Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas

Joan Miralles de I. Llobet y Jordi Deulofeu Piquet

Resumen: La educación matemática tiene una estrecha relación con la historia de las matemáticas, entre otras razones porque su conocimiento ayudará al profesor, y al alumno, a entender las matemáticas como una actividad que forma parte de la cultura de los pueblos de manera cambiante de acuerdo con las creencias y necesidades de cada momento. No se trata de recrear la historia en todos sus detalles, sino de aquellos que han resultado importantes para la génesis de los conceptos. Este artículo pretende, a través de ejemplos concretos (métodos para la determinación de aproximaciones racionales de las raíces cuadradas), mostrar una manera de abordar un tema cuya aplicación ha dejado de ser relevante con la aparición de las calculadoras, pero cuya importancia conceptual sigue plenamente vigente. Asimismo, se constatan algunas dificultades que se han presentado en alumnos de un primer curso universitario al tratar de comprender el significado y la validez de unos algoritmos cuya importancia va más allá de su efectividad.

Palabras clave: historia y educación matemática, génesis de conceptos, números irracionales, algoritmos de aproximaciones sucesivas.

Abstract: Mathematics education and history should be closely related for many reasons. Particularly because it is useful for both teacher and students to approach mathematics as a cultural activity that changes depending on the interests and necessities of the circumstances. It is not our point to show all the details but those becoming important for the genesis of mathematical concepts. The aim of this paper is to show a way of approaching a specific topic –methods of approximation of square roots– which is conceptually relevant, but has lost its application due to the use of calculators. Besides, the student's difficulties when understanding the meaning and efficiency of several algorithms will be reported.

Keywords: history and mathematics education, genetic approach, irrational numbers, numeric algorithms.

Fecha de recepción: 28 de abril de 2004.

INTRODUCCIÓN

Los procesos de aprendizaje de la matemática tienen muchos aspectos en común con la investigación matemática propiamente dicha. Artigue (1990) señala que "detrás de algunos de estos procesos [de aprendizaje] se perfilan procesos fundamentales del funcionamiento matemático: generalización, búsqueda sistemática de regularidades, entre otros". Por otra parte, siguiendo a Poincaré (1944), en el proceso de invención matemática, tanto los elementos que llevan a plantearse el problema como los que se utilizan en su resolución requieren un conocimiento importante del contexto histórico pasado y presente. Por tanto, de acuerdo con Avitel (1995), "sólo una perspectiva histórica puede ayudar a nuestros estudiantes a comprender la importancia del hecho de que, a diferencia de las ciencias naturales, las matemáticas son acumulativas".

Especialistas, entre los que cabe destacar a Fauvel (1991) y a Barbin (1996), se han planteado preguntas y han señalado ventajas de la utilización de elementos históricos en la enseñanza de las matemáticas, mientras otros como Fowler (1991) han alertado de sus peligros: ¿cómo puede incidir el conocimiento de la historia en el planteamiento general del currículo de matemáticas a los distintos niveles? O, más en concreto, ¿en cuáles aspectos puede ayudar al profesor el conocimiento de la historia?, ¿deben introducirse en el currículo elementos históricos? Está claro que una respuesta profunda y pormenorizada a las cuestiones anteriores trasciende el objetivo de este artículo. Sin embargo, pretendemos mostrar algunos aspectos que, aunque parciales, pensamos que pueden señalar un camino de utilización de la historia de la matemática en la enseñanza.

Para ello, tomaremos a modo de ejemplo el concepto de la raíz cuadrada, cuyo papel en el currículum de matemáticas se ha visto alterado a partir de la universalización de las calculadoras de bolsillo. El algoritmo tradicional de cálculo de raíces cuadradas ha quedado obsoleto hasta el punto de que, salvo algunos profesores, incluso la mayoría de las personas con una formación matemática más o menos sólida lo ha olvidado. En consecuencia, los actuales currícula son profundamente ambiguos en lo que respecta al *qué*, al *cómo* y al *para qué* aprender raíces cuadradas.

Parece fuera de toda duda que una introducción a la cultura matemática necesita referirse al concepto de raíz cuadrada, puesto que éste es imprescindible, entre otras cosas, para resolver ecuaciones de segundo grado. Sin embargo, ha aparecido un problema nuevo: si el algoritmo tradicional de cálculo de raíces cuadradas está obsoleto, ¿qué práctica conviene efectuar de este concepto? Y además, ¿mediante cuáles instrumentos?, ¿es procedente la utilización de la calculadora para introducir el concepto, más allá del propio cálculo concreto de raíces cuadradas?, ¿puede la historia de las matemáticas indicarnos un camino interesante para tratar este tema?

