principales categorías de tareas algebraicas, sino también coherencias de funcionamiento que permiten identificar mecanismos posibles para su progreso en ese campo del álgebra. Esto mostró otro punto de vista mucho más constructivo sobre los alumnos. También puso en evidencia que, para estos alumnos, surgidos de la enseñanza profesional en la que la cultura algebraica estaba organizada principalmente alrededor del mundo de las fórmulas –y no como en el liceo general, alrededor del mundo de las ecuaciones y de las funciones–, eran posibles otros procesos de evolución que pasan especialmente por enriquecer el trabajo sobre las fórmulas, por volverlo técnicamente más complejo de manera progresiva y envolverlo en un pensamiento variacional y, en una segunda etapa, por relacionar este mundo de las fórmulas que les es familiar con el mundo funcional. Esto ha permitido realizar, en otra etapa de la investigación, una ingeniería didáctica mejor adaptada a estos alumnos y obtener, al cabo de dos años, resultados si no milagrosos, al menos sorprendentes.

Quiero señalar, para terminar con este ejemplo, que la herramienta metodológica construida fue adaptada a continuación al estudio de la transición *collège-lycée*³ en álgebra, y que el modelo de competencia algebraica asociado ha sido considerado de interés por investigadores en inteligencia artificial. De allí han surgido nuevos proyectos: el proyecto PEPITE, que condujo a la elaboración de un test de diagnóstico informatizado y a la automatización parcial del diagnóstico, a continuación y más recientemente, el proyecto LINGOT, una de cuyas ambiciones es asociar una versión dinámica del test con familias de situaciones de aprendizaje en álgebra, parametrizables a nivel de variables didácticas de tareas, de medios de resolución y de control y también de interacción didáctica. Se proponen al docente familias de situaciones y elecciones de parámetros en esas familias –en términos del perfil diagnosticado– para ayudarlo en su tarea de frente a un público cada vez más heterogéneo (Artigue *et al.*, 2001; Delozanne *et al.*, 2002).

UNA NUEVA MIRADA SOBRE EL DOCENTE

El segundo punto que abordaré es el de la mirada sobre el docente. Como he dicho anteriormente, al comienzo el docente no fue considerado un actor problemático de la relación didáctica como lo fue el alumno. Éste ya no es el caso hoy día; se han multiplicado las investigaciones que tratan sobre los docentes,

³ Secundaria-bachillerato.

sus concepciones y representaciones, sus modos de acción y de decisión, sus conocimientos y competencias. Síntesis como la de Thompson (1992) muestran que, en un comienzo, como en el caso de los alumnos, lo que estuvo en el foco de las investigaciones fue el estudio de concepciones, representaciones y creencias de los docentes, motivado por las dificultades encontradas en la articulación entre teoría y práctica, especialmente las dificultades encontradas para asegurar la difusión de construcciones didácticas elaboradas por los investigadores, aun teniendo pruebas de su eficacia en el terreno experimental. La hipótesis hecha en ese momento era que la distancia entre investigadores y docentes en relación con la matemática, su enseñanza y aprendizaje constituían un obstáculo para esta difusión. En Francia, el campo de la didáctica se ha inspirado en trabajos de psicología social (como Abric, 1987) para explicar la formación y la estructura de esas representaciones. Sin embargo, muy rápidamente los lazos entre representaciones y acción didáctica se revelaron como muy complejos y se planteó, entonces, la cuestión de los determinantes de la acción didáctica y del papel exacto que desempeñaban las representaciones de los docentes sobre la matemática y el aprendizaje entre esos determinantes. Otras investigaciones se desarrollaron con vistas a comprender el funcionamiento del docente en un sentido amplio, sus tomas de decisión en la clase y fuera de ella, y aquello que gobierna estas decisiones, con vistas a identificar las diferentes acciones profesionales del docente y los conocimientos que subyacen, con un objetivo más amplio: identificar los conocimientos y competencias necesarias para el ejercicio de esta profesión y el modo en el que se desarrollan (Margolinas y Perrin, 1997).

En las investigaciones francesas, los principales marcos teóricos existentes han ofrecido sus contribuciones. En la teoría de situaciones didácticas, se han explotado especialmente los trabajos sobre la estructuración del *milieu*, haciendo posible identificar diferentes posiciones y papeles para el docente. La estructuración inicial del *milieu* descendente ha sido completada con una estructuración ascendente, y ha sido posible tener en cuenta el trabajo del docente fuera de la clase en la dimensión de alguien que concibe situaciones de enseñanza (Margolinas, 2002). En la teoría antropológica, se ha realizado un trabajo sistemático para identificar las acciones profesionales del docente y encontrar los medios de describir, caracterizar y evaluar las praxeologías didácticas, definidas de manera paralela a las praxeologías matemáticas, en términos de tareas didácticas y técnicas didácticas que permiten realizar esas tareas, técnicas que permanecen bajo el control de tecnologías didácticas, esto es, de discursos que permiten explicar y justificar las técnicas y, en algunos casos, de teorías didácticas (Chevallard, 1999).

