El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática[1]

Gregoria Guillén Soler

Resumen: En este trabajo comenzamos con una breve descripción del modelo de razonamiento de Van Hiele adaptado a la geometría de los sólidos. A continuación, a partir de la descripción que hace Treffers (1987) del Wiscobas (currículo de primaria holandés) indicamos cómo han ido evolucionando las ideas plasmadas en el modelo de Van Hiele como consecuencia de la investigación realizada en la escuela holandesa. Entendiendo como razonamientos lógicos procesos matemáticos como análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración, nos fijamos en las acciones que corresponden a describir, clasificar, definir y demostrar, como componentes de la práctica matemática para avanzar en la progresiva matematización; y centrándonos en *la descripción y análisis* de objetos geométricos planteamos algunas cuestiones cuyas respuestas proporcionan una gran variedad de situaciones didácticas en las que están implicadas acciones asociadas a estos procesos matemáticos.

Palabras clave: Modelo de Van Hiele, geometría de los sólidos, procesos matemáticos, descripción de sólidos.

Abstract: In this report we start with a brief description of Van Hiele's model of reasoning adapted to the geometry of solids. Then, taking as a starting point the description of Wiscobas (curriculum of Dutch Primary School) in Treffers (1987), we indicate how the ideas conveyed in Van Hiele's model have been developing as a consequence of the research carried out in the Dutch School. Taking logical reasonings as mathematical processes such as analysis, classification, definition, conjecture, generalization and demonstration, we focus on the actions that correspond to describing, classifying, defining and demonstrating as components of the mathematical praxis to advance in the progressive mathematising; focusing on the description and analysis of geometric objects, we set out some questions whose answers provide a great variety of didactic situations in which are involved actions related to these mathematical processes.

Keywords: Van Hiele's model of reasoning, geometry of solids, mathematical processes, description of solids.

PRESENTACIÓN

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele para la geometría plana ha sido ampliamente investigado (véanse, por ejemplo, Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys *et al.*, 1988). Con respecto a la aplicación del modelo para la geometría de los sólidos, se ha realizado menos investigación; en lo que concierne a este trabajo, cabe señalar aquélla en la que se dieron algunos intentos para caracterizar explícitamente los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos (por ejemplo, Hoffer, 1981; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991) y otras, posteriores, en las que se han precisado estas características para los tres primeros niveles de razonamiento (Guillén, 1996; Guillén, 1997).

Las ideas plasmadas en el modelo de Van Hiele han tenido una evolución que se ve reflejada en la investigación realizada en la escuela holandesa. En este trabajo vamos a comenzar con una breve descripción del modelo de razonamiento de Van Hiele adaptado a la geometría de los sólidos e indicaremos cómo han ido evolucionando las ideas plasmadas en este modelo como consecuencia de la investigación realizada en la escuela donde surgió el modelo. Por último, nos fijaremos en las acciones que corresponden a describir, clasificar, definir y demostrar, como componentes de la práctica matemática para avanzar en la progresiva matematización y nos centraremos en *la descripción*. Freudenthal ha defendido en numerosas ocasiones (véase, por ejemplo, Freudenthal, 1971, 1973) que las descripciones preceden a las clasificaciones y a las definiciones; por ello, al comenzar con el análisis de un proceso matemático, vamos a considerar *la descripción*.

MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

El modelo de Van Hiele ha sido elaborado en la escuela holandesa por los profesores Van Hiele. Está formado por dos componentes: el primero es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo de los niños hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas; el segundo es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los estudiantes puedan alcanzar el nivel de razonamiento superior al que tengan (las cinco "fases de aprendizaje"); básicamente, estas cinco fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza. En este trabajo nos vamos a centrar en el primer componente: los niveles de razonamiento.

La definición original del modelo de Van Hiele planteaba la existencia de cinco niveles de razonamiento; ahora bien, en la investigación realizada tomando como marco teórico el modelo, no ha habido unanimidad para aceptar el número de niveles de Van Hiele que resulta conveniente distinguir; con frecuencia se utiliza una caracterización que ignora el quinto nivel. El mismo Van Hiele, como consecuencia del proceso de la evolución de sus ideas, en sus descripciones del modelo ha modificado en varias ocasiones la cantidad de niveles de razonamiento y sus características. En su primera descripción planteaba la existencia de tres niveles, que corresponden a los niveles 2º, 3º y 4º, que definió posteriormente, y en Van Hiele (1986, p. 47) sugiere la posible existencia de niveles superiores. En la conferencia sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría: temas para la investigación y la práctica (*Conference on Learning and Teaching Geometry: Issues for Research and Practice*), que tuvo lugar en junio de 1987 en la Universidad de Siracusa, Estados Unidos, Van Hiele planteó una nueva propuesta de definición de los niveles de razonamiento, en la que contemplaba la existencia de tres niveles que corresponden a una reorganización de los niveles 1º a 4º.

CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO 1, 2 Y 3. MATIZACIONES PARA LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS

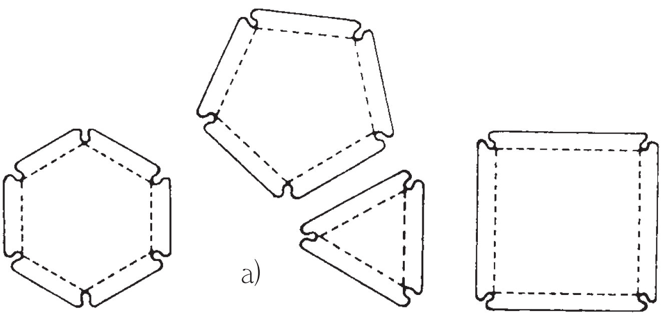
Son numerosas las publicaciones, incluso en castellano, que hacen referencia al modelo de Van Hiele aplicado a la geometría plana (véanse, por ejemplo, Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys *et al.*, 1988; y en castellano, Jaime, 1993); en ellas se pueden encontrar listas muy completas con las características de cada uno de los niveles de razonamiento. Ahora vamos a fijarnos en características correspondientes a los tres primeros niveles y haremos algunas matizaciones que surgen al considerar el modelo aplicado a la geometría de los sólidos.