Es obvio que las preguntas anteriores admiten respuestas diversas en función de los objetivos últimos que nos planteemos. Veamos un ejemplo de respuesta extremadamente simple. Si nuestro objetivo queda limitado a la descripción del concepto y a su cálculo, basta con definir la raíz de n como el número cuyo cuadrado vale n e introducir la notación clásica: $\sqrt{n} = a$ si $a^2 = n$. A continuación, sólo nos quedaría conocer los primeros cuadrados perfectos y remitirnos a la calculadora para aquellos casos en que a o n no sean números enteros.

Situaciones como las del ejemplo anterior suelen producirse cuando el profesor define objetivos estrictamente mecánicos o, todavía más claramente, cuando no se plantean objetivos en absoluto. Pero la definición de objetivos y la implementación de los instrumentos para alcanzarlos exige del profesor unos criterios que difícilmente pueden salir sólo de su propia experiencia como alumno o de su formación estrictamente matemática. Éste es uno de los aspectos en los que el conocimiento de la historia de la matemática puede ayudar al profesor.

El presente trabajo nace de la tesis presentada por Miralles de I. (2000) bajo la dirección de Deulofeu. En ella, además de estudiar las relaciones entre historia y didáctica de la matemática y de analizar la génesis del concepto de número, prestando especial atención a los irracionales cuadráticos, se llevó a cabo una experiencia con alumnos de la Universidad Autónoma de Barcelona, algunos de cuyos resultados expondremos parcialmente en una de las secciones de este artículo.

En concreto, mostraremos dos ejemplos que pretenden ilustrar una manera de utilizar la historia en la enseñanza de la matemática. Una vez recogidos de sus fuentes históricas dos métodos relacionados con la aproximación de raíces cuadradas, comentaremos su resolución en el marco histórico correspondiente y analizaremos su fiabilidad matemática con recursos algebraicos y geométricos "modernos". Posteriormente, veremos los resultados obtenidos al plantear uno de estos problemas a un grupo de alumnos de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, estudiantes de maestro de educación primaria, que cursaban la asignatura matemáticas II (optativa). Con esta experiencia, pretendíamos observar las posibles dificultades que encontraría un grupo de alumnos de nivel universitario que recibía un curso optativo de matemáticas, al intentar resolver problemas *con las manos atadas*, es decir, al no poder utilizar muchos de los recursos matemáticos que utilizamos de manera casi automática.

El objetivo principal de este artículo es el de mostrar una posible via de incidencia de la historia de la matemática en la enseñanza de esta ciencia. En síntesis, se trata de utilizar directamente elementos históricos para que el alumno, una vez situado en el contexto correspondiente, pueda utilizarlos para *hacer matemáticas*.

EL CÁLCULO DE RAÍCES CUADRADAS EN LA HISTORIA

Históricamente, el cálculo de raíces cuadradas ha estado presente en todas las civilizaciones, desde la egipcia hasta nuestros días. En unos casos, con mentalidad fundamentalmente práctica: se trata tan sólo de aproximar las raíces lo suficiente para cubrir las necesidades concretas de cálculo. En otros casos, en cambio, la reflexión sobre este concepto lleva a plantearse problemas teóricos y filosóficos, como en la conocida crisis de los irracionales de la matemática griega, o también en el propio estudio de las aproximaciones, ya sea comparando distintos algoritmos o analizando su validez. En esta sección, enumeraremos algunos de los momentos clave de la historia de los irracionales cuadráticos, en particular, los relacionados con la determinación de aproximaciones.

Los arqueólogos han hallado cálculos de aproximaciones de raíces cuadradas en tablillas babilónicas de alrededor de 1700 a.C. Probablemente, pese a que no se ha demostrado, la primera necesidad de estos cálculos procedió de la confección de calendarios para prever los momentos óptimos de siembras y cosechas. Este sistema de aproximaciones consiste, al igual que la conocida más adelante como fórmula de Herón,[1] en los siguientes pasos: para aproximar $\sqrt{N}$ tomaremos su parte entera n y $\dfrac{N}{n}$. La media aritmética de estos valores nos dará la primera aproximación, que se demuestra fácilmente que lo es por exceso. Si ahora dividimos N por la nueva aproximación obtendremos una aproximación por defecto más fina que la anterior. Reiterando este proceso obtendremos aproximaciones cada vez más finas, por defecto y por exceso alternativamente.[2] Uno de los aspectos interesantes de este algoritmo es su interpretación geométrica (en realidad, cada par de aproximaciones corresponde a los lados de una familia de rectángulos de la misma área que tienden al cuadrado).