Por otra parte, se han desarrollado construcciones más específicas, como el “doble enfoque” desarrollado por A. Robert y J. Rogalski (Robert, 2001), doble enfoque porque se sitúa en la convergencia de dos campos: el campo de la ergonomía cognitiva, que analiza los procesos cognitivos en situación de trabajo, y el campo de la didáctica de la matemática. En este doble enfoque, el docente es considerado como un individuo que ejerce su oficio en un ambiente a la vez dinámico y abierto. El carácter dinámico no necesita, pienso, explicaciones; abierto significa que no se trata de un sistema dinámico aislado, sino de un sistema que tiene permanentes relaciones con su exterior. Como lo han mostrado los ergónomos, estas dos características –dinámico y abierto– hacen un trabajo profesional particularmente difícil y exigente en competencias.

El objetivo de este enfoque es contribuir al análisis y a la comprensión de las prácticas de los docentes, tanto desde el punto de vista de lo que pueden engendrar en términos de aprendizaje de los alumnos, como desde el punto de vista de las normas y coerciones profesionales a las que responden, en relación con el propio docente, no sólo en relación con sus alumnos.

Desde este doble enfoque, por ejemplo, las sesiones de clase son analizadas, desde un comienzo, según tres dimensiones: la primera se vincula con los contenidos trabajados en clase y la distribución de las actividades previstas entre el docente y los alumnos, la segunda, se refiere a las formas de trabajo de los alumnos durante las sesiones y la tercera concierne a la interacción con el docente. Estos análisis conducen a una lectura de las prácticas del docente según dos componentes: el componente “cognitivo”, que resulta del análisis de lo que es planificado por el profesor para actuar sobre los conocimientos matemáticos de los alumnos, y el componente de “mediación”, que informa sobre la organización del docente en su clase a propósito de las mediaciones entre él y los alumnos o entre los alumnos. A continuación, a fin de obtener las regularidades en las prácticas de un mismo profesor o entre profesores y de precisar el margen de maniobra realmente empleado por los docentes, se consideran otros dos componentes: el componente “social”, relativo a las restricciones institucionales y sociales que pesan sobre las prácticas docentes, y el componente “personal”, ligado a las concepciones del profesor en cuanto al saber y a su oficio, su tolerancia en materia de correr riesgos, su necesidad de confort... Finalmente, los diferentes análisis se cruzan para reconstruir lo que se hace visible en las sesiones de clase del sistema complejo y coherente que constituyen las prácticas de los profesores estudiados.

Es evidente que estos trabajos de investigación que nos brindan un acceso más realista al trabajo del docente influyen en nuestra percepción de la relación

entre teoría y práctica, y de la formación, elemento crucial en el establecimiento de esa relación. El docente es considerado menos como un guía sabio o como un ingeniero de la educación, y más como un profesional que trabaja en ambientes complejos y cambiantes a los que debe adaptarse sin cesar. Las acciones de formación que se apoyan en estos trabajos se tornan más respetuosas de la realidad de las prácticas, de sus modos de elaboración y de evolución, de las restricciones diversas del oficio del docente. La evolución de las prácticas es vista como un proceso de largo plazo que debe tener en cuenta las coherencias de cada docente, su estilo. La distancia entre lo antiguo y lo nuevo es visto en la dinámica de esta evolución como una variable crítica.

Como en la parte precedente, me gustaría ilustrar este discurso general con algunos ejemplos. He elegido dos. Se trata de dos tesis recientemente defendidas dentro de mi grupo de investigación, el equipo DIDIREM, uno de cuyos polos fuertes es la investigación sobre las prácticas docentes. Se trata de las tesis de E. Roditi (Roditi, 2000) y de A. Lenfant (Lenfant, 2001).

LA TESIS DE E. RODITI: EL ANÁLISIS DE PRÁCTICAS DE DOCENTES COMUNES

Esta tesis trata sobre el análisis de prácticas de docentes comunes y se apoya en el doble enfoque mencionado anteriormente. El tema estudiado es la multiplicación de números decimales; la investigación se llevó a cabo en un momento en el que un cambio curricular hizo pasar la enseñanza de esa multiplicación del último año de la enseñanza elemental al primer año de la enseñanza secundaria. En un primer momento, E. Roditi estudia las cuestiones didácticas vinculadas a la enseñanza de ese tema, apoyándose en las numerosas investigaciones existentes en ese dominio, y analiza varias ingenierías didácticas, producto de la investigación sobre la extensión del campo de números enteros al de los decimales, que constituyen recursos para esos aprendizajes. Roditi estudia y compara, a continuación, las prácticas de cuatro docentes experimentados que utilizan el mismo manual y trabajan en ambientes escolares comparables. El enfoque utilizado, como lo hemos señalado antes, conduce a postular la coherencia de esas prácticas y a tratar de identificarlas.