Para el nivel 1 (Reconocimiento), en la investigación se han subrayado las siguientes características generales:

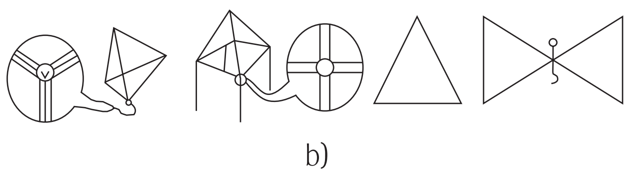
- Percepción de los objetos en su totalidad y como unidades.
- Descripción de los objetos por su aspecto físico; se diferencian o clasifican considerando semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
- No se suelen reconocer explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

Al centrarnos en la geometría de los sólidos, consideramos que éstos se han introducido, intentando organizar el mundo de los objetos que aparecen en el entorno del estudiante y que, después, los objetos se estudian en clase inmersos en procesos de construir y generar sólidos utilizando material comercializado y otros procedimientos para generar sólidos. Cabe hacer notar que un material comercializado está formado por polígonos que son las piezas con los que se construyen los modelos; en el modelo resultante aquéllos corresponderán a las caras de los poliedros (véase la figura 1a). Otro material comercial está formado por

Figura 1 Material comercializado



a)



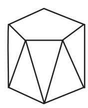
b)

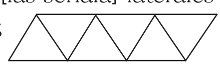
varillas y mecanismos de engarce, que son las piezas con los que se construyen los armazones (esqueletos) de los poliedros; en el modelo resultante corresponderán a las aristas y a los vértices de los poliedros (véase la figura 1b). Así pues, cuando se plantea el trabajo inmerso en tareas de construcción de modelos y de elaboración de "ideas" de familias de sólidos a partir de la construcción de modelos o armazones, junto con el modelo sencillo que se quiere construir, se perciben también las piezas con las que se obtiene el modelo (que, en términos de análisis, corresponden a los elementos del modelo resultante).

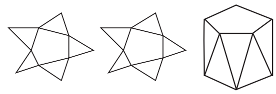
Como características de este primer nivel para la geometría de los sólidos podemos apuntar:

- Se pueden construir modelos y armazones de sólidos sencillos. La construcción se hace por imitación.
- Las "ideas" de familias de sólidos (o de sólido) las introduce el profesor, ya sea verbalmente o mostrando los "trozos" y cómo se juntan éstos para construir ejemplos de una familia dada.
- Aunque estas "ideas" incluyen parte de las figuras, los estudiantes pueden repetirlas, e incluso pueden expresarlas si el profesor dirige convenientemente con material.
- En tareas de descripción sólo se puede comprobar si algo es cierto en los modelos con los que se tiene familiaridad.
- Las respuestas se basan en un modelo en el que se verifica si se cumple la propiedad o no.

Veamos un protocolo (protocolo 1) que aclara el tipo de razonamientos a los que me acabo de referir. En la conversación se muestran algunas ideas para los antiprismas que indicaron dos niños de 12 años (E1 y E2) que participaron en nuestras experimentaciones cuando la profesora, P, les hizo algunas preguntas. Cabe aclarar que las ideas que repiten los niños para los antiprismas habían surgido en sesiones anteriores a partir de la construcción de ejemplos. En estas sesiones previas, también obtuvimos a partir de la construcción ideas para los prismas y para las pirámides.

P: [Muestra un antiprisma pentagonal de base regular ] ¿A qué familia pertenece?

E1: Es un antiprisma. Porque las caras éstas [las señala] laterales son triángulos. Y lo hacemos así... La cinta de triángulos  que la cierro.



Y además también... Que de cada base pongo triángulos. Se puede hacer de esa manera también.

P: [Se dirige a E2] ¿Tú, qué dirías?

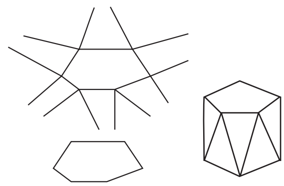
E1: No sé... Es que ella ya ha dicho las dos que eran. Otra yo no sé.

P: Si te fijaras en los vértices, ¿podrías decir algo?

E2: No sé, pero en éste [tiene el modelo del antiprisma hexagonal] se juntan 4 caras; tres de aquí [señala las laterales] y la base.

P: Y eso, ¿pasa en todos los antiprismas?

E2: No sé.



E1: ¡Ah! ¡Ya! Así, hago el pentágono... luego pongo dos en los vértices... y luego los junto al revés. [El estudiante ha construido los modelos que corresponden a los dibujos].
Así también se podía hacer pero era un lío. Yo al principio no me aclaraba con las varillas esas.

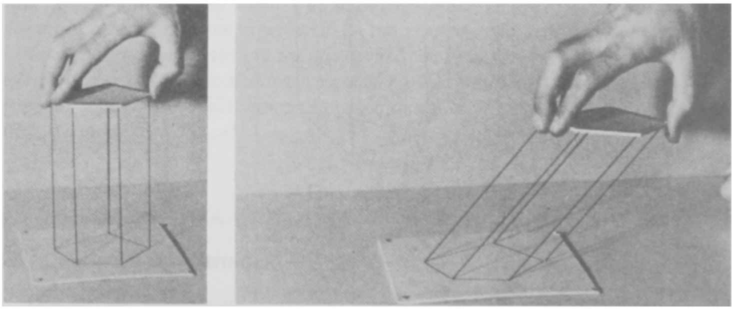
Este protocolo 1 nos introduce ya en las características del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele. Pero antes de indicar las características generales asociadas a este nivel de razonamiento, vamos a presentar otro protocolo, que corresponde a una conversación llevada a cabo entre dos alumnos de Magisterio (futuros profesores de Educación Primaria) en la que inmersos en una tarea de construcción del modelo de un prisma oblicuo, utilizan razonamientos que vamos a asignar al 2º nivel. Al comparar las respuestas de este protocolo con las dadas en el protocolo anterior, podremos notar diferencias entre los razonamientos que pueden usarse en tareas de construcción.

