El “saber didáctico” en las escuelas normales. Un análisis de las praxeologías de formación

Luis Manuel Aguayo Rendón

Resumen: En este artículo presentamos un análisis de las prácticas de tres formadores de profesores de la escuela primaria y su objetivo es revisar la manera en la que éstos transmiten el saber didáctico referido a los números racionales. Para nuestro análisis, utilizamos los conceptos de la teoría antropológica didáctica (Chevallard, 1997, 1998, 2000, 2001), desde la que se considera al formador como *director del proceso de estudio* que realizan sus alumnos respecto de determinadas praxeologías didácticas. La actividad del formador se describe en términos del sistema de *tareas* que debe cumplir para dirigir la reconstrucción de dicha praxeología y de las *técnicas* que utiliza para gestionar los diferentes momentos didácticos ligados al proceso de estudio. Particularmente, mostramos las *técnicas* que los formadores utilizan para gestionar los diferentes momentos didácticos relativos al estudio de una praxeología didáctica.

Palabras clave: formación, praxeología didáctica, praxeología de formación, momento didáctico, técnica de formación.

Résumé: Dans cet article, nous présentons une analyse des pratiques de trois formateurs de professeurs de l’école primaire et son l’objectif est de réfléchir á la manière de transmettre les savoirs didactiques liés aux nombres rationaux. Par notre analyse, nous utilisons les concepts de la théorie anthropologique didactique (Chevallard, 1997, 1998, 2000, 2001), dans ce cadre, le formateur est considéré comme le *directeur du processus d’étude* que réalisent ses élevés en relation avec certaines *praxéologies didactiques*. L’activité du formateur peut s’expliquer en termes du système des *taches* qu’il doit accomplir pour diriger la reconstruction de cette praxéologie et des *techniques* qu’il utilise pour gérer les différents moments didactiques liées au processus d’étude. Nous montrons particulièrement les *techniques* qui utilisent les formateurs pour gérer les différents moments didactiques relatifs á l’étude d’une praxéologie didactique.

Mots-clés: formation, praxéologie didactique, praxéologie de la formation, moment didactique, technique de formation.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se inscribe en un proyecto de investigación más amplio cuyo objetivo es analizar la manera en la que los saberes relativos a la didáctica de las matemáticas son incluidos en los programas de estudio de las escuelas normales y las estrategias que utilizan los formadores para hacerlos *vivir* en las aulas. Para ello, hemos tomado como marco teórico la *teoría antropológica didáctica* (Chevallard, 1997, 2000, 2001, 2002a, 2000b), desde la que se asume que las investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas han producido un saber *didáctico* que es necesario transmitir a los futuros profesores y que el proceso de transmisión (o transposición) de estos saberes es un objeto de estudio que requiere analizarse desde una perspectiva didáctica.

REFERENTES TEÓRICOS

Una vez situados dentro de la teoría antropológica didáctica (en adelante TAD) y teniendo en cuenta que nuestro interés es estudiar la *práctica didáctica* del formador, en lo que sigue presentaremos algunos elementos teóricos que sustentan nuestro trabajo.

LA DIDÁCTICA COMO CIENCIA DEL *ESTUDIO*

Un principio básico de la TAD sostiene que: “... lo *didáctico* se identifica con el simple hecho de que *alguien (x) estudie alguna cosa (o)...”* (Chevallard, 1998, p. 19). Visto así, el *estudio* alude a las acciones que se llevan a cabo en una institución para realizar las tareas matemáticas que se plantean en ella, aunque el estudio no se circunscribe al ámbito escolar, hay estudio en todas las instituciones de la sociedad donde se manipula un saber establecido o en vías de establecerse.

En el caso de las matemáticas, el estudio engloba los conceptos de enseñanza y aprendizaje, puesto que la actividad de un investigador, la de un alumno que aprende matemáticas o la de un profesor que las enseña describen el proceso de estudio de un saber matemático y, por lo mismo, deben ser un objeto de estudio de la didáctica. Si bien el investigador estudia y plantea problemas para construir un nuevo conocimiento que les dé solución, el profesor y sus alumnos estudian matemáticas (ya conocidas) para reconstruir un conocimiento importante para ciertas instituciones de la sociedad.

Por lo general, el estudio es una actividad colectiva; por ejemplo, en los casos del investigador y del profesor y sus alumnos, es necesaria la ayuda de uno o varios directores de estudio y la existencia de un plan que puede ser un programa de investigación o un currículo escolar. Así, en todo proceso de estudio, el profesor aparece solamente como el director de la actividad, es sólo uno de los actores del proceso y no el protagonista principal, como ha sido visto desde la cultura escolar dominante.

La dualidad del conocimiento matemático. La actividad y el producto

Otro principio básico de la TAD sostiene la dualidad del conocimiento matemático; a este respecto se afirma que el saber matemático se construye para dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas,[1] pero también es el producto del proceso de estudio que forma parte de la actividad matemática, es decir, existe una estrecha relación entre la actividad matemática (proceso de estudio) y el saber matemático (producto). Por esta razón, desde la TAD se asume que las matemáticas son una actividad y un producto de dicha actividad, esto es, son objetos construidos y también actividades institucionales de manipulación de dichos objetos.

El conocimiento matemático como producto. La praxeología matemática

Cuando se considera a las matemáticas como producto, frecuentemente se piensa que la construcción del conocimiento matemático sólo se realiza mediante la solución o el planteamiento de ciertos tipos de problemas; sin embargo,

> el matemático no aspira únicamente a plantearse buenos problemas y resolverlos, sino que pretende, además, caracterizarlos, delimitar y clasificar los problemas en "tipos de problemas", entender, describir y caracterizar las *técnicas* que utiliza para resolverlos hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso; se propone establecer las condiciones con las que éstas funcionan o dejan de

[1] Cabe aclarar que, desde esta postura, se considera que hacer matemáticas no siempre es resolver problemas, por ejemplo: "... se pueden usar matemáticas de manera rutinaria sin que aparezca problematicidad o estudio..." (Bosch *et al.*, 2003, p. 84).

ser aplicables y, en última instancia, aspira a construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder (Bosch *et al.*, 2003, p. 85).

Así, cuando el trabajo del investigador ha concluido, al menos en lo que se refiere a un cierto tipo de problemas, el conocimiento matemático aparece estructurado en dos niveles: el de la *praxis*, donde se incluyen los tipos de *tareas* y las *técnicas* que permiten resolverlas; y el del *logos*, donde se incluyen los argumentos que justifican la validez de las técnicas empleadas y los elementos *teóricos* que dan sentido a las tareas.

Estos dos niveles forman lo que Chevallard (2000) llama *praxeología, organización praxeológica* o simplemente *organización matemática* (OM). Una praxeología matemática es diferente a la “simple” práctica, porque en ella se integra el “saber hacer” (*praxis*) con el “saber” (*logos*); por esta razón, señala este autor, lo que comúnmente se designa como “saber” no es sino una praxeología que él representa mediante el sistema $[T/\tau/\theta/\Theta]$. En éste, el bloque práctico-técnico, que designa al *saber-hacer*, se forma con los tipos de tareas (T) y las técnicas (τ) necesarias para resolverlas. El bloque tecnológico-teórico, que designa el *saber*, se forma con los discursos tecnológicos (θ) que justifican las técnicas utilizadas y los discursos teóricos (Θ) que dan sentido a las tareas planteadas.

El conocimiento matemático como actividad. Los momentos didácticos

Si tenemos en cuenta la noción de praxeología para definir el proceso de construcción matemática, podemos decir que *hacer matemáticas* es una actividad que consiste en utilizar una praxeología matemática para resolver cierto tipo de tareas y *estudiar matemáticas* es una actividad que consiste en construir (el caso del matemático) o reconstruir (el caso del alumno) ciertos elementos de una praxeología matemática que permiten dar respuesta a una tarea problemática para la que no existe o no está disponible una praxeología.