El análisis llevado a cabo revela restricciones habituales fuertes ligadas a las prescripciones de la institución escolar y al ejercicio del oficio. Estas restricciones explican, sin duda, la gran convergencia de los cuatro proyectos observada en el nivel global y contribuyen, ciertamente, al débil impacto que han tenido sobre

esos proyectos los trabajos didácticos existentes. Pero la investigación muestra también que, más allá de esas restricciones, subsiste un margen de maniobra que los docentes revisten de una lógica personal que explica, más localmente, la diversidad de las prácticas observadas. Los escenarios previstos se distinguen por la estrategia de enseñanza, tanto por las tareas propuestas como por la gestión de la institucionalización. Según los docentes, las actividades de los alumnos varían sensiblemente entre objetivos de construcción de conocimientos y de simple aplicación de técnicas; sus intervenciones en clases varían tanto como sus interacciones con el profesor.

Pero sean cuales sean las diferencias identificadas, se nota en el trabajo de los cuatro docentes observados una organización didáctica de sesiones de clase constituidas por episodios cortos, de modo que cada uno permite marcar lo que E. Roditi llama un éxito de etapa. Una organización tal, que parece totalmente estable para esos docentes, se sitúa en las antípodas de las organizaciones didácticas elaboradas por los investigadores en el marco de las ingenierías didácticas mencionadas anteriormente, y no nos sorprendemos de verlas tan poco explotadas. La distancia entre las dos organizaciones didácticas es demasiado grande, la asimilación es imposible. Otro fenómeno absolutamente interesante, revelado por este estudio tan minucioso, es la cantidad de incidentes que intervienen durante las sesiones. E. Roditi le da a esta noción un sentido amplio: llama *incidente* a todo suceso en el que interviene una distancia entre las expectativas de la enseñanza y la realidad de la clase y esto, incluso si esa distancia es esperada por el docente (por ejemplo, cuando plantea una pregunta y espera ver aparecer tal o cual respuesta errónea), casi conscientemente provocada. El promedio de tales incidentes es del orden de 40 incidentes por sesión de clase. Lo que nos interesa de ese número, más que su valor, es que nos muestra la incertidumbre asociada al ejercicio de ese oficio y la importancia que revisten las tomas de decisión en la acción, características que han sido, durante mucho tiempo, subestimadas por la investigación didáctica, aun habiendo efectos evidentes en la relación entre teoría y práctica.

LA TESIS DE A. LENFANT: LA CONSTRUCCIÓN DE LA PROFESIONALIDAD DOCENTE EN ÁLGEBRA

La tesis de A. Lenfant trata sobre el paso de la posición de estudiante a la posición de docente y el desarrollo de competencias profesionales entre docentes de-

butantes. Ha sido elegido un dominio matemático, el álgebra elemental, por varias razones: su importancia curricular y el hecho de que la entrada en el álgebra supone dificultades conocidas por ser particularmente resistentes, la riqueza de las investigaciones didácticas en este dominio, el hecho de que los docentes están todos –mal o bien– involucrados en este aprendizaje. La transición se estudia a través del seguimiento de profesores residentes durante su año de formación profesional en el IUFM,⁴ año durante el cual tienen a su cargo seis horas por semana de clases. Mediante este estudio se hizo el seguimiento de profesores residentes de diferentes niveles –de primero a quinto año de la escuela secundaria–, pero la tesis se centra en cuatro de ellos: docentes que ejercen su residencia en el tercer año de la escuela media, esto es, el primer año de liceo. El estudio tiende a responder, en particular, a las siguientes preguntas: ¿Cómo construir y evaluar la visión de la apuesta de la enseñanza del álgebra, su visión de los alumnos y las dificultades encontradas por estos últimos? ¿Cómo elaboran los docentes sus estrategias de enseñanza y cuáles son sus prioridades en este dominio?

En el plano teórico, la investigación se apoya en el doble enfoque didáctico y ergonómico ya citado, y en el enfoque antropológico. Para sus análisis, se apoya, además, en una malla multidimensional de análisis de competencias profesionales en álgebra, una elección metodológica inspirada en el trabajo de B. Grugeon. Esta malla, organizada alrededor de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica, no se pensó como un instrumento normativo que resume las expectativas de la formación profesional, sino más bien como una referencia para el análisis que permite centrar la atención en el estudio de concepciones de profesores residentes y en ciertos puntos clave de sus prácticas identificados por las investigaciones didácticas:

- Ruptura aritmética-álgebra (estatuto de las letras y de las expresiones, estatuto de la igualdad), sentido de las escrituras algebraicas... (dimensión cognitiva).
- Conocimiento e interpretación de documentos curriculares, utilización hecha de recursos didácticos existentes, de tecnologías informáticas... (dimensión didáctica).
- Representación del álgebra y de su funcionalidad matemática... (dimensión epistemológica).