[1] En la siguiente sección analizaremos esta fórmula.

[2] Puede verse una sencilla demostración de las anteriores afirmaciones en Miralles de I. (2000).

Los *Sulvasutra* –*regla de la cuerda*– son textos de carácter religioso hindú anteriores a 200 d.C. con instrucciones para la construcción de altares de sacrificio, que contienen de manera implícita una gran cantidad de aritmética y geometría. En uno de ellos se encuentra la siguiente aproximación de la $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} \tag{1}$$

Cajori (1980, p. 86) cita a G. R. Kaye, *Indian Mathematics,* para afirmar que esta fórmula fue hallada por *medida directa,* lo que parece más bien inverosímil. Igualmente, Smith (1958, p. 98) no da ninguna explicación sobre cómo fue calculada esta aproximación y, además, equivoca el último signo de la expresión (1). Sin embargo, Gheverguese (1996, pp. 319-322) nos da una justificación verosímil basada en la construcción de un cuadrado de área 2, *desmontando* uno de área 1 y poniendo los trozos alrededor de otro cuadrado de la misma área.

Uno de los problemas que plantea la aproximación (1) es el hecho de tratarse de un ejemplo único: no se encuentran referencias a la forma de aproximar ninguna otra raíz. Por tanto, si pretendemos inspirarnos en esta aproximación para elaborar un algoritmo tendremos que hacer muchas hipótesis. En todo caso, a diferencia de lo que ocurre con todos los otros métodos, éste es un método finito.[3]

Nicolás Chuquet (c. 1445-c. 1500) escribió hacia 1484 la *Triparty en la science des nombres,* una aritmética que va mucho más allá de las clásicas aritméticas comerciales de la época (J. Paradís y A. Malet, 1989). Este libro, cuya envergadura percibimos con sólo leer el índice, desgraciadamente no fue publicado hasta muchos años después y, además, de manera parcial. Étienne de la Roche publicó algunas partes en 1520 y, entre ellas, el método de aproximación de las raíces cuadradas que más tarde daría pie a las llamadas fracciones de Farey. En la siguiente sección analizaremos este método.

Hasta este momento, parece claro que todos los algoritmos de aproximación de raíces cuadradas que hemos tratado pretenden tan sólo hallar una aproximación suficientemente buena para las necesidades prácticas de la época correspondiente. El método de Bombelli (1579) parece un paso intermedio en el camino histórico que permitirá pasar de las meras aproximaciones a métodos recurrentes que supongan caracterizaciones de los irracionales cuadráticos, es decir,

[3] En Miralles de I. (2000), hemos desarrollado un proceso que permite hallar aproximaciones a la manera india.

los sistemas de representación de los números reales. Este método, que puede consultarse con detalle en Miralles de I. (2000), es el primero que utiliza elementos de álgebra simbólica en lugar de métodos aritméticos, y se basa en despreciar el término de grado máximo en una ecuación polinómica de segundo grado. No obstante, conviene observar que el interés básico de Bombelli se centra en la obtención de aproximaciones de las raíces cuadradas tan precisas como haga falta, pero sin ninguna aspiración que vaya más allá: a pesar de exponer un proceso recurrente, sólo aspira a hallar una manera cómoda de aproximar raíces cuadradas. Esta finalidad queda clara cuando, después de explicar el procedimiento para el cálculo de la $\sqrt{13}$, y antes de justificarlo algebraicamente, explica la forma de aproximar raíces de números de la forma $a^2 - 1$, para los cuales el algoritmo que ha construido no funciona. La regla que da Bombelli para estos casos no permite la recurrencia de la regla general que ha hallado antes. Sin embargo, este hecho no preocupa en absoluto al autor, ya que le permite obtener también para este caso aproximaciones de la raíz tan buenas como quiera.

Tras otros avances en el proceso hacia los sistemas de representación de los números reales, como la introducción de las fracciones decimales por Stevin (1639) o la notación de Cataldi (1613) para las fracciones continuas, podemos considerar a L. Euler (1707-1783) como el padre de la representación de los números reales en fracciones continuas ordinarias. En su libro *Introducción al análisis del infinito,* Euler (1748) estudia sistemáticamente la manera de expresar los distintos tipos de funciones –racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, circulares– en forma de series infinitas, para terminar con un estudio sistemático de la manera de expresar las fracciones continuas como series infinitas y a la inversa.[4] Además, las aproximaciones de los irracionales cuadráticos obtenidas de esta manera son *óptimas,* es decir, dada la aproximación $\frac{p}{q}$ no existe ninguna fracción con denominador menor o igual que q tal que aproxime mejor el irracional α:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right| \forall \bar{q} < q$$

[4] En Miralles de I. (2000), damos una demostración del hecho de que todo irracional cuadrático queda caracterizado por una expresión en fracción continua ordinaria periódica.