Empero, una praxeología matemática no surge de manera instantánea ni acabada para siempre, es el resultado de un proceso largo y complejo en el que se relacionan dos aspectos del trabajo matemático: el proceso de *estudio* y el producto (matemático) que resulta de dicho proceso. Estos aspectos son inseparables, porque una praxeología matemática no puede existir sin un proceso de estudio que la engendre y este último tampoco puede existir sin una praxeología en construcción. Sin embargo, lo más importante cuando se analiza la dinámica de funcionamiento de diferentes procesos de estudio es la presencia de ciertas acciones que permanecen a pesar de las diferencias temporales, culturales, sociales o individuales que caracterizan a cada proceso.

La identificación de estas acciones invariantes ha permitido construir un modelo para todo proceso de estudio basado en la noción de *momento didáctico;* esta noción no tiene una connotación cronológica, alude a las dimensiones de todo proceso de estudio, ya que dichos momentos no configuran una secuencia fija ni se desarrollan de manera aislada, cada uno puede ser planteado en distintas intensidades, tiempos, ocasiones o de manera simultánea. En opinión de Chevallard (1998), existen seis *momentos didácticos* que modelizan todo proceso de estudio, a saber:

- *El momento del estudio,* que es el primer encuentro (o rencuentro) con la organización O que está en juego. Puede tener varias maneras, una consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas $T_{i,}$ constitutivas de O.
- *El momento de la exploración* de tipos de tareas T_i y de la elaboración de una técnica τ_i relativa a este tipo de tareas.
- *El momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico* relativo a τ_i. Este momento está en relación estrecha con cada uno de los otros, por ejemplo, desde el primer encuentro se establece una relación con este entorno ya elaborado, aunque en las estrategias tradicionales se lo ubica como primer momento.
- *El trabajo de la técnica* debe mejorar la técnica volviéndola más eficaz y fiable y acrecentar la maestría que se tiene de ella.
- *El momento de la institucionalización* tiene por objeto precisar lo que es *exactamente* la OM elaborada, distinguiendo los elementos que no le hayan sido integrados y los que entran definitivamente en la OM considerada.
- *El momento de la evaluación* se articula con el de institucionalización y en él se verifica lo que *vale,* lo que se ha aprendido (Chevallard 1998, pp. 48-50).

Las praxeologías didácticas

Con base en la noción de momento didáctico, el estudio puede ser redefinido de la siguiente manera: *estudiar* matemáticas es una actividad que consiste en "vivir" los diferentes *momentos didácticos* o ayudar a los alumnos (en el caso del profesor) a "vivir" esos momentos, pero además, si tenemos en cuenta que desde la TAD,

> *toda acción procede de una praxeología*, admitiendo que esta praxeología pueda estar en curso de elaboración o que su construcción se haya detenido (...), en un estado de incompletud o de desigual desarrollo, con una técnica apenas esbozada, una tecnología incierta, una teoría inexistente (Chevallard, 1997, pp. 6-7).

Podemos decir que todo proceso de construcción matemática gira en torno de dos prácticas humanas o praxeologías, una matemática (hacer matemáticas) y una de estudio o didáctica (estudiar o ayudar a estudiar matemáticas). Así, cuando el investigador o el alumno estudian una praxeología matemática, o cuando un profesor ayuda a otra persona a estudiarla, utilizan una praxeología didáctica;[2] la del alumno es una praxeología didáctica *discente,* mientras que la que utiliza el profesor es una praxeología didáctica *docente*.

Como toda praxeología, las organizaciones didácticas (OD) se estructuran en dos niveles: el técnico-práctico, donde se incluyen los tipos de *tareas* y las *técnicas* (didácticas); y el tecnológico-teórico, donde se incluyen las *tecnologías* y las *teorías* (didácticas). Sin embargo, las OD no tienen una existencia independiente, ya que toda praxeología didáctica contiene al menos una OM de referencia y, a su vez, toda praxeología matemática está contenida en al menos una OD. Esta codeterminación entre praxeologías matemáticas y didácticas es acotada de la siguiente manera:

> ...las organizaciones "transmisoras", es decir, didácticas, se configuran de una manera vinculada a la estructura que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas dependen fuertemente de las organizaciones matemáticas por enseñar, por esta razón, la enseñanza de las OD debe tener

[2] Las praxeologías didácticas docentes son las más relevantes para este trabajo, por esta razón, cuando en lo sucesivo hablemos de praxeologías (u organizaciones) didácticas, nos referiremos específicamente a las praxeolgías *docentes*.

en cuenta su relación con las organizaciones matemáticas... (Chevallard, 2001, p. 3.)

En términos de las praxeologías, podemos decir que una OD puede construirse (por el investigador) o reconstruirse (por el alumno que estudia didáctica) mediante un proceso en el que aparecen dos aspectos de la *actividad didáctica,* un proceso de estudio y el producto de dicho proceso. Siguiendo la misma idea, *hacer didáctica* es una actividad que consiste en utilizar una praxeología (didáctica) para dar respuesta a una cuestión problemática (didáctica) y *estudiar didáctica* es una actividad que consiste en reconstruir varios elementos de una praxeología didáctica, a fin de resolver una tarea (didáctica) que resulta importante para una institución determinada.

Además, si ubicamos el estudio de una OD en el ámbito escolar, tendríamos lo que Portugais (1995) llama un "sistema didáctico de formación" que se constituye mediante un saber por estudiar (las praxeologías docentes), un alumno que estudia dicho saber (el profesor en formación) y un director de estudio (el formador de profesores). Sin embargo, como hemos señalado, una OD no puede existir de manera independiente, debe existir también un saber de referencia, esto es, una praxeología matemática.

A decir de Portugais (1995), la inclusión de este segundo "saber" genera el interjuego entre dos sistemas didácticos y un doble papel para el profesor en formación, esto es, cuando el formador dirige el estudio de una OM de referencia, su papel es similar al de un profesor de matemáticas y el papel del formado es similar al del alumno que las estudia. Cuando formador y formado ocupan estos papeles, señala Portugais, la actividad se desarrolla en el "sistema didáctico *stricto sensu",* pero, cuando el formador dirige el estudio de una OD, su papel es el de profesor de didáctica y el del formado, el de eventual profesor que intenta responder a ciertas cuestiones didácticas, en este caso la actividad se desarrolla en el "sistema de formación".

Con base en lo anterior, podemos decir que las praxeologías docentes son el saber didáctico que debe transponerse en la formación de profesores, también que el formado *hace didáctica* cuando utiliza una OD ya elaborada y que *estudia didáctica* cuando reconstruye una OD bajo la dirección del formador. Sin embargo, si advertimos que en el sistema de formación el director del estudio no desempeña el papel de profesor de matemáticas sino el de profesor de didáctica, tenemos una práctica humana (la del formador) que, en términos de las praxeologías, podemos llamar *praxeología de formación*. Al igual que toda praxeología, ésta se estructura mediante el bloque técnico-práctico, con sus tipos de tareas y técnicas (de formación), y el tecnológico-teórico con sus discursos tecnológicos y teóricos (de formación).

Ahora bien, habida cuenta de la juventud del saber didáctico, es difícil encontrar tipos de tareas, técnicas o discursos tecnológicos y teóricos de una praxeología de formación que hayan sido institucionalizados en el seno de la didáctica de las matemáticas. No obstante esta dificultad, asumiremos, como lo hace Chevallard (1998), que en una primera aproximación, las tareas profesorales pueden organizarse en dos categorías interdependientes:

$T_{1.1}$: Tareas relativas a la concepción de los dispositivos de estudio
$T_{1.2}$: Tareas relativas a la organización de los dispositivos de estudio
$T_{1.3}$: Tareas relativas a la gestión de los entornos para dichos dispositivos
$T_{2.1}$: Tareas de ayuda al estudio
$T_{2.2}$: Tareas de dirección de estudio y de enseñanza.