⁴ IUFM: Instituto Universitario de Formación Profesional. Los IUFM aseguran la formación profesional inicial de los docentes que son elegidos para la enseñanza secundaria a través de un concurso nacional, que se prepara después de haber obtenido una licenciatura en matemática en la universidad.

Una vez más, la investigación ha puesto de relieve regularidades importantes en la constitución y evolución de la relación de los profesores residentes estudiados con el álgebra:

- Una visión inicial del álgebra ligada al álgebra universitaria de estructuras –propia de la posición de estudiante– y un establecimiento, en general rápido, de la postura de docente, con un estilo de enseñanza que ya se percibe.
- La pronta sensibilización a ciertos errores de los alumnos, pero una progresión muy lenta en la elaboración de sistemas de interpretación de esos errores y una sensibilidad más difícil de armar para con los problemas ligados al sentido de las escrituras algebraicas.
- Al comienzo, una visión limitada sobre la funcionalidad del álgebra, centrada en el mundo de las ecuaciones, que parece difícil de superar.
- Una organización dinámica bien pensada y relativamente rica del trabajo algebraico en sus competencias más técnicas, pero dificultad de articular lo antiguo y lo nuevo, actividades introductorias e institucionalización del curso, de entregar verdaderas responsabilidades a los alumnos y escasisíma utilización de calculadoras y programas...

Sin embargo, la investigación muestra igualmente una cierta diversidad de los perfiles profesionales y de sus evoluciones. Varios factores contribuyen a explicarlo, especialmente las condiciones de trabajo de los profesores residentes, su nivel de reflexión, sus representaciones sobre la matemática y a su enseñanza, ciertos incidentes críticos que, finalmente, tienen lugar en sus clases. Se ve entonces que se desprenden de este estudio cuatro perfiles de docentes con sus propias características y coherencias. Por último, esta investigación, a través del dispositivo experimental utilizado para estudiar las reacciones y análisis de los profesores residentes analizados, cuenta con extractos de videos realizados en sus respectivas clases, poniendo de relieve la potencia de esos objetos para la formación.

En cierto sentido, la evolución de nuestra mirada sobre la enseñanza es lo que ha motivado estas investigaciones, pero desearía resaltar, para concluir esta parte, cuánto han aportado estas investigaciones, modificando nuestra mirada sobre los docentes, sobre las relaciones entre teoría y práctica y sobre la formación de docentes.

LA ATENCIÓN CRECIENTE PUESTA EN LAS HERRAMIENTAS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA Y EN LOS PROCESOS DE INSTRUMENTACIÓN ASOCIADOS

El tercero y último aspecto que deseo abordar es el de la atención creciente a la cuestión de las herramientas de la actividad matemática y a sus efectos.

El estudio de las investigaciones en didáctica de la matemática muestra, en efecto, un aumento en la atención puesta en las herramientas materiales y simbólicas de la actividad matemática. La evolución de los enfoques teóricos hacia los paradigmas de naturaleza sociocultural y antropológica sin duda no son extraños a esto (Sierpinska y Lerman, 1996); tampoco lo es la evolución tecnológica que conduce a la enseñanza de las matemáticas a herramientas cada vez más sofisticadas. Esta atención se manifiesta de diferentes maneras. En los trabajos franceses de didáctica de los diez últimos años, las investigaciones de R. Duval (Duval, 1995) sobre las representaciones semióticas y los trabajos de Y. Chevallard y M. Bosch (Bosch y Chevallard, 1998) sobre los ostensivos son, sin duda, los ejemplos más significativos, y las construcciones teóricas que les fueron asociadas han sido ampliamente retomadas por los investigadores.⁵ Las representaciones semióticas no están para representar ni comunicar una conceptualización ya presente, sino que son constitutivas de la conceptualización. Duval expresa esto de manera muy sintética diciendo que no hay “noesis sin semiosis”. En los trabajos de Chevallard y Bosch, sin embargo, no es la cuestión de la conceptualización lo que está primero, sino la dialéctica entre lo ostensivo y lo no ostensivo.