Los estudiantes construyen el modelo de prisma oblicuo por parejas. La figura 2, tomada de Castelnuovo (1979, p. 214), ilustra el proceso. Un estudiante lo mantiene construido y el otro estudiante intenta esbozar el desarrollo, calcando los paralelogramos de las caras laterales. Determinados los paralelogramos, los estudiantes dibujaron el desarrollo y construyeron el modelo. Veamos la conversación que tuvo lugar entre ellos (protocolo 2):

E1: Ten mucho cuidado de que las caras bases sean paralelas y que los vértices se correspondan, que no estén giradas las bases.

E2: [Van a hacer los ajustes del esbozo] Mira yo hago estos paralelogramos y tú éstos.

Figura 2 Construcción de prismas rectos y oblicuos



E1: Vale. Pero tenemos que tener en cuenta que las aristas laterales tienen que ser iguales, así que los lados de todos los paralelogramos, en los míos y en los tuyos, tienen que ser iguales.
E2: Y tienen que ser paralelos dos a dos.
E1: Ya. Y los lados de la base de los paralelogramos son los lados del polígono de las bases, a ver... a mí me tocan éstos [los señalan en los polígonos que previamente ya han construido como las bases del prisma] y a ti éstos.

Lo que destacamos de este protocolo es cómo utilizan los estudiantes las propiedades de los prismas para perfeccionar el esbozo de los paralelogramos que obtenían calcando. Veamos ahora las características generales que se han subrayado en la investigación para el nivel 2 (Análisis):

- Percepción de los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican las relaciones entre ellas.
- Descripción de los objetos con listas de propiedades; puede que no sean suficientes para caracterizar el objeto o que se incluyan más de las necesarias.
- Deducción de nuevas propiedades a partir de la experimentación y posible generalización a todos los objetos de la misma familia.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o en pocos casos.

Si nos centramos en los sólidos, relativo a las tareas de construcción de modelos y de elaboración de “ideas” de familias de sólidos a partir de la construcción de modelos o armazones cabe matizar:

- Ya se comprende y se hace explícita la importancia que tiene el análisis de los objetos en la construcción o dibujo de ellos.
- Los modelos y armazones pueden verse como agregados de componentes que guardan unas relaciones entre ellos.
- Los estudiantes pueden ya mostrar los “trozos” de los ejemplos que, al juntarlos, conducen a la idea ingenua considerada. Pueden comprender que, al juntar los “trozos” señalados, siempre se van a obtener ejemplos de una familia dada.
- Pueden descubrir las propiedades de una familia teniendo ejemplos como soporte, ya que las pueden generalizar a todos los ejemplos de ella.

Lo que queremos destacar al comparar las características de este nivel con las del nivel 3 que vamos a indicar a continuación es que no conlleva la misma dificultad para los estudiantes establecer relaciones entre sólidos y entre “trozos” de ellos, que puede facilitar su descripción y establecer relaciones entre sus propiedades. Establecer relaciones entre las propiedades requiere de razonamientos asignados al nivel 3.

Para el nivel 3 (Clasificación), en la investigación se han subrayado las siguientes características generales:

- Se pueden realizar clasificaciones lógicas de los objetos considerando propiedades o relaciones ya conocidas.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.
- Utilización de razonamientos deductivos informales para demostrar una propiedad. Ya se detecta una necesidad de justificar de manera general la veracidad de una propiedad.
- Comprensión de los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no del encadenamiento de estos pasos ni de la estructura de una demostración.
- Incapacidad para realizar una demostración completa en la que haya que encadenar varias implicaciones, y tampoco se siente su necesidad. Por este motivo, tampoco se comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Vamos a utilizar dos tareas para poder comparar respuestas que utilizan razonamientos de diferente nivel de Van Hiele. Consideremos la tarea de determinar el número de caras, vértices y aristas de los prismas. Veamos cuáles respuestas se pueden dar en cada nivel (Guillén, 1997).

En el nivel 1 se utiliza el modelo o armazón como soporte. Los estudiantes pueden desmontarlo y contar las piezas, así como determinar su forma. También se pueden desmontar los modelos dejando varias piezas juntas y se pueden obtener desarrollos de los sólidos o varios "trozos" de ellos.

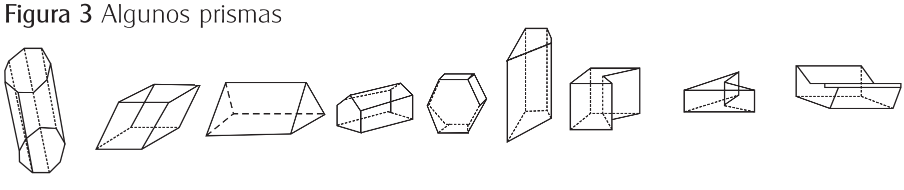
En este nivel, el profesor puede introducir la cuenta de los elementos de manera estructurada. Freudenthal (1983) señala que estas actividades pueden utilizarse, por sus importantes características didácticas, para aprender a estructurar:

> Para contar los vértices aristas y caras, por ejemplo de un cubo, los conjuntos están estructurados:
>
> cuatro vértices abajo cuatro arriba,
> o cuatro vértices de frente y cuatro detrás,
> o cuatro vértices a la derecha y cuatro a la izquierda,
> cuatro aristas abajo, cuatro arriba y cuatro verticales,
> o cuatro aristas a lo largo, cuatro a lo ancho y cuatro a lo alto,
> una cara en la base, una en lo alto y cuatro alrededor,
> o dos caras, frente y detrás, dos a la derecha e izquierda, dos arriba y abajo.
> Así, el cubo (también cualquier prisma cuadrangular: caja) puede considerarse como una estructura con 6 caras, 8 vértices y 12 aristas, dispuestos de una forma fija. Disposición que se puede mirar de una manera estructurada (Freudenthal, 1983, p. 300).

Pero es en el nivel 2 donde los estudiantes pueden contar los elementos de manera estructurada, por niveles, en modelos cuya base tiene cualquier número de lados (n-agonal):

A = núm. de aristas de un prisma n-agonal:
n aristas de una base,
n aristas laterales y
n aristas de la otra base.
$A = 3n$.