En correspondencia con estas categorías, una de las primeras tareas que debe cumplir el formado consiste en determinar las *praxeologías matemáticas escolares* (su contenido, tipos de tareas y profundidad que debe darse a los componentes técnico, tecnológico y teórico) a partir de las indicaciones del programa de estudios. Pero, además, este tipo de tareas pueden ubicarse en diferentes niveles de codeterminación didáctico-matemática: en el nivel pedagógico, el de la disciplina, de las áreas, de los sectores, de los temas y de las cuestiones puntuales.[3]

En el caso de las técnicas, la situación es similar, es difícil encontrar *técnicas de formación* institucionalizadas en el seno de la didáctica; sin embargo, un referente que nos permitirá analizar las técnicas que utilizan los formadores es lo que Kuzniak (1994) y Houdement y Kuzniak (1996) llaman *estrategias de formación*. Para estos autores, existen dos grupos de estrategias que utilizan los formadores para transmitir los saberes didácticos: las estrategias profesionales, que conciben la formación como una preparación profesional para el oficio de profesor, y las no profesionales, que no comparten este principio.[4] Entre las primeras se pueden enunciar las siguientes:

[3] En cada uno de estos niveles existen praxeologías didácticas que deben reconstruirse tomando como referencia una praxeología matemática. De ahí que, para Chevallard (2000), la formación de profesores, en reconstrucción de las OD, debe ser un objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas.

[4] Entre éstas se mencionan las “culturales”, que no tienen en cuenta al saber didáctico; las “basadas en la autonomía”, que brindan libertad al alumno para que reconstruya el conoci-

- *Las estrategias basadas en la acción de mostrar,* mediante la observación, ponen en contacto al estudiante con su futuro medio de trabajo, esto es, muestran la práctica que es deseable imitar. Ésta es la forma más antigua de iniciación a las prácticas profesionales, la lección modelo es un ejemplo típico de este tipo de estrategia.
- *Las estrategias basadas en la homología* se fundan también sobre un modelo de imitación pero más complejo; se caracterizan por el hecho de que los formadores enseñan de la misma manera en la que desean que el estudiante lo haga.
- *Las estrategias basadas en la transposición* se oponen a las precedentes, porque ponen el acento en el saber didáctico como saber de referencia; en este caso, los formadores asumen que existen nociones didácticas que deben transponer.

METODOLOGÍA

Para cumplir con el objetivo planteado, es necesario identificar los diferentes elementos de la praxeología de formación que los formadores utilizan para dirigir un proceso de estudio; para ello, hemos tomado como praxeología matemática de referencia los números racionales, que es un contenido del segundo curso de Enseñanza de las Matemáticas ubicado en el tercer semestre de la carrera de profesor de educación primaria.

Además, hemos observado a tres formadores que laboran en escuelas normales del estado de Zacatecas, dos en una escuela urbana y uno más en una escuela rural. La diferencia fundamental entre los formadores observados tiene que ver con su experiencia profesional, el primero (en adelante F1) tiene tres años como profesor de educación primaria y uno como formador de profesores, el segundo (en adelante F2) tiene cinco años como profesor de educación primaria y tres como formador, el último (en adelante F3) tiene 12 años como profesor de educación primaria y 16 como formador.

La observación inició con la primera sesión dedicada al estudio de los números racionales y terminó con la sesión de evaluación; cada sesión fue videograbada y transcrita, también se recogieron apuntes y trabajos de evaluación de algunos

miento por diferentes vías, y las de "investigación aplicativa", que se orientan hacia la formación para la investigación. En opinión de Houdement y Kuzniak (1996), éstas son marginales en la formación de profesores.

de los estudiantes de cada grupo y los materiales que utilizó el formador en cada una de las sesiones. Para analizar la información obtenida, cada registro de clase se dividió en "episodios", es decir se hizo "una descomposición intuitiva del proceso de estudio" (Bosch *et al.*, 2003, p. 94), considerando cada episodio como un fragmento de la clase en el que se gestiona un solo tipo de tarea, ya sea matemática o didáctica. Posteriormente, en cada episodio se analizó el *momento didáctico* dominante, el tipo de tareas que planteaba el formador, las técnicas de formación que utilizaba y los discursos tecnológicos implícitos en su práctica.

LA RECONSTRUCCIÓN DE LAS PRAXEOLOGÍAS DOCENTES

Antes de iniciar el análisis, debemos aclarar que las praxeologías que los formadores observados reconstruyen son espontáneas, es decir, utilizan técnicas que no se apoyan en saberes explícitos sistematizados *a priori*, sino en una integración de saberes venidos de distintos campos: disciplinario, didáctica o comunidad de la cual forman parte. Estos saberes, señalan Coope *et al.* (2002), viven en ciertos lugares, algunos son explícitos y se transmiten por medio de escritos, otros, compartidos por la comunidad de formadores, permanecen implícitos y se pueden transmitir oralmente. Por otra parte, debemos aclarar también que los formadores observados utilizan diferentes técnicas de formación, aunque en este caso sólo analizamos las que aparecen con mayor frecuencia en el proceso de estudio que dirige cada uno.

LA HOMOLOGÍA O *TRANSPARENCIA DEL SABER DIDÁCTICO*

Las estrategias de homología directa, señala Kuzniak (1994; p. 126), parten de una situación simple que permite tomar conciencia sobre el proceso pedagógico, pero cuando se utilizan, se corre el riesgo de que los estudiantes se resistan a ellas por la trivialidad del conocimiento matemático puesto en juego.[5] Una estrategia de este tipo es visible cuando el formador gestiona el estudio de un elemento matemático sin hacer otra referencia a las praxeologías didácticas de su propia actividad, la cual busca constituirse como modelo de dirección del estudio que

[5] La homología indirecta parte de una situación más compleja que incluye un saber matemático no trivial para los estudiantes, aunque esta novedad puede ocultar el proceso pedagógico (Kuzniak, 1994, p. 126).

el estudiante deberá imitar. Por esta razón, puede decirse que, en estos casos, la actividad se desarrolla dentro de los límites del sistema didáctico *stricto sensu*. La homología es la técnica de formación que utiliza con más frecuencia F3 y, en lo que sigue, analizaremos la manera como la gestiona.

El fragmento 1 corresponde al inicio de la homología y, como se puede apreciar (líneas 5, 6, 7, 8 y 9),[6] F3 intenta gestionar momentos del primer encuentro exploratorio mediante la devolución de la tarea;[7] sin embargo, la naturaleza de estos momentos se modifica por la institucionalización de los significados de la fracción que previamente había realizado (líneas 1y 2). Al parecer, esta modificación nos indica que el objetivo de F3 era "mostrar" uno de los significados de la fracción precisados.[8] Lo contradictorio con la homología es que, a pesar de señalar la institucionalización previa como un momento inapropiado para iniciar el estudio con niños de escuela primaria (líneas 2 y 3), F3 gestiona la institucionalización como momento inicial del proceso y, no obstante la contradicción, gestiona la tarea como un momento de exploración.

Fragmento[9] 1

1. M: Hemos visto los diferentes significados de las fracciones, en el entendido de que
2. ustedes habían visto ya muchos cursos de matemáticas, aunque eso no quiere decir
3. que ustedes deban empezar todas las clases con los niños por las definiciones,
4. ya veremos las distintas formas de abordar un tema.
5. Bien, vamos a resolver un problema (reparte siete tarjetas a cada uno), si quieren
6. hacer dibujitos en su libreta está bien. "Cinco niños se van a repartir siete pasteles, se
7. trata de que a cada quien le toque lo mismo y no quede pastel, entonces ¿cuánto le
8. toca a cada quien? (...) por parejas van a usar las siete tarjetas como pasteles ¿cómo
9. reparten los pasteles?
10. As: Uno a cada uno.
11. M: Pero no debe sobrar nada.
12. As: Le damos uno a cada niño y los otros los partimos a la mitad.
13. M: Ustedes piénsenle [los demás discuten entre sí].

[6] Los números de líneas entre paréntesis hacen referencia a los pasajes del fragmento en los que se aprecia el fenómeno que se describe.

[7] "En la didáctica moderna, la enseñanza es la devolución al alumno de una situación adidáctica, el aprendizaje es una adaptación a esa situación" (Brousseau, 1998, p. 60).

[8] Este mecanismo didáctico no es exclusivo de F3, también F1 gestiona la institucionalización de los significados de la fracción antes del primer encuentro o del momento exploratorio.

[9] En cada uno de los fragmentos utilizamos la siguiente notación: M: maestro; A: alumno indefinido; As: alumnos; A1: alumno 1; A2: alumno 2, etcétera.