Precisemos qué se entiende por estos términos. Los objetos matemáticos son objetos no ostensivos: no se los puede ver, manipular, tocar, en el sentido físico de estos términos. El trabajo sobre estos objetos pasa, en efecto, por la manipulación de ostensivos de naturaleza diversa: escrituras simbólicas, dibujos y esquemas, lenguaje natural, gestos, artefactos diversos... Las relaciones entre ostensivos y no ostensivos son relaciones dialécticas: los no ostensivos surgen de praxeologías matemáticas que ponen en juego los ostensivos, pero, en sentido inverso, conducen la manipulación de estos ostensivos y les dan sentido.

⁵ Señalemos que esta atención a las herramientas del trabajo matemático no es exclusiva, tal como lo hemos señalado anteriormente, de la didáctica francesa y, por citar solamente un ejemplo, nos parece bien ilustrada por los trabajos actuales de ciertos investigadores italianos que evocan a Vigotski y las teorías de la actividad, poniendo el acento en la función de mediación semiótica de estas herramientas (cf. por ejemplo Bartolini *et al.*, 1999). Podemos también mencionar la teoría de las funciones semióticas, desarrollada por Godino (Godino, 2002).

Por supuesto, lo anterior indica claramente que la atención a las herramientas materiales y simbólicas del trabajo matemático es necesaria para el alumno y/o para el que enseña, cualquiera que sea el ambiente de trabajo donde sea considerado. Pero quisiera evocar, en particular, la manera en la que esta atención nos condujo a repensar las cuestiones de integración de entornos informáticos en la enseñanza de las matemáticas y a desarrollar un punto de vista de estas cuestiones, conocido actualmente con el nombre de enfoque instrumental (Guin y Trouche, 2002; Artigue, 2002).

Este punto de vista surge de un cierto número de investigaciones dirigidas a la integración en la enseñanza secundaria de entornos de cálculo formal, en principio, según la forma de programas de computación (en particular, el programa DERIVE), a continuación bajo la forma de calculadoras simbólicas, en la década de 1990, a pedido del Ministerio de Educación Nacional. Como he explicado antes (Artigue, 2002), las primeras investigaciones llevadas a cabo habían puesto en evidencia un claro contraste entre el discurso sostenido y publicado de las potencialidades de estos programas para el aprendizaje de las matemáticas, por una parte, y por otra, la realidad del funcionamiento de las clases observadas, aun cuando se trataban de clases de expertos. Una constante en los discursos había llamado particularmente nuestra atención: la afirmación de que el trabajo en esos ambientes (de trabajo) liberaba al alumno de las tareas técnicas, favoreciendo un trabajo en matemática de naturaleza conceptual. Esta afirmación era contradictoria con las observaciones realizadas, que mostraban, por una parte, que el trabajo técnico, si bien modificado, no desaparecía y, por otra parte, que la actividad matemática en estos ambientes obedecía a una economía que no favorecía necesariamente a un trabajo que se podía calificar de conceptual, esto por diversas razones. La diversidad y el costo débil de las acciones posibles, comparado al costo cognitivo de la interpretación de las retroacciones del software (programa), podían favorecer métodos por ensayo y error poco estructurados; la descomposición de acciones matemáticas en una sucesión de comandos podía esconder su coherencia global; la utilización reducida que los alumnos tenían de estos programas no permitía, en general, una familiaridad suficiente con estas herramientas y, cuando se les había dado una cierta autonomía, diversos problemas técnicos venían a perturbar la actividad matemática de muchos de ellos.

Esto es lo que nos ha conducido, en el segundo proyecto llevado a cabo en clases del liceo en las que los alumnos contaban durante un año con calculadoras TI92, a interesarnos particularmente en las relaciones entre el trabajo técnico y conceptual, por una parte, y la instrumentación de esas herramientas, por otra.

En el plano teórico, esa investigación se apoyó, a la vez, en la teoría antropológica de Y. Chevallard, que sostuvo el marco general, y en las investigaciones en ergonomía cognitiva de investigadores como P. Rabardel (Rabardel, 1995), que han ayudado a considerar la complejidad de los procesos de instrumentación. En efecto, esos investigadores que estudiaron los aprendizajes en situación de trabajo tienen, por encima de los investigadores en didáctica de la matemática, la costumbre de trabajar sobre aprendizajes, situarse en entornos tecnológicos complejos e integrar especialmente componentes informáticos. Por tanto, han sido llevados a pensar las cuestiones de instrumentación, distinguiendo marcadamente el artefacto (en este caso, la calculadora) del instrumento que utilice tal o cual actor –aquí el alumno o el docente–, a través de un proceso de génesis instrumental complejo que ocurre especialmente por la elaboración o la apropiación de esquemas de acción instrumentada.