Figura 3 Algunos prismas



Los estudiantes pueden delimitar las fórmulas que dan el número de caras, vértices, aristas o un determinado tipo de ángulos (ángulos de las caras, ángulos diedros y ángulos de los vértices), para una familia de sólidos dada (prismas, antiprismas, pirámides...) pues pueden generalizar para n los resultados obtenidos a partir de ejemplos concretos, o contando los elementos de una manera estructurada. Por ejemplo, los estudiantes, con ayuda del profesor, pueden hallar el número de ángulos de las caras (son ángulos de los polígonos) (αC) que tiene un prisma n-agonal generalizando previamente el número de elementos de cada piso:

- n de una base, $4n$ de las caras laterales (cada cara lateral tiene 4 ángulos porque son paralelogramos) y n de la otra base. En total, $\alpha C = 6n$.
- $3n$ al contar los ángulos de las caras que se juntan en los vértices de una base (en cada vértice de los prismas se juntan 3 caras) y otros $3n$ al contar los ángulos de las caras que se juntan en los vértices de la otra base. En total, $\alpha C = 6n$.

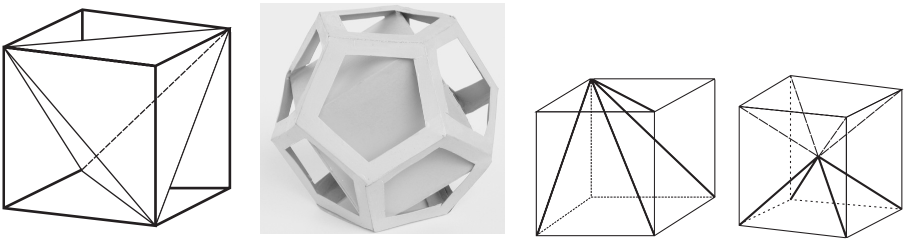
Ahora bien, si lo que pretendemos hallar es el número de diagonales de las caras o de diagonales del espacio (dC o dE), en este nivel se tienen grandes dificultades; se puede resolver el problema para prismas cuya base tiene un número concreto de lados.

En el nivel 3, los estudiantes ya pueden hallar sin ayuda del profesor, para un prisma n-agonal, las fórmulas que dan su número de caras, de vértices, de aristas, de ángulos de las caras, de ángulos diedros y de ángulos de los vértices. Pero, para hallar las fórmulas que dan el número de diagonales de las caras o de diagonales del espacio (dC o dE), todavía se requieren pistas o ayudas (profesor). Encontrar el número de diagonales de cualquier polígono no es tarea sencilla.

Consideremos la tarea "Relaciones de inscripción. Puzzles". Veamos qué respuestas se pueden dar en cada nivel.

En el nivel 1 los modelos están completamente construidos o los hace el profesor. Éste plantea cuestiones sobre los poliedros obtenidos. Las relaciones entre los poliedros implicados en un modelo o entre poliedros y elementos de la geometría plana son relaciones visuales. El lenguaje utilizado en las cuestiones es informal; nos apoyamos en los modelos concretos que representamos en la figura 4, colocados de una determinada manera. Ejemplos de cuestiones que podemos plantear son: ¿Con cuántas de estas pirámides se puede llenar el cubo?, ¿Cómo se colocan las pirámides?, ¿Dónde queda el ápice? Señálalo en el modelo

Figura 4 Tetraedro en cubo; cubo en dodecaedro; tres y seis pirámides en un cubo



¿Dónde queda la base?, ¿Cómo son de altas estas pirámides?, ¿Cómo son de largas las aristas? Señala los elementos en este cubo al que le hemos quitado una cara.

En el nivel 2 pueden observarse y descubrirse las relaciones entre los elementos de los poliedros inmersos en un modelo. Por ejemplo, se puede describir el modelo del tetraedro inscrito en el cubo de la siguiente manera: el tetraedro se puede inscribir en el cubo de manera que los vértices del tetraedro están en vértices del cubo, las caras del tetraedro se corresponden con los cuatro vértices del cubo opuestos a los que tienen vértices del tetraedro, y las aristas del tetraedro son diagonales de las caras del cubo que se juntan de tres en tres en cada vértice del tetraedro. En este nivel también pueden construirse algunos modelos precisos con ayuda del profesor.

En el nivel 3 ya se puede comprender que, en el cubo y en el dodecaedro, el conjunto de diagonales de las caras está estructurado, de manera que al salir tres por cada vértice del cubo se producen dos tetraedros inscritos en él y al salir tres por cada vértice del dodecaedro se producen cinco cubos inscritos en él.

Después de estos ejemplos, utilizados para aclarar las características asignadas a diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele para la geometría de los sólidos, vamos a regresar a las características asignadas a estos niveles. Queremos destacar que, si nos fijamos en las relaciones entre los contenidos geométricos, esto es, el tipo de razonamientos que los engarzan y que en la enseñanza nos proponemos desarrollar como objetivo de primer orden, del modelo de van Hiele se desprende una idea para razonamiento lógico que Fielker (1979) expresa en estos términos: Razonamientos lógicos no significa lógica formal, sino procesos matemáticos como análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración. En estos procesos matemáticos vamos a centrarnos en lo que sigue. Al hablar de los *procesos matemáticos* de *analizar, clasificar, definir, probar, de-*

mostrar, conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer nos fijamos "en las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática" (Puig, 1996, p. 15). Pero antes de centrarnos en estas acciones, vamos a dar breves pinceladas exponiendo cómo se han reinterpretado las ideas del modelo de Van Hiele en la escuela holandesa en la que surgió el modelo.

LA ESCUELA HOLANDESA: DEL MODELO DE VAN HIELE AL CURRÍCULO WISKOBAS

En la descripción que hace Treffers (1987, pp. 244-245) del currículo de primaria holandés (Wiskobas) habla de tres niveles de Van Hiele, que llama *macroniveles*, que describen el proceso de aprendizaje realizado en un gran periodo de tiempo. Pero hay que señalar que estos macroniveles no coinciden con los tres niveles descritos por Van Hiele, sino que se reinterpretan éstos para tomarlos como una descripción macroscópica del proceso de aprendizaje de las matemáticas en primaria.