Una vez que ha sido resuelta la tarea, F3 sigue la lógica de la homología; esto es, gestiona un momento tecnológico teórico en el que los estudiantes deben justificar las técnicas utilizadas. El fragmento 2 nos muestra este momento y, como se puede apreciar, es F3 quien toma a su cargo la justificación de la técnica adecuada (línea 20) y de la que no resultó útil para resolverla (línea 27); este hecho es significativo si recordamos que un medio similar al de la escuela primaria, como lo exige la homología, debería permitir a los alumnos justificar sus propias técnicas. También es relevante si se observa que el medio provee a F3 de una posible justificación empírica (los rectángulos de papel).

Fragmento 2

14. M: ¿Ya está? No debe sobrar nada.
15. As: Sí (unos), no (otros).
16. As: Un entero y dos quintos (luego de tres minutos).
17. M: ¿Un entero y dos quintos? Bien, ¿cómo lo resolvieron? A ver, aquel equipo
18. As: Le repartimos uno a cada niño y sobraron dos pasteles que dividimos en 5
19. partes cada uno y le dimos dos partes a cada niño.
20. M: Bien, entonces pastel completo para cada niño y otras partes. ¿Hubo quien hizo
21. dibujitos? [señala a otro equipo] ¿qué dibujaron?
22. A1: Los pasteles y los niños.
23. M: Un pastel para cada niño y ¿qué hicieron enseguida?
24. A1: Los que sobraban los repartimos.
25. M: ¿Partieron por mitad cada pastel?
26. As: Sí.
27. M: ¿Por qué no resultó?
28. A1: Porque faltaban mitades para ajustar a cada niño.
29. M: A ver, en lugar de dividir estos pasteles en quintos ¿cuál sería otra alternativa?
30. Piensen, rayen las tarjetas hasta que logren repartir todo el pastel, recuerden que
31. cada parte debe ser del mismo tamaño. A ver en el primer procedimiento habíamos
32. dicho que a cada niño le tocaba un entero $^2/_5$, ahora lo van a repartir de otra manera
33. pero ¿a cada niño le puede tocar más de $1^2/_5$.
34. As: No.
35. M: Entonces será otra expresión equivalente y es lo que están tratando de encontrar.

Sin embargo, el intento por "mostrar" una gestión ideal del momento tecnológico fracasa, principalmente porque la tarea no representa dificultades significativas para los estudiantes; por esta razón, el momento se agota rápidamente (no hay dudas sobre la técnica) y la progresión didáctica se detiene. No obstante, el formador no reconoce estos índices de deterioro en la relación didáctica o bien considera indispensable que los estudiantes "vivan" la gestión del momento tecnológico; por esta razón, establece un mecanismo didáctico que le permite reeditar este momento; solicita la búsqueda de otras técnicas para resolver la tarea (línea 29). En su intento por asegurar una menor tasa de fracaso en el momento tecnológico reeditado, F3 negocia "a la baja" las condiciones que permitan una búsqueda menos difícil (línea 35), con dicha negociación modifica la tarea, si originalmente se pedía repartir siete pasteles entre cinco niños, ahora se trata simplemente de encontrar una fracción equivalente a un entero dos quintos.

El fragmento 3 nos muestra un pasaje del momento tecnológico reeditado; en éste, lo notable es que F3 ha *devuelto* a los estudiantes la responsabilidad de la justificación, es decir, son ellos quienes justifican la técnica (líneas 37, 38, 40 y 41) o identifican la naturaleza del error (líneas 39, 42, 44, 45, 46).

Fragmento 3

36. M: ¿Cuál no está bien?
37. A1: En este paso $^1/_5 + ^1/_5$ eran $^2/_5$, en éste eran $^4/_{20} + ^4/_{20}$ porque son 20 de uno y
38. 20 de otro entonces le tocan $^8/_{20}$.
39. As: Nooo.
40. A2: Por ejemplo los dividí en 40 (señala el dibujo de los dos pasteles) y son 20 y
41. 20, pero estamos tomando en general 40.
42. A1: Toma los 40 y es como si estuvieras tomando sólo un pastel, cada uno no está
43. dividido en 40 partes.
44. A2: Pero es que les toca de a $^8/_{40}$.
45. A4: La regla de las fracciones dice $^4/_{20} + ^4/_{20}$ es $^8/_{20}$, entonces, cuando nos dices
46. que $^4/_{20} + ^4/_{20}$ son $^8/_{40}$ no seguimos esta regla, ésa es la confusión.
47. M: A ver, les pedí que continuaran el procedimiento fraccionando los dos pasteles,
48. ¿Podemos repartir a cada niño? No, porque son 5 niños, no nos alcanza.
49. A: Como no podemos repartir, tenemos que volver a dividir (divide cada pastel en
50. cuartos) tenemos 8 pedazos, repartimos uno a cada niño (sombrea $^5/_4$).
51. M: La parte que le tocó a cada niño es $^1/_8$, como ya repartimos un pastel tenemos un entero y $^1/_8$ ¿cuánto se le repartió?
52. A: Un octavo.
53. As: Es un cuarto.
54. M: Ahí estaba la confusión, dos enteros se consideraban...
55. A: Como uno, entonces es $^1/_4$ más $^1/_8$.

56. M: Sí, un octavo y todavía queda un cachito. El octavo restante se divide en 5,
57. pero cada pedazo es ahora...
58. As: Un cuarentavo.
59. M: Un cuarentavo, ahora, mínimo común 40 igual a 10 + 5 + 1 = 16, pero falta
60. As: El entero, un entero $^{16}/_{40}$ ¿ya está bien? ¿sí, verdad?

Mediante este nuevo momento tecnológico, F3 pone a los estudiantes en contacto con una técnica didáctica para gestionar el momento tecnológico y, una vez que se ha construido el consenso sobre lo inadecuado de la técnica propuesta por A1, el formador institucionaliza la técnica adecuada (líneas 47, 48...60). Este momento representa la última fase de la homología.

Finalmente, respecto de los elementos tecnológicos que subyacen a la técnica de formación que utiliza F3, en primer lugar podemos decir que, a pesar de que la institucionalización previa hizo referencia a los significados de la fracción en su conjunto, el objeto de estudio específico (el significado parte-todo) no fue institucionalizado después del momento tecnológico; por esta razón, sólo aparece de manera implícita. En nuestra opinión, la no institucionalización del objeto matemático de estudio tiene que ver con el objetivo de F3 para sostener la actividad dentro de los límites del sistema didáctico *stricto sensu*. Como el reconocimiento explícito del significado parte-todo es un conocimiento propio de los profesores, su institucionalización hubiera orientado la actividad hacia el sistema de formación y el formado hubiese desempeñado el papel de eventual profesor. Al parecer, este objetivo también explica la no institucionalización de los objetos didácticos puestos en juego (el dispositivo de enseñanza y los momentos didácticos gestionados).

Así, el discurso tecnológico que orienta las decisiones de F3 parece apoyarse en un supuesto: cuando se pone en contacto al estudiante con un medio similar al que se desea que gestione, los elementos de la praxeología didáctica devienen *transparentes*, es decir, son visibles a través de la actividad que despliega el formador. En este sentido, podemos decir que, cuando el formador utiliza esta técnica de formación, lo que hace es *mostrar* a los estudiantes una praxeología didáctica que ellos deberán reconstruir en otros contextos.

El deslizamiento didáctico. Sin *praxis,* sin *logos*

Como habíamos señalado, las estrategias (o técnicas) basadas en la transposición parten de un supuesto: existe un *saber didáctico,* objetivo, cuya transposición es una tarea fundamental en la formación de profesores. Una técnica que podría considerarse como una aproximación a la transposición es la que hemos denominado *deslizamiento didáctico* en analogía con el deslizamiento cognitivo;[10] si en el segundo el verdadero objeto de saber es sustituido por los medios y las heurísticas, en el deslizamiento didáctico el estudio del objeto matemático se *desliza* hasta que un elemento didáctico ocupa su lugar, en estos casos, el deslizamiento no parece ser una acción planeada, sino el producto de ciertos mecanismos didácticos desplegados por el formador durante el momento tecnológico. El deslizamiento didáctico es la técnica de formación que utiliza con mayor frecuencia F2.