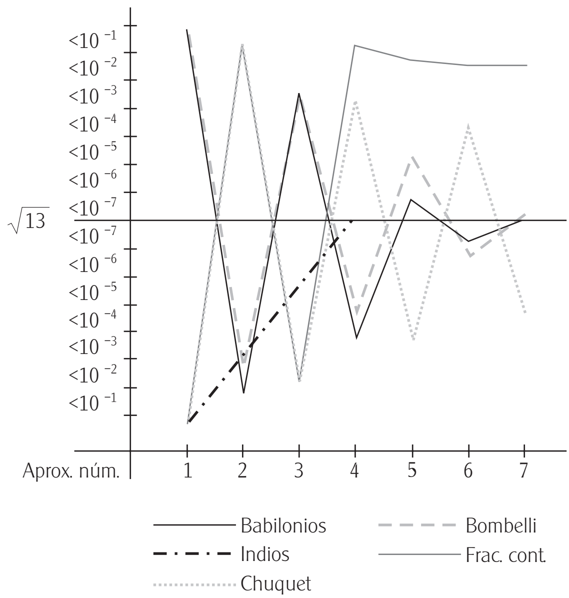
La expresión de los irracionales cuadráticos en fracción continua supone un salto epistemológico respecto de las concepciones anteriores. Ahora no sólo se trata de obtener una aproximación suficiente para unas necesidades concretas: las fracciones continuas suponen una *caracterización* de los irracionales cuadráticos. Todo irracional cuadrático tiene una expresión en fracción continua periódica y, recíprocamente, toda fracción continua periódica corresponde a un irracional cuadrático.

Como no podía ser de otro modo, este paso se da después de muchos tanteos y vacilaciones, pasos adelante y atrás. Como hemos señalado más arriba, Bombelli presenta el primer tanteo algebraico de las aproximaciones, mientras que Cataldi aporta un primer estudio de su convergencia. Podemos resumir los resultados obtenidos por todos estos autores anteriores en el cuadro 1, que nos da las aproximaciones de la $\sqrt{13}$ por los distintos métodos descritos. Por ser la misma en todos los casos, hemos prescindido de la primera aproximación, que es la parte entera de la raíz, es decir 3. Indicaremos con $\nearrow$ las aproximaciones por exceso y con $\searrow$ las que sean por defecto:

Cuadro 1

Aprox.	Babilonios	Indios	Chuquet	Bombelli	Frac. cont.
1	$\frac{11}{3}\nearrow$	$\frac{7}{2}\searrow$	$\frac{7}{2}\searrow$	$\frac{11}{3}\nearrow$	$\frac{7}{2}\searrow$
2	$\frac{39}{11}\searrow$	$\frac{18}{5}\searrow$	$\frac{11}{3}\nearrow$	$\frac{18}{5}\searrow$	$\frac{11}{3}\nearrow$
3	$\frac{119}{33}\nearrow$	$\frac{649}{180}\searrow$	$\frac{18}{5}\searrow$	$\frac{119}{33}\nearrow$	$\frac{18}{5}\searrow$
4	$\frac{429}{119}\searrow$	$\frac{842\,401}{233\,640}\nearrow$	$\frac{29}{8}\nearrow$	$\frac{393}{109}\searrow$	$\frac{119}{33}\nearrow$
5	$\frac{14\,159}{3\,927}\nearrow$		$\frac{47}{13}\nearrow$	$\frac{649}{180}\nearrow$	$\frac{137}{38}\searrow$
6	$\frac{51\,051}{14\,159}\searrow$		$\frac{65}{18}\nearrow$	$\frac{4\,287}{1\,189}\searrow$	$\frac{256}{71}\nearrow$
7	$\frac{200\,477\,279}{55\,602\,393}\nearrow$		$\frac{83}{23}\nearrow$	$\frac{14\,159}{3\,927}\nearrow$	$\frac{393}{109}\searrow$
8	$\frac{722\,831\,109}{200\,477\,279}\searrow$		$\frac{101}{28}\nearrow$	$\frac{23\,382}{6\,845}\searrow$	$\frac{649}{180}\nearrow$

Figura 1 Las diversas aproximaciones de la $\sqrt{3}$



El gráfico de la figura 1 nos muestra, en escala logarítmica y a modo de ejemplo, una manera de comparar la *velocidad* de las aproximaciones de la $\sqrt{13}$ correspondiente a cada uno de los algoritmos.