Los estudios precisos que se han llevado a cabo sobre la determinación de límites (Trouche, 1996) o sobre las variaciones de funciones (Defouad, 2000) han mostrado la complejidad insospechada de esta génesis instrumental y la imbricación de conocimientos técnicos sobre el artefacto y los conocimientos matemáticos que ponía en juego. Han mostrado también que una buena parte de esos conocimientos son ajenos al currículo oficial, en el que, aun si figura el uso de calculadoras y programas, los contenidos y valores permanecen definidos en relación con el ambiente cultural tradicional del trabajo matemático en la escuela: el ambiente de “lápiz y papel”. Para comprender este fenómeno y la medida de sus consecuencias didácticas, un enfoque antropológico como el desarrollado por Chevallard, es muy valorado, pues, según ese punto de vista, las cuestiones de normas y valores y las cuestiones de legitimidad son vistas como esenciales. Son consideradas en sus dependencias institucionales y, así, se ve aparecer una cuestión esencial: la de la legitimidad real de la tecnología informática. Ciertamente estas tecnologías son social y científicamente legítimas, pero en el nivel de la escuela, esas legitimidades no son suficientes para asegurar su integración, pues no se busca que la enseñanza forme alumnos aptos para funcionar matemáticamente con esas herramientas –lo que sería el caso, por ejemplo, de una formación de carácter profesional– se busca mucho más. Efectivamente, lo que se espera en esencia de esas herramientas es que permitan aprender más rápidamente, mejor, de manera más motivante, una matemática cuyos valores son pensados independientemente de esas herramientas. Lo que se necesita, entonces, es asegurar la legitimidad pedagógica de estas herramientas, y eso es muy distinto de asegurar su legitimidad científica o social. Esto, como hemos mostrado,

genera un círculo vicioso que encierra la formación en un esquema de militancia y proselitismo poco adecuado para otorgar herramientas que permitan a los docentes hacer frente a las dificultades que inevitablemente van a encontrar, que les permitan identificar las necesidades matemáticas y técnicas de las génesis instrumentales y responderlas eficazmente; poco adecuado también para permitirles la necesaria superación de una visión ingenua de la tecnología como remedio a las dificultades de la enseñanza.

El enfoque antropológico también nos ha sido útil por el acento que pone sobre las instituciones. Aun si nos interesamos en el aprendizaje de los alumnos, no podemos hacer abstracción del hecho de que estos aprendizajes se desarrollan en instituciones particulares y son moldeados por ellas. Las génesis instrumentales personales no pueden ser analizadas sin tener en cuenta la gestión institucional que se hace de la actividad instrumentada dentro de la clase. Las observaciones y análisis que hemos llevado a cabo han mostrado las debilidades de esta gestión institucional y las consecuencias de esas debilidades en el ámbito de las génesis personales desarrolladas por los alumnos. Han mostrado también que, mientras estemos conscientes de estos problemas y ayudemos a los docentes a asumir su papel necesario en esta gestión institucional de la actividad instrumentada, obtenemos resultados sensiblemente diferentes.

Finalmente, el enfoque epistemológico nos ha sido útil al ayudarnos a repensar la relación con la técnica y superar las oposiciones habituales entre lo técnico y lo conceptual. Partiendo del principio de que una técnica posee un valor pragmático que corresponde a las potencialidades que ofrece para producir resultados, y también un valor epistémico, en el sentido de que nos ayuda a comprender los objetos que pone en juego. Nos interesan las modificaciones introducidas en el vínculo entre esos dos valores debido a la introducción de herramientas informáticas tales como calculadoras y programas. Estas modificaciones, por lo general, van en el sentido de un debilitamiento del valor epistémico y de un refuerzo del valor pragmático.

Tomemos un ejemplo simple para ilustrar este fenómeno: el de la división euclídea de enteros. Su valor epistémico es indiscutible. Al repetir el acto de la división, se va a percibir la necesaria periodicidad del desarrollo decimal de números racionales y se va a empezar a comprender la razón. Si se utiliza una calculadora, la "inmediatez" del resultado obtenido vuelve invisible el valor epistémico de la técnica de la división. Para restaurar este valor, que nos parece esencial para la legitimación de una técnica en la enseñanza, se debe operar sobre otros mecanismos. Se podrá, por ejemplo, sacar provecho del refuerzo del valor pragmático,

para producir en un tiempo muy corto una gran cantidad de comienzos de desarrollos decimales y emitir conjeturas, y se podrá, fundamentalmente, sacar provecho de ciertos redondeos o de la cantidad limitada de dígitos que muestra la máquina para cuestionar las primeras convicciones adquiridas y plantear un verdadero trabajo matemático. Y quizá será posible, gracias a la máquina, ir mucho más lejos, interrogarse sobre la longitud de los periodos, las invariancias constatadas por un denominador dado...