La manera como se inicia esta técnica puede apreciarse en el fragmento 4. En éste se observa que F2 inicia el episodio gestionando dos momentos propios de la homología, la exploración, que inicia con la *devolución* de la tarea (líneas 1, 2, 3 y 4) y el momento tecnológico cuyo objetivo es que los estudiantes justifiquen las técnicas que emplearon (líneas 5, 6, 7 y 8).

Fragmento 4

1. M: Anoten el siguiente problema: Tres amigos entran a un restaurante, piden dos
2. pizzas que se reparten equitativamente entre los tres. ¿Cuánto le toca a cada uno?
3. Poco después llega otro amigo. ¿Cuánto debe darle cada uno para que cada uno
4. tenga la misma cantidad? ¡Resuélvanlo como puedan!
5. A1: A cada uno de los tres le toca $^2/_3$
6. A2: A cada uno de los cuatro le toca $^1/_2$
7. A3: Se van a repartir en sextos, cada uno de los tres tendría $^4/_6$ y le va a dar $^1/_6$ al
8. que llegó o sea $^3/_6 = {^1/_2}$, $^4/_6 - {^1/_2} = {^1/_6}$
9. M: ¿Alguien lo resolvió de una forma diferente?
10. A5: Bueno yo lo hice casi igual, partiendo de $^1/_3$ de pizza, a cada uno le toca $^2/_3$ o
11. lo que es igual $^4/_6$
12. M: Bueno, las maneras que han utilizado para resolver este ejercicio están bien,

[10] A decir de Brousseau (1998, p. 53), el deslizamiento cognitivo se caracteriza en que, cuando una actividad de enseñanza ha fracasado, el profesor puede ser conducido a justificarse y, para continuar su acción, a tomar sus propias explicaciones y sus medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático.

13. pero hicieron mentalmente muchos procedimientos, con los niños sería importante
14. que se llevaran a cabo, porque operan un poco más lo concreto, nosotros podemos
15. comprender lo que quiere decir nuestro compañero con las operaciones que están
16. allí, pero para los niños no es fácil comprender, por eso sería necesario partir de
17. una estructura.

Como se puede apreciar también la tarea se relaciona con el significado parte-todo de la fracción y aunque es más compleja que aquellas que se sugieren para los alumnos de la escuela primaria, los formados la resuelven con relativa facilidad. Por esta razón, el momento tecnológico genera pocas oportunidades para que los estudiantes justifiquen las técnicas empleadas, como sería deseable en una homología.

Frente al agotamiento del momento tecnológico, F2 se ve obligado a precisar una de las cláusulas del contrato establecido, esto es, cuando señala la ausencia de los procedimientos que –en su opinión– se hicieron mentalmente, subraya un incumplimiento de las obligaciones implícitas en el contrato: resolver el problema con cualquier técnica pero explicitando sus fases. Además, esta acción (líneas 12, 13...17) también representa el momento que inicia el deslizamiento didáctico puesto que, cuando F2 señala las dificultades de los niños, otorga a los estudiantes el papel de eventual profesor. Pero además, este mecanismo provoca que la homología pierda su *transparencia,* ya que F2 explica la similitud entre el momento que gestiona y las tareas del eventual profesor. Esta pérdida de la transparencia aparece porque la homología no puede funcionar como un medio similar al de la escuela primaria sin los procedimientos que los estudiantes realizaron.

No obstante, lo más importante es que este mecanismo ha provocado un deslizamiento didáctico, como se puede apreciar en el fragmento 5. El estudio del objeto matemático (significado parte-todo)[11] ha sido desplazado y en su lugar aparece un objeto didáctico (la técnica para gestionar el momento tecnológico). Si bien es cierto que el deslizamiento ha sido provocado por el formador, no lo es menos que es aceptado por los estudiantes, quienes lo fortalecen a través de sus interrogantes (líneas 18, 22, 23, 26 y 24), así, con el acuerdo tácito del formador y los estudiantes, el objeto de estudio original es sustituido y la actividad se ha desplazado hacia el sistema de formación; en éste, el estudiante cumple un nuevo papel, el de eventual profesor.

[11] Una muestra de que el deslizamiento ha sido efectivo es que el significado parte-todo no aparece en los siguientes episodio de la misma clase.

Fragmento 5

18. A1: Profe, usted dice que con los niños hay que utilizar los procedimientos, ¿pero
19. uno o todos? Si los enseñamos todos, no van a saber ni qué.
20. M: Bien, voy a cambiar la pregunta, ¿vamos a propiciar que los niños encuentren
21. diferentes métodos y luego nos digan cuáles utilizaron?
25. A2: ¿No sería más viable enseñarles los procedimientos que conocemos y que
22. ellos identifiquen el que más puedan? Porque hay algunos que hacen la división
23. de una forma y algunos de otra, entonces. ¿Cómo le vamos a hacer? Enfocarnos a
24. un procedimiento. ¿Si lo entienden de otra forma hay que darles variedad?
25. A3: Es lo que se hizo aquí, se utilizaron diferentes procedimientos, confrontarlos y
26. el que se facilite más para los niños es el que se podría adoptar.
27. M: Es lo que ustedes acaban de hacer, ¿se trata de decirle al niño que lo pueden
28. resolver de cierta forma? o se trata de propiciar. Por ejemplo, yo les pongo el
29. problema. ¿Cómo lo resuelvo? Resuélvanlo como puedan, ahora sí, a ver Juanito, a
30. ver Panchito, a ver María, pásenle, así como ustedes pasaron ahorita, allí es
31. cuando encontramos diversidad de procedimientos.
32. A3: Creo sería importante precisar las equivalencias, si no se les haría muy difícil
33. resolver el problema.
34. M: Acuérdense, la consigna es que ustedes van a encontrar varias formas de
35. resolver el mismo problema.

Una vez que el deslizamiento didáctico ha sido instalado, podemos observar que en su funcionamiento no aparece una tarea problemática en la que los estudiantes prueben la eficacia de las técnicas didácticas empleadas, puesto que la tarea sólo exige sugerir una técnica cuya validez está a cargo de F2. Además, como lo advierte A3 (línea 25), la técnica que el formador desea institucionalizar es la misma que gestiona como parte de la homología; este objetivo se hace evidente cuando F2 acepta que la técnica que utiliza es la misma que deseaba reconstruir (líneas 27 y 28). Otro aspecto significativo de este deslizamiento es la ausencia de un discurso tecnológico que justifique dicha técnica, su sola presencia en la gestión de F2 es lo que, al parecer, justifica su eficacia.

Por la ausencia de una tarea problemática en la que los estudiantes prueben las técnicas didácticas construidas y la de un discurso tecnológico que justifique la técnica institucionalizada, podemos decir que el deslizamiento didáctico es una técnica de formación cuyo objetivo nada tiene que ver con la reconstrucción de una praxeología didáctica, ya que no se incluye ninguna de sus dimensiones (técnica-práctica o tecnológica-teórica). También por estas ausencias, podemos decir que el saber didáctico sólo aparece como una especie de consejos sobre la enseñanza que se justifican con base en la actividad del formador.

Ahora bien, ¿por qué F2 elige los deslizamientos en lugar de otras técnicas de formación? o, en otros términos, ¿cuál es el discurso tecnológico que orienta sus acciones? Sobre este respecto, podemos decir que, para F2, es más importante estudiar las praxeologías didácticas que las matemáticas. Su intento por ubicar la actividad dentro de los límites del sistema de formación es un indicador de este discurso tecnológico. Sin embargo, a pesar del énfasis sobre lo didáctico, este saber sólo se incluye como una especie de consejos que se justifican mediante la propia actividad del formador; este hecho da cuenta de su concepción sobre la naturaleza del saber didáctico.

La homología ampliada. La transposición del saber didáctico

La técnica de formación que llamamos *homología ampliada* es, en nuestra opinión, la que más se aproxima a las estrategias basadas en la transposición, ya que, cuando los formadores aceptan la existencia de un saber didáctico y la necesidad de transponerlo, sólo utilizan el estudio de un objeto matemático como referencia para estudiar un objeto didáctico. A diferencia del deslizamiento didáctico, en la homología ampliada se plantea una tarea de naturaleza didáctica en la que puede encontrarse el objeto didáctico de estudio. Esta técnica es la que utiliza con mayor frecuencia F1 y, en lo que sigue, analizaremos la manera como se gestiona.