DOS EJEMPLOS DE CÁLCULO DE RAÍCES CUADRADAS

Hasta ahora hemos presentado un paisaje *a vista de pájaro* de algunos de los principales métodos históricos de aproximación de las raíces cuadradas, desde los babilonios hasta nuestros días. Desde los egipcios, y con toda probabilidad desde antes, la necesidad de aproximar los radicales cuadráticos está históricamente ligada a la resolución de problemas prácticos de todo tipo. En este contexto, los autores quedan en general satisfechos si consiguen una aproximación suficientemente buena para cubrir sus necesidades. Casi todos los casos citados en la sección anterior son métodos de *aproximaciones sucesivas*, es decir, hallamos cada aproximación a partir de la hallada con anterioridad. La única excepción a esta regla es la fórmula de Herón: en este caso, se trata simplemente de acotar el radical por exceso y por defecto mediante un proceso no recurrente. Por otra parte, el método indio no parece ir más allá de una curiosidad, puesto que nada nos permite afirmar que se aplicara a las raíces en general. El resto de métodos presentados tienen en común el concepto de *recurrencia*: se trata de aproximar la raíz *tanto como sea necesario*.

A continuación, profundizaremos en el análisis de dos de los problemas citados. El primero de ellos es el método de aproximaciones de Chuquet: se trata de un método sencillo, estrictamente aritmético, que no requiere ni permite grandes demostraciones: en consecuencia, se trata de una práctica interesante para introducir el concepto de aproximaciones sucesivas, que nuestros alumnos sólo conocen ligado a las expresiones decimales.

El segundo de los problemas que trataremos, la fórmula de Herón, es radicalmente distinto en todos los aspectos: no se trata, al menos en su versión histórica, de un método recurrente, no es evidente en absoluto y por ello exige demostración de manera natural y, por último, al abordar su justificación permite la realización de diversas demostraciones elementales, tanto de carácter algebraico como geométrico.

Las aproximaciones de Chuquet

En el año 1484, Nicolás Chuquet escribió la *Triparty en la science des nombres*, que contiene un método de aproximación de las raíces cuadradas parecido al de los babilonios. La idea básica parte del hecho de que si

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

entonces se verifica

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Veamos cómo calcularía Chuquet las aproximaciones sucesivas de la $\sqrt{13}$: Partimos de la parte entera, 3, y tomamos como primera fracción $\frac{1}{2}$; entonces, $3+\frac{1}{2}$, es una aproximación por defecto, ya que

$$\left(3+\frac{1}{2}\right)^2 = 12+\frac{1}{4} < 13$$

y, por otra parte, $\frac{1}{1}$ nos da una aproximación por exceso: $3+\frac{1}{1} = 4$. Entonces, determinamos la siguiente fracción sumando numeradores (1 + 1 = 2) y denominadores (2 + 1 = 3), con lo que obtenemos la fracción $\frac{2}{3}$. Dado que

$$\left(3+\frac{2}{3}\right)^2 = 13+\frac{4}{9} > 13$$

se tiene una aproximación por exceso, por lo que tomaremos como siguiente aproximación $\frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$, que nos da una aproximación por defecto ya que

$$\left(3+\frac{3}{5}\right)^2 = 13-\frac{1}{25} < 13.$$

Continuando este proceso obtenemos las siguientes aproximaciones de la $\sqrt{13}$:

$$\frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{29}{8}, \frac{47}{13}, \frac{65}{18}, \frac{83}{23}, \frac{101}{28}, \wedge$$

Observemos que el método de Chuquet no garantiza aproximaciones alternativamente por defecto y por exceso. Además, la convergencia es mucho más lenta que en el caso de las aproximaciones de los babilonios. Sin embargo, las fracciones que se obtienen están formadas por numeradores y denominadores mucho menores que en el caso del método babilonio.