En la descripción que hace Treffers del Wiscobas también distingue otros niveles, que llama *microniveles*; que describen el proceso de enseñanza/aprendizaje a corto plazo. No delimita el número de microniveles que hay, y cabe señalar que estos microniveles no corresponden tampoco a los niveles de Van Hiele. Treffers (*op. cit.*) señala:

> Freudenthal no está seguro de que se distingan niveles en el proceso de aprendizaje que se logren por reflexión y recursión de la misma manera como los de Van Hiele. Desde su punto de vista, no hay una tripartición rígida, sino más bien, en principio, una progresión ilimitada de acuerdo con microniveles que sólo se delimitan relativamente unos y otros. Éste es un punto de vista que nosotros suscribimos también (Treffers, *op. cit.*, p. 247).

De Treffers (*op. cit.*) se puede entresacar que se supone que hay cambio de micronivel cuando lo que hay en un nivel que sirve como medio de organización se convierte en objeto de estudio, por lo que vamos a tener muchos más microniveles en el proceso de aprendizaje que los señalados por Van Hiele. Con los microniveles lo que realmente hay es una repetición permanente y menuda del ascenso vertical: Objetos/medios de organización, nuevos objetos/medios de organización, ..., una *matematización progresiva*. *Matematizar* es entendido en un sentido muy amplio: formalizar, esquematizar, organizar, axiomatizar y transformar son verbos que denotan aspectos del proceso de matematización.

Treffers (*op. cit.*) distingue también la *matematización horizontal* o fase en la que interviene la aproximación empírica, la observación, la experimentación, el razonamiento inductivo y que se concreta en el momento en que se ataca un problema; la matematización que da cuenta de la diferencia entre transformar un problema más o menos real en un problema matemático y procesar dentro del sistema matemático, lo cual conlleva una sistematización, una simbolización, y una esquematización/modelización. Y la *matematización vertical,* que agrupa las actividades que llevan a la solución de un problema: resolución, generalización, formalización o revisión. Se está refiriendo al procesamiento matemático, dentro del sistema matemático, y al nivel alcanzado en la estructuración del problema en consideración.

Kindt (1993) lo expresa de la siguiente manera:

> La traducción directa de los problemas del mundo real al lenguaje del "mundo de los símbolos" podemos calificarla como *matematización horizontal*. Se trata del reconocimiento de esencias matemáticas y de datos relevantes, de la esquematización o visualización, del descubrimiento de relaciones, etcétera (...)
>
> La consecuente profundización dentro de la matemática se puede considerar como un *proceso vertical*. Freudenthal dice: "(...) en el mundo real se vive, actúa (y sufre); en el mundo de los símbolos, se forma, se reforma, se manipulan símbolos (mecánicamente, comprendiendo, reflexionando). Ésta es la matematización vertical. Claro que la frontera entre los dos mundos no está marcada con precisión. Algo puede pertenecer en un momento al mundo real y en otro, al mundo abstracto" (Kindt, 1993, p. 76).

Y Puig (1994) lo reinterpreta incorporando otros elementos en su análisis: "La imagen está trazada por un *movimiento horizontal* de despliegue y ampliación de campos semánticos y un *movimiento vertical* de creación de conceptos, movimiento que, a mi entender, no puede desligarse de la elaboración simultánea de los sistemas matemáticos de signos".

Volviendo otra vez al modelo de Van Hiele, el cuadro 1 remarca la reinterpretación que se ha hecho en la escuela holandesa de algunas características fundamentales del modelo. Ahora, al centrarnos en la geometría, vamos a destacar características del modelo que se mantienen.

Cuadro 1

Modelo de Van Hiele	Wiskobas
Los niveles de Van Hiele	Los macroniveles Los microniveles
Desarrollo de los niveles de razonamiento de los estudiantes	La progresiva matematización Matematización horizontal Matematización vertical

Tanto del modelo de Van Hiele como del IOWO[1] se desprende una concepción de la geometría

> como la exploración del espacio en la que el alumno se mueve y vive. En ambos casos se subraya el papel de los contextos. En el modelo de Van Hiele se precisa su papel en cada uno de los niveles de razonamiento; y al describir el IOWO se precisa también la reinterpretación que se hace de ellos: "Al comienzo, el contexto o contextos son elementales, pero paradigmáticos; lo que significa que funcionan como modelos mentales; poseen un fuerte potencial vertical. Proporcionan significados a modelos más abstractos y a los simbólicos. Pero en cuanto contextos, su rango horizontal es amplio: representan un dominio extenso de fenómenos que pueden ser después campo de aplicaciones (Treffers, *op. cit.*).

Asimismo, al analizar el modelo de Van Hiele observamos que están implicados en el modelo y son también objeto de enseñanza los diferentes aspectos de la geometría que precisa Treffers (1987, pp. 310-311), como los que se pretenden trabajar con el currículo Wiscobas: el aspecto de la forma, el aspecto constructivo, el aspecto de relación, el aspecto topológico, el aspecto de cálculo, el aspecto de las transformaciones, el aspecto de lenguaje y el aspecto lógico. En ambos casos, se sigue dando mucha importancia al desarrollo de razonamiento lógico. En el modelo de Van Hiele, es objetivo de primer orden y en el Wiskobas se le da mucha importancia al proceso de matemátizar, entendiendo ésta como: "la actividad de organización y estructuración en la que el conocimiento y las habilidades se evocan para descubrir regularidades, conexiones, estructuras,... aún desconocidas".

[1] IOWO: Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática, que posteriormente se denominó OW & OC (Vakgroep Onderzoek Winscunde Onderwijs Computercentrum) y actualmente se llama Instituto Freudenthal.