Como se puede apreciar en el fragmento 6, una primera fase de esta técnica consiste en gestionar una homología que inicia con la devolución de una tarea (líneas 1, 2, 3...7) ligada al significado de medida. La devolución representa el inicio del momento del primer encuentro, puesto que, en esta tarea, es posible encontrar uno de los elementos de la OM de referencia. Por su parte, el momento de la exploración se desarrolla cuando los estudiantes intentan resolver la tarea, ya que, mediante esta acción, buscan construir una técnica adecuada para resolverla.

Fragmento 6

1. M: Voy a entregarles este problema, lo resuelven y anotan todos los procedimientos
2. que usen, el problema dice: "Un viaje interplanetario. La nave azul sale del planeta
3. azul rumbo al planeta rojo, al mismo tiempo la nave roja, un poco más lenta, sale

4. del planeta rojo rumbo al planeta azul, cuando se cruzan la nave azul ha recorrido
5. $^1/_5$ más de la distancia entre los dos planetas que la nave roja. Después de este
6. punto la nave azul tarda 8 días más en llegar a su destino. ¿Cuánto tiempo duró el
7. viaje de cada nave?

En el fragmento 7 se observa la segunda fase de la homología, el momento tecnológico cuyo propósito es que los estudiantes justifiquen las técnicas empleadas. Como se puede apreciar en este fragmento, a pesar de que Enrique[12] intenta justificar una técnica inadecuada (líneas 9, 10, 11 y 12), F1 no interviene en la justificación cuando plantea la interrogante que obliga al alumno a precisar su respuesta (línea 13); son otros estudiantes (A1, A2 y A3) los que intervienen en la justificación.

Fragmento 7

8. M: Bien, vamos a ver ahora los resultados, Enrique, expliquen su procedimiento.
9. E: Primero hicimos una gráfica del problema, representamos los planetas con
10. círculos y el recorrido con un rectángulo que fragmentamos en 5 partes, como no
11. quedó claro dónde era la mitad, decidimos fragmentarla en 10 partes, y así
12. pudimos ver dónde estaba el punto medio, en $^5/_{10}$, no en $^5/_5$.
13. M: ¿En $^5/_5$?
14. E: No, $^5/_{10}$.
15. A1: Son $^5/_{10}$, pero el problema nos dice que la nave azul recorrió más que la nave
16. roja y el cruce es aquí en $^6/_{10}$.
17. A2: Pero en todo caso sería en $^7/_{10}$, porque $^1/_5$ equivale a $^2/_{10}$.
18. A3: Es que ustedes están pensando que recorrió $^1/_{10}$ nada más y es $^1/_5$.
19. A1: Más bien recorrió $^{10}/_5$.
20. A2: $^{10}/_5$ son 2 enteros, ¿quieres decir $^{10}/_{10}$?
21. A4: No, $^7/_{10}$.

Aunque las intervenciones de los estudiantes no permiten determinar la naturaleza del error en la técnica o la respuesta correcta, lo relevante es el intento de F1 por *devolver* a los estudiantes la responsabilidad no sólo de resolver la tarea, sino también de justificar las técnicas empleadas; por esta razón, podemos decir que F1 busca establecer una gestión adidáctica del momento tecnológico, intento que resulta significativo por su coherencia con la homología, esto es, con

[12] Enrique es un estudiante del grupo en el que F1 dirigió el proceso de estudio.

la intención de gestionar un medio similar al que se desea que gestionen los estudiantes cuando dirijan un proceso de estudio.

Otro hecho significativo que se puede apreciar en el fragmento 8 es que F1 no modifica su contrato pese a las dificultades que los estudiantes tienen para justificar sus técnicas. Cuando F1 evade la responsabilidad de justificar la respuesta (línea 27), lo que hace es sostener la devolución, sin importar que la técnica adecuada no haya surgido todavía o que su demanda de justificaciones no produzca aportes que permitan solucionar el problema. Al parecer, el problema ha sido demasiado complejo para los estudiantes, por esta razón, sus intervenciones poco aportan a la búsqueda de la técnica adecuada. Sin embargo, a diferencia de las momentos tecnológicos que se agotan rápidamente por la facilidad de la tarea, en este caso, su complejidad ha generado mayores oportunidades para una gestión adidáctica del momento tecnológico.

Fragmento 8

22. M: A ver, explica por qué $^{10}/_{5}$.
23. A1: Lo dividimos en $^{10}/_{5}$, la mitad son $^{5}/_{5}$ y la nave azul recorrió $^{1}/_{5}$ más, serían
24. $^{6}/_{5}$; éste es el punto donde se encontraron las naves. Luego, a partir de $^{6}/_{5}$, tardó 8
25. días; los dividimos en $^{4}/_{10}$, nos salen 2 días por cada décimo, entonces la nave
26. roja tardó 20 días y la azul 12 días, porque era más rápida.
27. M: ¿Qué opinan los demás? ¿Cómo supieron que eran 12?
28. A2: Es que cada quinto valía 4 días, lo dividimos en décimos y cada uno valía 2
29. días, entonces se sumaba 2, 4, 6, 8, 10, 12 (señalando los décimos), por eso le pusimos
30. 12 días y las otras suman 20.
31. A: Fíjese bien lo que dice, la nave azul tardó 8 días más.
32. A2: No.
33. A: Sí.
34. A3: Dice 8 días más del recorrido que ya lleva.
35. A: En llegar a su destino, no de recorrido, réstenle los 8 días y nos da el 12.
36. M: Vamos por puntos, $^{3}/_{5}$ es el punto de encuentro y la nave azul tarda 8 días
37. más en llegar a su destino, dividiendo en quintos podemos decir que cada quinto
38. equivale a 4 días, si en $^{2}/_{5}$ son 8 días, ¿cuántos serían en $^{3}/_{5}$?
39. As: Doce.
40. M: Ahora, salen al mismo tiempo y hacen el mismo recorrido, pero la roja es más
41. lenta, llevan 12 días cuando se cruzan y la azul tarda 8 días más en completar su
42. recorrido. ¿Cuántos días tardó en total?
43. As: 20.

44. M: Cuando se cruzan, la nave roja ha recorrido $^2/_5$ y se ha tardado 12 días.
45. ¿Cuánto se tarda en recorrer cada quinto?
46. As: Seis días.
47. M: ¿Cuánto se tardará en recorrer toda la distancia?
48. As: Treinta días.
49. A1: Entonces ese dato se pierde, ¿no?

Como ningún equipo pudo resolver el problema, la técnica y el resultado adecuados deben ser institucionalizados por F1; como se puede apreciar en el fragmento 8, la institucionalización se realiza cuando reconstruye la técnica adecuada (líneas 36, 37 y 38) y demanda la adhesión a su proyecto institucionalizador mediante preguntas de bajo nivel cognitivo (líneas 38, 42, 45 y 47). Con la institucionalización, F1 ha gestionado momentos del primer encuentro, exploratorio, tecnológico y de institucionalización y la actividad se ha desarrollado dentro de los límites del sistema didáctico *stricto sensu*; es decir, hasta aquí, el estudiante sólo ha desempeñado el papel del alumno que estudia una praxeología matemática, porque F1 sólo ha utilizado una técnica de formación basada en la homología.

Sin embargo, como se puede apreciar en el fragmento 9, F1 utiliza la pregunta de A1 (línea 49) para cruzar los límites del sistema didáctico *stricto sensu*. Esta acción se hace evidente cuando institucionaliza elementos de la OM que no corresponden a la homología (líneas 62, 64, 67 y 69), ya que no son conocimientos que requiere un alumno de la escuela primaria, aunque sí los profesores de este nivel. Si bien no hace referencia a objetos didácticos, esta acción se desarrolla en el sistema de formación, puesto que el estudiante ocupa el papel de eventual profesor.