Una aproximación de raíces cuadradas: la fórmula de Herón

Se atribuye a Herón de Alejandría (c. 50?) la siguiente expresión para determinar una aproximación de una raíz cuadrada:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} < a + \frac{r}{2a}$$

donde a^2 es el mayor cuadrado menor que A. Posteriormente, muchos autores utilizaron esta fórmula, y su versión más completa:

$$a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} < a + \frac{r}{2a} \qquad (2)$$

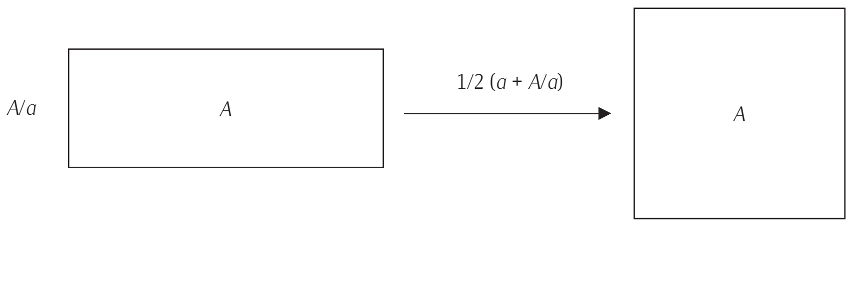
para estudiar las aproximaciones de les raíces cuadradas.

Parece plausible que esta aproximación, que algunos autores consideran mucho más antigua, se hallara de la siguiente manera: sea $A = a^2 + r$, donde a es la parte entera de $\sqrt{A}$. Si construimos un rectángulo de área A tal que uno de sus lados valga a, entonces el otro lado valdrá $\dfrac{A}{a}$ (figura 2, izquierda). A partir de este rectángulo, y para conseguir otro que sea *más cuadrado*, construimos un rectángulo también de área A, pero tal que uno de sus lados sea la media aritmética de los dos lados del rectángulo anterior (figura 2, derecha), obteniendo directamente la fórmula de Herón:

$$\frac{a + \frac{A}{2a}}{2} = \frac{a^2 + A}{2a} = \frac{2a^2 + r}{2a} = a + \frac{r}{2a}.$$

Obsérvese la relación entre la fórmula de Herón ampliada (2) y las dos primeras aproximaciones del método utilizado por los babilonios; aunque este método permite determinar aproximaciones sucesivas por exceso y por defecto alternadamente, mientras que la expresión (2) sólo da una aproximación por exceso

Figura 2 La aproximación de Herón



y otra por defecto, la primera aproximación (por exceso) es coincidente, mientras que la segunda es distinta. Por ejemplo, para $\sqrt{13}$ las dos primeras aproximaciones según los babilonios son: 11/3 y 39/11, mientras que la fórmula de Herón ampliada nos da: $11/3 > \sqrt{13} > 25/7$.

La expresión (2) puede ser demostrada algebraicamente sin mayores dificultades como se muestra en Miralles de I. (2000). Sin embargo, nos centraremos ahora en una demostración de tipo geométrico basada en la descomposición del cuadrado. Este tipo de demostración es más frecuente en la tradición oriental que en la matemática griega y, a veces, es de gran utilidad. Se trata de acotar una cantidad, que llamaremos x, tal que

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + x.$$

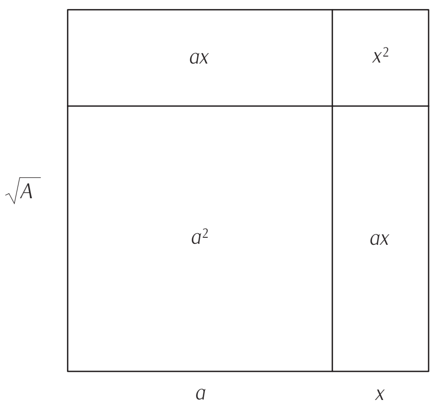
Si la determinación de x fuese exacta, tendríamos (figura 3):

$$A = a^2 + 2ax + x^2$$

Si despreciamos el término x^2, que es positivo, tendremos:

$$A > a^2 + 2ax \rightarrow A - a^2 > 2ax \rightarrow x < \frac{A - a^2}{2a} = \frac{r}{2a}.$$

Figura 3 Determinación geométrica de $r/2a$



con lo cual queda demostrado que:

$$\sqrt{A} < a + \frac{r}{2a}.$$

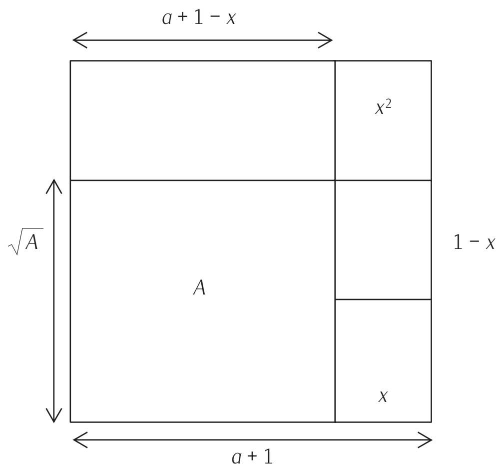
La demostración de la desigualdad de la izquierda de (2), aunque algo más compleja, puede hacerse de forma parecida a la anterior. Consideremos el cuadrado de área A de la figura 4 y construyamos el cuadrado de lado $a + 1$. Tendremos entonces:

$$\begin{aligned} A &= (a+1)^2 - 2x(a+1-x) - x^2 = (a+1)^2 - 2ax - 2x + x^2 = \\ &= (a+1)^2 - x(2a+1) - x(1-x). \end{aligned} \tag{5}$$