Hemos hecho la hipótesis de que los docentes, aun si no lo explicitan, perciben el valor epistémico de las técnicas de lápiz y papel y perciben también la reducción de este valor inducido por la implementación informática de las técnicas. La investigación debe entonces encontrar los medios de reforzar, mediante la elección de situaciones adecuadas, el valor epistémico de las técnicas instrumentadas, si desea contribuir a asegurar su legitimidad dentro de las instituciones educativas. Esto conduce a menudo, como lo hemos mostrado, a construir situaciones que no tengan su equivalente en lápiz y papel y, por tanto, son menos imaginables. A esto contribuye también el acompañar ese trabajo sobre las técnicas instrumentadas con un discurso tecnológico (en el sentido praxeológico de Chevallard), pero no un discurso puramente descriptivo, sino un discurso que ayude a avanzar en la comprensión matemática de los objetos subyacentes.⁶ Todo esto está muy lejos de ser una tendencia natural en la enseñanza, como lo hemos mostrado, no solamente en lo que se refiere a los programas de cálculo formal, sino también, por ejemplo, en lo que concierne a las planillas de tipo Excel, programas que comparten con los precedentes la particularidad de no haber sido concebidos en un principio como productos destinados a la educación.

No insistiré más sobre esta dimensión, pero me gustaría haber convencido al lector, o al menos haber empezado a convencerlo, de que una vez más la evolución de la investigación didáctica en este dominio (para un metaanálisis de las problemáticas de los trabajos concernientes a las tecnologías informáticas en las investigaciones en educación matemática, consúltese Lagrange *et al.*, 2001) es una evolución que nos permite hoy día aproximar las cuestiones difíciles de integración de estas tecnologías en la enseñanza de la matemática, de manera renovada y, esperamos, más eficaz.

⁶ Remitimos al lector a la cita (Guin y Trouche, 2002) antes mencionada, donde estas ideas son desarrolladas y ejemplificadas.

CONCLUSIONES

Al comienzo de este texto, resaltaba que la enseñanza desestabilizada de la matemática en la actualidad debe hacer frente a diversos problemas y desafíos, y me preguntaba sobre la capacidad de la investigación en didáctica para proveer armas para enfrentar esos desafíos. Desde mi punto de vista, esta capacidad es real y algunas direcciones en las que evoluciona la investigación son promisorias desde esta perspectiva. Obligada a elegir entre la gran cantidad de investigaciones y de evoluciones, he privilegiado tres direcciones: la evolución de los marcos teóricos, la evolución de las miradas sobre el docente y la evolución de las miradas sobre las herramientas de la actividad matemática.

La primera dirección es sin duda esencial, pues ya sea implícita o explícitamente, las aproximaciones teóricas tienen influencia sobre las problemáticas de investigación, sobre la manera en que estas problemáticas son trabajadas y, por tanto, sobre los resultados que la investigación es capaz de producir. Desde ese punto de vista, he deseado destacar que la evolución de los marcos teóricos, desde un constructivismo cognitivo dominante por largo tiempo hacia aproximaciones antropológicas y socioculturales, permite un mejor acceso a la complejidad de la realidad didáctica, facilitando una mejor articulación de las diferentes escalas de análisis de los fenómenos necesariamente en juego en el trabajo didáctico, de lo micro a lo macrodidáctico.

La segunda dirección también es esencial por otras razones. Ya nadie duda, hoy día, de que los docentes son el eslabón clave de cualquier evolución de la enseñanza de la matemática. No es por azar que uno de los últimos estudios planteados por la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática concierne al docente y a la formación de docentes. Pero considerar al docente como un elemento clave del sistema no es suficiente si ese docente no es problematizado como verdadero actor, si no se intenta comprender sus prácticas y aquello que las determinan, las restricciones a las que está sujeto y sus márgenes de maniobra, los conocimientos disciplinares y otros que hacen su competencia profesional y el modo en que se construyen. En ese sentido, también me parece que las evoluciones recientes de la investigación didáctica son particularmente prometedoras.

La tercera dirección, finalmente, es la de las herramientas. Ésta también se impuso, naturalmente, de alguna manera. Por mucho tiempo, la atención prestada a estas herramientas –pese a ser esenciales para el trabajo matemático, como en cualquier otro trabajo– ha permanecido marginal. Lo esencial estaba más allá,

en el trabajo mental de los alumnos, en el estudio de sus concepciones y errores. Ya no es ése el caso hoy día y, como lo he mencionado, se puede ver el efecto de una doble evolución: evolución de los enfoques teóricos, evolución tecnológica.

Para cada una de estas dimensiones, he intentado señalar ciertas evoluciones e ilustrarlas con ejemplos, refiriéndome a los trabajos que mejor conozco. La visión dada es ciertamente parcial y no muy objetiva, refleja mi cultura, mis propias experiencias. Otros habrían elegido, ciertamente, otras dimensiones o habrían descrito en otros términos las evoluciones, aun si hubieran elegido las mismas dimensiones. Pero en el punto que espero haber convencido al lector, incluso a través de esta visión parcial, es de la riqueza de los aportes de la investigación en didáctica para ayudarnos a pensar los problemas que encontramos, para darnos la fuerza de afrontar los desafíos.