LAS ACCIONES DE ANALIZAR, DESCRIBIR, CLASIFICAR, DEFINIR, DEMOSTRAR, ETC., COMO COMPONENTES DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Retomando la idea de razonamiento lógico que ya hemos indicado, "significa *cosas* como descripción, clasificación, hipótesis, generalización y prueba", vamos a detenernos en estos procesos matemáticos. Al considerar las acciones de describir, clasificar, definir... como componentes de la práctica matemática, será interesante delimitar situaciones (actividades, tareas, contextos...) diferentes en las que estén implicadas acciones asociadas a cada uno de estos procesos, en un intento de mostrar que la imagen está trazada por un *movimiento horizontal* de despliegue y ampliación de campos semánticos (Puig, 1994). Será también interesante fijarse en estas situaciones (actividades, tareas, contextos...), centrando la atención en las posibles respuestas que pueden darse considerando el tipo de razonamientos que requieren, esto es, razonamientos de nivel 1, 2, 3 o 4, esto es, considerando que los razonamientos están en estratos de mayor o menor abstracción; están más o menos altos en la cadena del ascenso vertical: Objetos/medios de organización, nuevos objetos/medios de organización... (*movimiento vertical*).

Realizar un análisis de estas situaciones para cada uno de estos procesos matemáticos va más allá de los propósitos de este trabajo. Aquí, como indicamos en la presentación, vamos a realizar este análisis considerando *la descripción y el análisis*.

Analizar y *describir*: Algunas preguntas y respuestas

Comenzamos planteando unas preguntas referidas a *La descripción y el análisis* de objetos geométricos que pueden readaptarse al considerar otros procesos:

1. ¿Qué entendemos por describir/analizar un objeto geométrico? ¿Asociamos distinto significado al razonar en diferente nivel de razonamiento de Van Hiele?
2. ¿Hay distintos tipos de análisis? ¿Qué elementos consideramos?
3. ¿Encontramos procedimientos de construir o de generar sólidos que pueden facilitar la descripción/análisis?
4. ¿En cuáles situaciones está implicada la descripción de formas? ¿En qué

se diferencia una situación de otra? ¿Qué podemos variar para crear una nueva situación?

5. ¿Cuáles peculariedades tiene lo que se describe?
6. ¿Cómo se presenta el objeto geométrico que se tiene que describir/analizar? ¿En cuál contexto se sitúa? ¿Con cuál función?
7. ¿Dónde cortamos para elaborar la lista de propiedades de un objeto geométrico? ¿Qué decir de esta lista cuando se razona en diferentes niveles de razonamiento?

Pensemos unos minutos en estas preguntas antes de seguir. A continuación, vamos a centrarnos en cada una de ellas. Es claro que pensar detenidamente en ellas requiere bastante tiempo. Los invito a que vuelvan a reflexionar sobre cada una de ellas al finalizar.

Comenzamos con la primera pregunta planteada:

1. ¿Asociamos distinto significado a la palabra *describir* al razonar en diferente nivel de razonamiento de Van Hiele?

La palabra *describir* en todos los niveles de razonamiento puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos, y lo que varía de un nivel a otro es el tipo de propiedades que se incluyen en la lista (Guillén, 1997).

En el primer nivel de Van Hiele, la descripción se hace de los objetos familiares; éstos pueden corresponder a un sólido, una familia de sólidos, o sus elementos. La descripción se hace por su aspecto físico o a partir de ejemplos prototipo tomados de su entorno físico y en la descripción se incluyen características visuales y funcionales.

En el segundo nivel, "la figura se convierte en la portadora de sus propiedades" (Van Hiele, 1986, p. 168). Se empieza a reconocer la presencia de propiedades matemáticas de los objetos. Es el nivel propio de la descripción en el sentido matemático. Un sólido, o una familia de sólidos, se describe sobre la base de propiedades geométricas que se delimitan con la ayuda de observaciones, medida, dibujos y construcción de modelos.

Pasamos ya a la segunda pregunta:

2. ¿Hay distintos tipos de análisis? ¿Cuáles elementos consideramos?

Con esta pregunta vamos a subrayar que, al describir los sólidos, podemos poner el énfasis en su simetría, armonía, regularidad, belleza o en otras descripciones analíticas, constructivas que dicen algo sobre cómo está hecho un poliedro –tiene 8 caras, 12 aristas, etc.– o sobre cómo están dispuestos localmente sus elementos (por ejemplo, tiene 8 vértices de orden 4: sus caras cuadradas están bordeadas de triángulos y sus caras triangulares están bordeadas de cuadrados). Así pues, se puede considerar que hay distintos niveles de análisis: de los elementos y de la estructura. En la estructura, el análisis puede ser local –como por ejemplo, nos fijamos en el orden de los vértices o en las caras que bordean a una cara dada– o global, que dice algo respecto de la estructura total –como por ejemplo, nos fijamos en las simetrías que organizan el todo del poliedro y dicen algo sobre cómo está dispuesto todo él, así como lo bello, armonioso y equilibrado que queda (Guillén, 1991, p. 59).

Con la tercera pregunta volvemos a hacer referencia a los protocolos y a los tipos de respuestas para determinadas tareas de las que hemos hablado al explicar las características de los niveles de razonamiento de Van Hiele. La pregunta cuestiona:

3. ¿Encontramos procedimientos de construir o de generar sólidos que pueden facilitar la descripción/análisis?

En Guillén (1997) se constata que la construcción de modelos u armazones de sólidos o la generación de sólidos con otros procedimientos ofrece una situación que puede ayudar a que los estudiantes asimilen para los ejemplos sencillos de las familias de sólidos elegidas las características visuales y las relativas al tipo de caras, su número, así como el de aristas y vértices, y su disposición en el espacio. También facilita que se indiquen parecidos y diferencias entre los ejemplos de una familia y las relaciones (siempre establecidas visualmente) que hay entre unas familias y otras.

Asimismo, separar un modelo por niveles o en casquetes, observar las caras que bordean a una cara dada y las que se juntan en un vértice facilita que se puedan construir ejemplos de una familia de sólidos dada o diferentes desarrollos de algunos sólidos aplicando estas observaciones.

Cabe señalar los diferentes procedimientos de construir o generar sólidos y dar cuenta del tipo de actividad concreta que se puede desarrollar con cada procedimiento de construcción. En Guillén (1997) se explica con detalle; ahora lo vamos a indicar brevemente.