Como se observa en la figura 4, $x(1-x)$, área del rectángulo central de la derecha, es despreciable frente al resto de los términos. En consecuencia, de la expresión (5) obtendremos, teniendo en cuenta que $x(1-x) > 0$:

$$A < (a+1)^2 - x(2a+1) \rightarrow x < \frac{(a+1)^2 - A}{2a+1} = \frac{a^2+2a+1-A}{2a+1} =$$
$$= \frac{2a+1-r}{2a+1} = 1 - \frac{r}{2a+1}$$

Figura 4 Determinación geométrica de $r/(2a + 1)$



y, como $\sqrt{A} = a + 1 - x$, tendremos

$$\sqrt{A} = a + 1 - x > a + 1 - 1 + \frac{r}{2a+1} = a + \frac{r}{2a+1},$$

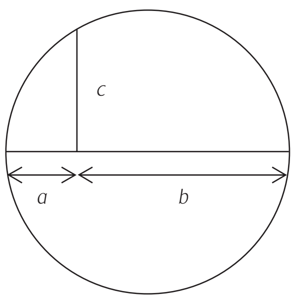
como queríamos demostrar.

CONSIDERACIONES SOBRE EL TRABAJO EN CLASE DE LOS ESTUDIANTES

Antes de entrar en otras consideraciones, conviene tener presente que el problema de la determinación de las raíces cuadradas se resuelve geométricamente de manera exacta y sin demasiada dificultad (por ejemplo, a la manera de los griegos, tal como muestra la figura 5, donde $c^2 = a \cdot b$, y por lo tanto, $c = \sqrt{a \cdot b}$).

Lo que los algoritmos históricos citados pretenden resolver es el problema del cómputo para la determinación de las aproximaciones racionales. Precisamente ahí radica el motivo de la elección de los dos ejemplos anteriores: el método de Chuquet es sencillo, comprensible incluso para alumnos de secundaria, puramente aritmético y nos da aproximaciones que, a pesar de no ser alternadamente por exceso y por defecto y de convergencia lenta, mantienen sus numeradores y sus denominadores bastante pequeños. En cambio, las aproximaciones de los babilonios pueden justificarse geométricamente y convergen a gran velocidad, pero sus numeradores y denominadores crecen también muy rápidamente.

Figura 5 *c* como media proporcional entre *a* y *b*



El problema de la fórmula de Herón, entre otros, fue planteado al grupo de alumnos citado en la introducción. No fue éste el primero de los problemas históricos que se sometió a su reflexión y, por tanto, habían tenido ya la oportunidad de enfrentarse con algunas de las dificultades que aparecieron al trabajar con él. Además, el *dossier* que facilitamos a los alumnos contenía una introducción a la problemática general que se planteaba, además de un guión que dirigía sus pasos para la resolución de los respectivos problemas.

El objetivo que pretendíamos era situar a los estudiantes frente a la resolución de un problema, contextualizado históricamernte, imponiendo algunas restricciones derivadas de él; por ejemplo, aunque los estudiantes podían utilizar una calculadora para realizar las operaciones, debían expresar los números racionales en forma de fracción y no en forma decimal. Además, el problema tenía una primera parte de aplicación de una fórmula y una segunda en la cual debían demostrar su validez general.

El interés por abordar una demostración de este tipo surgió a partir de una creencia muy extendida en nuestros estudiantes, y constatada con anterioridad, relativa a la diferencia entre la determinación de un método general y exacto para la determinación de una raíz cuadrada (la construcción geométrica de los griegos basada en la media proporcional ya mencionada anteriormente: figura 5), cuya validez se demuestra pero que no tiene valor "práctico" (en el sentido de que no permite computar el valor de la raíz) y, por otro lado, los métodos aproximados de cómputo, en los que la importancia radica en el propio resultado del cómputo, por lo que la demostración de la validez general del método parecía irrelevante. En otras palabras, parecería que en los métodos que tienen como finalidad la determinación de aproximaciones, lo importante es el valor obtenido más que la calidad de la aproximación y, por supuesto, más que el método en sí mismo.