Fragmento 9

50. M: Tocas un punto esencial de las fracciones en la recta numérica, podemos ver que
51. éste es un problema más abstracto, por eso necesitamos identificar primero la
52. relación parte-todo a través de rectángulos, de cuadrados, de círculos.
53. A2: Este problema como que está en un contexto discreto, ¿no?
54. M: Los demás ¿qué opinan?, ¿es un contexto discreto?
55. As: No, porque es una sola recta, no tenemos dos rectas.
56. M: Es una recta, la unidad es la distancia y son quintos, si fuesen dos unidades
57. implicaría fracciones impropias. ¿En qué nos apoyamos para resolver este
58. problema?

59. A1: En una recta.
60. M: ¿Qué significado o contexto de la fracción podemos encontrar?
61. As: Contexto de medición.
62. M: Contexto de medición, muy bien, y ¿qué significado?
63. A: Parte-todo.
64. M: Recuerden, es un significado relacionado con la medición y es necesario que
65. los niños identifiquen el todo y las partes.
66. A: ¿O sea, que la medida lleva incluida la relación parte-todo?
67. M: Sí, habíamos manejado dos contextos, ¿eran?
68. As: Reparto y medición.
69. M: Y magnitudes discretas y continuas.

Empero, aunque F1 ha institucionalizado elementos de la OM propios del profesor, el saber didáctico ha permanecido *transparente*, visible sólo a través de la homología; por esta razón, como se puede apreciar en el fragmento 10, se plantea una tarea que permita estudiar un objeto didáctico (líneas 70, 71 y 72) y *amplíe* la homología de referencia.

Fragmento 10

70. M: Vamos ahora a ubicar puntos en la recta, que es una de las actividades para la
71. medición que se realizan comúnmente en la escuela primaria. Carolina,[13] indícame
72. $^{3}/_{5}$ en la recta numérica (dibuja una recta en la que marca los puntos 1, 2, 3 ,4 5).
73. A: Ya (pone una marca en el 3).
74. M: Daniela, pasa y ubica $^{3}/_{5}$ (dibuja otra recta igual que la anterior).
75. D: Ya está (divide el segmento 0-1 en 10 partes y pone una marca en 5/10).
76. M: Oscar, ¡ubica $^{3}/_{5}$! (dibuja el segmento 0-1 dividido en 5 partes).
77. O: Ya está (divide un quinto en 5 partes y marca lo que correspondería a $^{3}/_{25}$).
78. As: Nooo.
79. O: (Repasa las rayas con su dedo, pero no cambia el resultado).
80. M: Maribel, ubica $^{3}/_{5}$ (traza el segmento 0-1 dividido en 5 partes).
81. Ma: ¿Aquí? (pone una marca en $^{3}/_{5}$).

De inicio, parece que ubicar fracciones en la recta numérica es una tarea matemática que se ha planteado para gestionar un momento del trabajo con la técnica o de evaluación; sin embargo, dos rasgos nos muestran su naturaleza didác-

[13] Carolina, Daniela, Óscar y Maribel, quienes aparecen en este fragmento, son alumnos del grupo en el que F1 dirigió el proceso de estudio.

tica: la referencia de F1 acerca de la recta como dispositivo de enseñanza para el significado de medida (línea 71) y la ausencia de justificaciones (del formador o los estudiantes) respecto de las técnicas para ubicar las fracciones. Como se puede observar en el fragmento 11, estos rasgos son coherentes con el objetivo que –en nuestra opinión– persigue F1, tomar las respuestas de los estudiantes como un elemento del medio que permita plantear una tarea didáctica: identificar la naturaleza de los errores cometidos en la ubicación de fracciones en la recta numérica.

Fragmento 11

82. M: Bien, ¿qué podemos observar en la primera respuesta?
83. A1: Que son 3 enteros y no $^3/_5$.
84. M: A ver: ¿$^3/_5$ es mayor o menor que la unidad?
85. As: Menor.
86. M: Aquí encontramos una de las ventajas de la recta, las fracciones rellenan los
87. huecos entre dos números enteros y una de las dificultades de los niños es igual a
88. la de Carolina. ¿Por qué pensó que ahí era $^3/_5$?
89. A2: Porque tomó 5 enteros como un entero.
90. M: Sí, por eso no podemos pasar a la suma y a la comparación de fracciones hasta
91. que no esté firme la relación parte-todo. Otra de las ventajas es que en la recta
92. aparecen con mayor naturalidad las fracciones impropias, si yo digo ubiquen $^5/_4$,
93. es más sencillo ver que se fracciona más de un entero.[14]

Ahora bien, si se analiza esta tarea considerando su dimensión matemática, podemos decir que el problema de las naves resultó un referente inadecuado para la ubicación de fracciones en la recta; las respuestas erróneas que dan los estudiantes así parecen indicarlo. Por esta razón, a pesar de que en nuestra opinión la tarea perseguía un objetivo de naturaleza didáctica, debido a las dificultades de los estudiantes, la tarea se convierte en un momento para el estudio de un objeto matemático. Si la analizamos teniendo en cuenta la dimensión didáctica, podemos decir que, a diferencia de las otras técnicas de formación analizadas, en ésta se plantea una tarea didáctica específica (identificar los errores cometidos en la ubicación de fracciones en la recta numérica) en la que los estudiantes pueden probar la eficacia de la técnica que emplean para tal identificación. La presencia de errores concretos en esta tarea (no sólo sugeridos) es un elemento que permite probar la eficacia de las técnicas empleadas.

[14] La forma que dirige el estudio de este primer error se repite en cada uno de los otros casos.

En este sentido, los estudiantes y el saber didáctico (los errores) tienen un primer encuentro a través de un tipo de tareas didácticas (identificar los errores que cometen los alumnos) relacionadas con un elemento de la OM de referencia, que les exige construir una técnica para identificar los errores y estructurar un discurso que justifique lo adecuado de la identificación realizada (línea 89). En esta técnica de formación, podemos observar la presencia de varios elementos de una praxeología docente: un tipo de tareas ligadas con un elemento didáctico (identificar los errores cometidos por los alumnos), una técnica que permitió cumplir con esa tarea,[15] un discurso tecnológico que justifica la eficacia de la técnica[16] y un objeto matemático de referencia (el significado de medida). Sin embargo, también podemos apreciar que, aunque los estudiantes son quienes tienen a su cargo la construcción y justificación de la técnica (líneas 83, 84, 85 y 89), F1 es quien introduce los elementos didácticos de naturaleza prescriptiva, él precisa las ventajas de la recta numérica como dispositivo de estudio y los saberes previos necesarios para plantear este tipo de tareas (líneas 86, 87, 90, 91, 92 y 93).

De manera general, podemos advertir que, al igual que en la homología de referencia, F1 ha gestionado momentos del primer encuentro, exploratorio y tecnológico, para un elemento didáctico específico (la detección de los errores en tareas ligadas al significado "medida"); de ahí que resulte significativo, como se puede apreciar en el fragmento 12, su intento por gestionar un momento de institucionalización didáctica.

Fragmento 12

94. M: Éstos son algunos de los errores que cometen los niños en la recta numérica y
95. las formas mediante las que podrían superarlos. También algunas ventajas de
96. trabajar con la recta numérica, ¿cuáles serían?

[15] Las técnicas didácticas que utilizan los estudiantes para identificar los errores no son tan evidentes como las que usan cuando resuelven tareas matemáticas. Por esta razón es difícil precisar la técnica específica que utilizaron en cada caso: sin embargo, coherentes con los principios de la TAD, asumimos que cuando un sujeto resuelve adecuadamente una tarea es porque ha empleado una técnica que le permite tal acción. Lo mismo sucede con los discursos tecnológicos (didácticos); éstos también aparecen sólo como justificaciones sobre lo adecuado de las respuestas emitidas frente a una tarea didáctica.

[16] El discurso teórico no se hace presente en esta praxeología; sin embargo, esta ausencia no es una constante en la práctica de F1. En dos episodios de su proceso, este formador incluye un discurso teórico a través de informes de investigación. Sin embargo, para el análisis hemos seleccionado este episodio, porque en él se puede apreciar de una manera más clara la homología ampliada.

97. A1: Lo de las fracciones impropias.
98. M: ¿Qué conocen de los números fraccionarios?
99. A2: Que están ubicados entre un número entero y otro.
100. A3: ¿Aquí no van las mixtas?
101. A4: Las fracciones equivalentes.
102. M: También pueden ser las mixtas, uno más $^1/_2$.
103. A2: También la equivalencia.
104. M: Bueno vamos a seguir trabajando un poco con las fracciones en la medición...