La construcción o modelado de modelos u armazones de sólidos lleva a un análisis primario de los sólidos en el nivel local; centramos la atención en sus elementos: cara, vértice y arista.

La construcción de modelos con polígonos centra la atención en la forma de las caras de un sólido, el número de caras de cada tipo y la disposición de éstas en el espacio. Los estudiantes pueden reconocer los polígonos en el nivel global y su construcción con materiales comercializados permite pasar sin dificultad del modelo físico a las caras, y de las caras al modelo, para sólidos sencillos. Esta construcción permite también introducir diferentes "ideas" de familias de sólidos; ideas genéticas: basadas en cómo están construidos los ejemplos (el protocolo 1 lo muestra).

La construcción del armazón lleva a una idea de sólido como estructura formada por vértices y aristas; facilita que los estudiantes puedan determinar el número de vértices y aristas de ejemplos concretos de una familia dada y lleguen a comprender su disposición en el espacio. Los modelos y armazones de ejemplos sencillos de una familia de sólidos dada se pueden utilizar para enseñar a contar los elementos de manera estructurada. Las respuestas a la tarea 1 dan cuenta de ello. Esta construcción permite también introducir diferentes "ideas" de familias de sólidos; ideas genéticas: basadas en cómo están construidos los ejemplos (el protocolo 1 lo muestra).

Asimismo, el intento de convertir en rígidos algunos armazones puede llevarnos a la descripción de modelos en los que están implicados más de un poliedro. De uno de ellos ya hemos hablado al fijarnos en las respuestas a la tarea de relaciones de inscripción y dualidad: el tetraedro inscrito en el cubo; este modelo se obtiene en el intento de convertir el cubo en un modelo rígido, introduciendo una diagonal por cada cara del cubo, de manera que se junten de tres en tres en cada vértice. Pero si el armazón del cubo lo convertimos en rígido, introduciendo todas las diagonales (de las caras y del espacio) que salen de un vértice, obtendremos tres pirámides que forman un cubo; y al introducir las cuatro diagonales del espacio, obtenemos seis pirámides que forman un cubo (véase la figura 4).

El modelado de sólidos con plastilina permite considerar al sólido como modelo macizo y centra la atención sobre si las caras son planas o curvas, si tienen aristas o no, si éstas son rectas o curvas. También se incidirá en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre sus elementos.

Con la construcción de sólidos *mediante el desarrollo* relacionamos el plano con el espacio; podemos fijarnos en las propiedades del modelo que se reflejan o se rompen en el desarrollo, y a la inversa; cabe subrayar también, deshaciendo los modelos construidos con cartulina, que sólo para los prismas rectos podemos asegurar que alguno de sus desarrollos son tiras (formadas por unión de rectángulos) y un polígono a cada lado.

La construcción de un modelo oblicuo, construyendo los polígonos bases y juntándolos con gomas para tener la pieza clave, permite visualizar una variedad de prismas (la figura 2 ilustra el procedimiento). Esta técnica promueve la identificación de relaciones (de igualdad, paralelismo y perpendicularidad) entre los elementos de los prismas, por ejemplo, entre las bases o entre las caras laterales y las bases.

Truncando sólidos, podemos remarcar también que los cortes paralelos a las bases en los prismas y cilindros produce nuevos ejemplos de la familia, y en las pirámides y los conos se obtiene un ejemplo más pequeño y otro sólido que no lo es, y que tampoco es prisma ni cilindro. Estas actividades también proporcionan experiencias para llegar a comprender propiedades de estas familias; por ejemplo, que las secciones paralelas a la base, en todas estas familias tienen la misma forma que la base, pero en los prismas y cilindros son todas ellas iguales, y en las pirámides y los conos se van haciendo más pequeñas a medida que nos acercamos al ápice. Freudenthal (1983, pp. 299-300) justifica claramente la utilidad de este tipo de actividades.

La pregunta 4 se refiere a una cuestión que ya hemos planteado antes.

4. ¿En cuáles situaciones está implicada la descripción de formas? ¿En qué se diferencia una situación de otra? ¿Qué podemos variar para crear una nueva situación?

Aclarado ya el significado que damos a este término cuando razonamos en diferente nivel de razonamiento (en la pregunta 1), las demás preguntas podrían surgir a partir de ésta. Cuando nos cuestionamos en cuáles situaciones está implicada la descripción de formas y en qué se diferencia una situación de otra, podemos delimitar las cuestiones 5 y 6 que hemos enunciado.

Así, al fijarnos en la pregunta 5, podemos considerar diferentes las situaciones en las que se pide que se describa:

- Un objeto.
- Una familia finita.
- Un modelo en el que hay implicados varios poliedros.

- Una familia infinita.
- Se tienen que tener en cuenta varias familias:
  - ♦ Para hallar propiedades comunes.
  - ♦ Para hallar propiedades de una familia que otra no verifica.
  - ♦ Se enuncian de golpe grupos de propiedades.

También podemos variar la representación física con la que se muestra el objeto geométrico que se tiene que describir/analizar (ahora nos estamos fijando en la pregunta 6):

- Un objeto físico del entorno.
- Un objeto que se presenta en la naturaleza.
- Un objeto inmerso en una estructura que aparece en un contexto topográfico.
- Una forma obtenida con piezas de puzzles. Objetos que aparecen en el mundo de los juegos.
- Modelos y armazones de sólidos que los estudiantes construyen con materiales. Contexto geométrico.
  - ♦ objetos como modelos macizos
  - ♦ como estructuras de superficie
  - ♦ como estructuras de aristas
  - ♦ la construcción a partir de desarrollos
- Surge en clase a partir de otros sólidos (inmersos en un proceso de generar formas): con piezas de juegos de construcciones, juntando cubitos, apilando sólidos o truncando otros sólidos...
- Surge en clase utilizando unidades base que permiten generar sólidos oblicuos.
- Es un modelo que implica varios poliedros: inscritos unos en otros, intersectados... objetos que aparecen en el mundo del arte.
- Es una representación plana, fotografía o dibujo de sólidos, maquetas... objetos que aparecen en un contexto geométrico, en el mundo de la arquitectura, urbanismo, etcétera.
- Aparece en productos infográficos: videojuegos, imágenes digitales en las carátulas de la televisión, videoclips, juegos de computadora, etcétera.
- Se proporciona el nombre.
- Se obtiene inmerso en una exploración con espejos.
- Se obtiene en un contexto de proyecciones: exploración de sombras.