La investigación puede y debe ayudarnos a pensar, ayudarnos a desconfiar de las soluciones ingenuas y tentadoras, ayudarnos a tener en cuenta la medida de la complejidad de los problemas que debemos administrar, proponemos senderos, a la vez ambiciosos y realistas, para abordarlos, ayudarnos a acompañar las acciones y a evaluar sus efectos. Pero yo no tendría la ingenuidad de creer que la investigación puede hacer mucho más que eso. Los sistemas de decisión se le escapan y obedecen a menudo a lógicas en las cuales la investigación no sabría reconocerse. Pero cualesquiera que sean los límites de su acción, estoy profundamente convencida de que su desarrollo, tanto en su dimensión fundamental como en la aplicada, es indispensable y útil.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abric, J.C. (1987), *Coopération, compétition et représentations sociales*, Suiza, Editions del Val.
- Artigue, M. (2002), "Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.
- Artigue, M., T. Assude, B. Grugeon y A. Lenfant (2001), "Teaching and Learning Algebra: Approaching Complexity through Complementary Perspectives", en H. Chick, K. Stacey y J. Vincent, (eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, Proceedings of 12 th ICM1 Study Conference, Australia, The University of Melbourne, 9-14 de diciembre de 2001, pp. 21-32.
- Bartolini Bussi, M., M. Boni, F. Ferri y R. Gainti (1999), "Early Approach to Theo-

- retical Thinking. Gears in Primary Schools”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 39, núms. 1-3, pp. 67-87.
- Bosch, M. y Y. Chevallard (1999), “La sensibilité de l’activité mathématiqueaux os-tensifs. Objet d’étude et problématique”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 1, pp. 77-124.
- Brousseau, G. (1996), *Theory of Didactic Situations*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- (1992), “Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12, núm. 1, pp. 77-111.
- (1999), “L’analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-265.
- Defouad, B. (2000), *Etude de genèses instrumentales liées à l’utilisation d’une calculatrice symbolique en classe de première S*, Tesis de doctorado, Universidad de París 7.
- Delozanne, E., B. Grugeon, M. Artigue y J. Rogalski (2002), “Modélisation et mise en oeuvre d’environnements informatiques pour la régulation de l’apprentissage, le cas de l’algèbre avec le projet LINGOT”, *Réponse à l’appel à Projet Cognitif 2002, École et sciences cognitives: Les apprentissages et leurs dys-fonctionnements*.
- Duval, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine*, Paris, Peter Lang.
- Godino, J. (2002), “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22, núm. 2-3, pp. 237-284.
- Grugeon, G. (1995), *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l’algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d’enseignement: BEP et Première G*, Tesis de doctorado, Universidad de París 7.
- Guin D. y L. Trouche (eds.) (2002), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Lagrange, J.B. et al. (2001), “A Meta Study on IC Technologies in Education”, en M. van den Heuvel-Panhuizen, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, pp. 111-122, Utrecht, Freudenthal Institute.
- Lenfant, A. (2002), *De la position d’étudiant à la position d’enseignant: l’évolution du rapport à l’algèbre de professeurs stagiaires*, Tesis de doctorado, Universidad de París 7.

- Margolinas, C. (2002), "Situations, milieux, connaissances - Analyse de l'activité du professeur", en J.L. Dorier *et al.* (eds.), *Actes de la 11^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 141-156.
- Margolinas, C. y M.J. Perrin-Glorian (eds.) (1997), "Recherches sur la modélisation de l'enseignant", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17, núm. 3.
- Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*, París, Armand Colin.
- Robert, A. (2001), "Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21, núms. 1-2, pp. 57-80.
- Roditi, E. (2001), *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude des pratiques ordinaires*, Tesis de doctorado, Universidad de París 7.
- Sierpinska, A. y S. Lermann (1996), "Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education", en Bishop *et al.* (eds.), *Handbook of Research in Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 827-876.
- Steen, L. (ed.) (2002), *Mathematics and Democracy. The Case for Quantitative Literacy*, The National Council on Education and the Disciplines.
- Thompson, A. (1992), "Teachers' Beliefs and Conceptions. A Synthesis of the Research", en D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 127-142.
- Trouche, L. (1997), *A propos de l'apprentissage de fonctions dans un environnement de calculatrices, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Tesis de doctorado, Universidad de Montpellier.

DATOS DE LA AUTORA

Michèle Artigue

Université Paris 7, Denis Diderot, París, Francia

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

artigue@math.jussieu.fr