Aunque podemos apreciar que, en el momento de la institucionalización, las características del dispositivo de estudio (la recta numérica) terminan por ocupar el lugar de la técnica para identificar errores y de la justificación de esas técnicas, el proceso de estudio gestionado da cuenta del discurso tecnológico (de formación) que orienta las acciones de F1; esto es, en cuanto que ha gestionado diferentes momentos didácticos para *estudiar* un elemento de la praxeología docente, al parecer, F1 acepta la existencia de un saber didáctico (relativo a los errores de los alumnos) que requiere ser reconstruido durante el proceso de formación.

La inclusión de momentos para el primer encuentro (la exploración, la justificación y la institucionalización didáctica) es un indicador del discurso tecnológico (de formación) que justifica la técnica de formación empleada por F1 y de su concepción sobre la naturaleza del saber didáctico. Contra la idea de *transponer* un saber *transparente* como en la homología o una especie de consejos como en el deslizamiento didáctico, F1 intenta reconstruir una praxeología didáctica a través de un proceso de estudio en el que se "viven" varios momentos didácticos. En este sentido, F1 intenta *hacer didáctica* cuando utiliza ciertos elementos de una praxeología didáctica (los tipos de tareas, las técnicas y los discursos tecnológicos) para resolver una tarea *problemática* de formación (enseñar a los estudiantes a identificar y tratar los errores que cometen los niños en tareas ligadas al significado de medida)[17] e intenta *estudiar didáctica* cuando ayuda a los estudiantes a reconstruir ciertos elementos de una praxeología didáctica (el tipo de tarea ligado a los errores, la técnica para identificarlos y los discursos que justifican las técnicas) que son importantes para una institución que forma a futuros profesores.

No obstante los intentos, debemos decir también que las técnicas que utiliza

[17] Aunque este objetivo no aparece explícitamente en la escena pública de la clase, en nuestra opinión, es el que F1 perseguía.

F1 requieren mayor eficacia; un ejemplo de esta necesidad se advierte con la ausencia de trabajos de los niños en los que se pudieran identificar errores, otro es la dificultad para integrar un discurso teórico en el proceso de estudio.

CONSIDERACIONES FINALES

Para finalizar, podemos decir que la praxeología de formación que pone en práctica F3 es incompleta, porque no se incluyen tipos de tareas didácticas y, además, toda la actividad se desarrolla en el sistema didáctico *stricto sensu;* por esta razón, los elementos de una praxeología didáctica sólo aparecen como saber *transparente*. Utilizar la homología directa como técnica principal de formación, como lo hace F3, significa no aceptar la existencia de un saber didáctico objetivo y significa también que se ha asumido la idea de que el formado puede aprender a dirigir un proceso de estudio sólo mediante la imitación de la actividad del formador. Si a esto le añadimos las dificultades de F3 para gestionar adecuadamente los diferentes momentos didácticos, podemos deducir que el estudiante tendrá dificultades para construir técnicas didácticas que le permitan resolver las tareas problemáticas de su profesión.

Otro dato relevante es que F3 es el formador con mayor experiencia en la formación de profesores y, al parecer, la técnica que utiliza con mayor frecuencia, más que apoyarse en saberes provenientes de la didáctica, recibe una influencia de los saberes sedimentados en las escuelas normales que, al parecer, dan mayor importancia al estudio de las praxeologías matemáticas.

En el caso de F2, las características de su actividad nos permiten suponer que acepta la existencia de un *saber didáctico* que es necesario *transponer,* sin embargo, en su gestión, este saber se desliga de cualquier elemento praxeológico, esto es, no aparecen tareas didácticas en las que el estudiante pueda probar la eficacia de sus técnicas y, sin este elemento, resulta difícil gestionar adecuadamente otros momentos didácticos para un elemento didáctico. Por esta razón, lo didáctico aparece como una especie de consejos para la práctica, como técnicas sugeridas por el formador que se justifican por el uso que él hace de ellas.

En el caso de F1, quien tiene menos experiencia en la enseñaza y en la formación, resulta significativo observar que incluye un mayor número de elementos de una praxeología de formación que los otros formadores observados. De hecho, es el único que intenta gestionar diferentes momentos didácticos para el estudio del saber didáctico; un ejemplo de ello es la presencia de tareas didácticas específicas, de técnicas didácticas construidas por los formados y de momentos tecnológicos y de institucionalización para un elemento didáctico.

Sin embargo, pese a estas diferencias, lo común en los tres procesos de estudio observados es la serie de dificultades que los formadores tienen para *transponer* el saber didáctico. Una primera dificultad que hemos observado tiene que ver con aceptar o no la existencia de un saber de este tipo. Cuando no se acepta su existencia, los formadores utilizan técnicas que destacan lo matemático y dejan el estudio de lo didáctico como una mera actividad de imitación. No obstante, aun cuando se acepte la existencia de este saber, como presumimos que ocurre en el caso de F2, otra fuente de dificultades es la manera como se piensa la naturaleza de dicho saber, es decir, cuando se asume que el saber didáctico es solamente un saber especulativo sobre la práctica. Como hemos observado, las técnicas de formación priorizan los consejos sobre la práctica.

Por otra parte, aun cuando se acepte la existencia de este saber y se considere como saber objetivo susceptible de transponerse, existen dificultades ligadas a las técnicas adecuadas para realizar este proceso, es decir, establecer un equilibrio entre tareas matemáticas y didácticas, diseñar u organizar los dispositivos de enseñanza para objetos didácticos y construir técnicas adecuadas para gestionar momentos tecnológicos, teóricos y de institucionalización de un objeto didáctico, como hemos observado, son apenas algunas de las dificultades que enfrentan los formadores cuando intentan transponer el saber didáctico. Sin embargo, como lo señalan Bosch *et al.* (2003), estas dificultades son una consecuencia del carácter poco elaborado de las praxeologías de formación espontáneas y, por esta misma razón, la manera de superarlas pasa necesariamente por el desarrollo de una *teoría didáctica* que sirva como fundamento para diseñar y gestionar organizaciones praxeológicas viables.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFÍCAS

Bosch, M., L. Espinoza y J. Gascón (2003), "El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas", *Recherches en didactique des mathématiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage, vol. 23, núm. 1, pp. 79-135.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balachef, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfiled,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard, I. (1997), “Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique”, *Communication au Colloque International Savoirs scolaires, interactions didactiques et formation des enseignants,* Marsella, 28 a 30 de abril.

—— (1998), “Familière et problématique, la figure du professeur”, en C. Margolinas M. Perrin Glorian (coords.), *Cinq études sur le thème de l’enseignement,* Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 17-54.

—— (2000), “La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes”, en M. Bailleul (ed.), *Actes de la X*ème *École d’Été de didactique des mathématiques,* Houlgate, 18-25 de agosto de 1999, pp. 98-112, Caen, ARDM e IUFM de Caen.

—— (2001), “Aspectos problemáticos de la formación docente”, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM),* Huesca (en linea).

—— (2002a), “Organiser l’étude. 1. Structures et Fonctions”, en J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes du 11*ème *École d’Été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage, versión electrónica.

—— (2002b), “Organiser l’étude. 3. Ecologie et Régulation”, en J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes du 11*ème *École d’Été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage, versión electrónica.

Coppe, S., C. Rolet y C. Tisseron (2002), “Etude de routines et régulations dans la pratique professionnelle d’un professeur des écoles”, en J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes du 11*ème *École d’Été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage, versión electrónica.

DATOS DEL AUTOR

Luis Manuel Aguayo Rendón

Escuela Normal “Manuel Ávila Camacho”, Zacatecas, Zacatecas, México

l_aguo@yahoo.com.mx

Houdement, C. y A. Kuzniak (1996), "Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques", *Recherches en didactique des mathématiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage, vol. 16, núm. 3.

Kuzniak, A. (1994), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré,* Tesis de doctorado, IREM VII, París.

Portugais, Jean (1995), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants,* Suiza, Exploration-Peter Lang.