Tengamos también en cuenta que las cuestiones en las que están implicadas familias de sólidos y propiedades pueden estar planteadas en diferentes contextos:

- En procesos de construcción de formas.
- En tareas de identificación.
- En un contexto de puzzles (mundo de los juegos).
- En problemas prácticos: convertir en rígidas algunas formas; truncar algunas formas para obtener las deseadas....
- En problemas que relacionan la geometría con la aritmética y la medida.

Y ya en un contexto matematizado, encontramos otras situaciones:

- Se presentan propiedades y lo que se cuestiona es si son o no atributos críticos de una familia de sólidos.
- Se consideran varias familias de sólidos y una o varias propiedades. Para cada una de las familias de prismas y para cada propiedad, se ha de razonar si ésta es o no atributo crítico de la familia considerada.
- Se dan las propiedades y son las familias de sólidos las que tienen que determinarse.

Pasamos a la cuestión 7 que plantea dónde cortamos al elaborar la lista de propiedades de un objeto geométrico e incide también en cuáles elementos consideramos. Cabe tener en cuenta lo que ya hemos apuntado al describir las características del nivel 2, al comentar las respuestas en diferentes niveles de razonamiento de la tarea 1 y al considerar la pregunta 1: en el nivel 2, el nivel de la descripción, es donde se pueden enunciar propiedades relativas a todos los elementos de los sólidos. Ahora bien, las propiedades que contienen términos del tipo "como máximo", "como mínimo", "tantas medidas diferentes como", o propiedades que relacionan los elementos de un tipo con los de otro conllevan grandes dificultades (Guillén, 1997). Por ejemplo, es muy usual que los estudiantes enuncien como propiedad de los prismas de bases regulares: "Los prismas de bases regulares tienen dos medidas diferentes para las aristas". Nótese que, al enunciar la propiedad de esta manera, en vez de como: "Los prismas de bases regulares tienen como mucho dos medidas diferentes para las aristas", se excluyen de esta familia los prismas de bases regulares que tienen caras laterales cuadradas (que tienen las aristas iguales). Enunciar de golpe grupos de propiedades, como propiedades de una familia que contiene a la que se describe, también conlleva muchas dificultades, así como enunciar propiedades comunes a varias familias, o propiedades de una familia que no cumplan otras (Guillén, 1997). En el tercer nivel ya se pueden enunciar y entender de manera matemáticamente correcta todo tipo de propiedades matemáticas.

Ya para finalizar, queremos hacer notar cómo las respuestas a las cuestiones planteadas nos han proporcionado una gran variedad de situaciones didácticas en las que están implicadas acciones asociadas para analizar y describir objetos geométricos. Queremos remarcar, asimismo, cómo estas situaciones no pueden verse de manera aislada; en este trabajo perfilamos el marco en el cual se pueden encajar las situaciones didácticas enumeradas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi gratitud a la doctora Olimpia Figueras M., responsable del Proyecto "Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas" por su invitación para que impartiera una conferencia sobre el "El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos" con objeto de dar a conocer parte del trabajo desarrollado en mi tesis doctoral en el Segundo Seminario sobre Rendimiento Escolar en Matemáticas. Dicha conferencia, luego revisada, dio pie a la escritura de este artículo. También quiero agradecer a la Escuela Normal Superior del Estado de México (ENSEM) haber propiciado este encuentro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Burger, W.F. y J.M. Shaughnessy (1986), "Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 17, núm. 1, pp. 31-48.

Castelnuovo, E. (1979), *La matemática. La geometría.* [Trad. catalana: *La matematica. La geometria,* Barcelona, Ketres, 1981.]

Fielker, D.S. (1979), "Strategies for Teaching Geometry to Younger Children", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 10, núm. 1, pp. 85-133.

Freudenthal, H. (1971), "Geometry Between the Devil and the Deep Sea", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 3, núm. 2/4, pp. 413-435.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht, D. Reidel.
Fuys, D., D. Geddes y R. Tischler (1988), "The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents", *Journal for Research in Mathematics Education* (monografía núm. 3), Reston, NCTM.
Guillén, G. (1991), *El mundo de los poliedros*, Madrid, Síntesis.
—— (1996), "Identification of Van Hiele Levels of Reasoning in Three-dimensional Geometry", en L. Puig, y A. Gutiérrez (eds.) (1996), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Universitat de València, Valencia, España, pp. 43-50.
—— (1997), *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*, Tesis doctoral, Valencia, Universitat de València. (Publicada en 1999 en la Collecció Tesis doctorals en Microfitxes, Valencia, Universitat de València.)
Gutiérrez, A., A. Jaime y J.M. Fortuny (1991), "An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the Van Hiele Levels", *Journal for Research in Mathematics Education, vol.* 21, núm. 3, pp. 237-251.
Hoffer, A. (1981), "Geometry is More than Proof", *The Mathematics Teacher*, vol. 74, núm. 1, pp. 11-18.
Jaime, A. (1993), *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*, Tesis doctoral, Valencia, Universitat de València.
Kindt, M. (1993), "Enfoque realista de la educación matemática", en A. Salar, F. Alayo, M. Kindt y L. Puig (1993), *Aspectos didácticos de Matemáticas*, núm. 4, Zaragoza, ICE Universidad de Zaragoza, pp. 67-91.
Puig, L. (1994), *Semiótica y matemáticas*, col. Eutopías, Valencia, Episteme.
—— (1996), *Elementos de resolución de problemas*, Granada, Comares.
Treffers, A. (1987), *Three Dimensions (A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project)*, Dordrecht, D. Reidel.
Van Hiele, P.M. (1986), *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*, Londres, Academic Press.

DATOS DE LA AUTORA

Gregoria Guillén Soler
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de Valencia, España
Gregoria.guillen@uv.es