Pasando a describir los resultados obtenidos en el trabajo de los estudiantes, en concreto, en relación con la fórmula de Herón, en el ámbito del grupo clase, una primera constatación es que aquéllos fueron bastante homogéneos, y sus características principales pueden resumirse en los siguientes puntos:

- Empezamos sugiriendo que comprobaran la validez de la fórmula de Herón en el caso de la $\sqrt{13}$ antes de atacar el resto de preguntas, y prácticamente todos los estudiantes lo hicieron correctamente (como se ha comentado, se permitió la utilización de la calculadora).
- Respecto a la demostración algebraica de la aproximación por exceso observamos que, excepto un caso en que se produjo un error sintáctico que

no fue detectado por parte del alumno, el razonamiento seguido puede considerarse correcto en todos los demás casos. Sin embargo, la estructura lógica y simbólica de la demostración es casi siempre muy débil: por un lado, se parte de la desigualdad, se eleva al cuadrado y se despejan términos hasta llegar a una afirmación cierta (proceso que dificultaría la detección de errores si la demostración fuese técnicamente más compleja). Por otro lado, sólo un alumno tuvo en cuenta que para elevar al cuadrado una desigualdad hay que controlar el signo de sus términos.

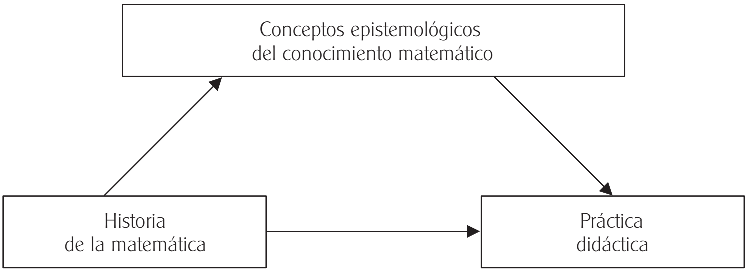
- En muy pocos casos se intenta la demostración de la aproximación por defecto y, a pesar de las indicaciones dirigidas a proporcionar elementos para abordar dicha demostración, en ningún caso se logra.
- La demostración geométrica de la aproximación por exceso es realizada correctamente casi en todos los casos, algo que *a priori* puede resultar sorprendente pero que puede explicarse gracias al hecho de tratarse de alumnos con una práctica importante de demostraciones geométricas que utilizan soporte visual. Debemos subrayar, sin embargo, que la parte algebraica de esta demostración adolece de las mismas dificultades simbólicas de las demostraciones propiamente algebraicas.
- En conjunto, los alumnos encontraron mucho más abordable, y al mismo tiempo convincente, la demostración geomética que la algebraica, lo que concuerda con los resultados logrados en su trabajo.

CONCLUSIONES

La presentación de problemas históricos como el que acabamos de describir nos ha permitido comprobar las dificultades que supone para la mayoría de los estudiantes el hecho de situarse en el contexto histórico-matemático del problema planteado. El trabajo con este tipo de problemas, que en nuestro caso se presenta guiado para tratar de superar aquellas dificultades, favorece, por un lado, un cambio de mentalidad para comprender el contexto del problema y, por otro, enriquece sus concepciones sobre la realidad y la evolución de la matemática.

Si, como postulamos en Miralles de I. (2000), el objetivo central de la enseñanza de la matemática es el aprendizaje de las formas de razonamiento, el conocimiento de su evolución histórica deberá ser un elemento de primera magnitud para esta enseñanza. El propio desconocimiento de la historia de la matemática por parte del profesor provoca la transmisión de la matemática a los estudiantes

Figura 6 Relaciones entre historia y enseñanza



como si se tratara de elementos aislados, sin precedentes ni consecuencias posteriores para el progreso del conocimiento científico. Entendemos que es en este punto donde el conocimiento de la historia de los conceptos matemáticos puede ser de gran ayuda.

A pesar de la ingenuidad de las transposiciones automáticas entre historia y epistemología de la matemática por un lado, y didáctica de la matemática por otro, no cabe duda de la influencia positiva que tendrá para profesores y alumnos el conocimiento, a cada cual según su nivel, de la evolución de los métodos y de las principales dificultades que ha sido necesario vencer hasta llegar a establecer, de un modo suficientemente preciso, los distintos conceptos matemáticos.

Los profesores que en algún momento de su formación, ya sea en su preparación inicial o bien en una etapa posterior, han estado interesados en la historia de la matemática "tienen una percepción distinta de los errores que cometen sus alumnos, tienen una mejor comprensión de ciertas observaciones que hacen sus alumnos, y son más capaces de responderlas" (Barbin, 1996, p. 17).

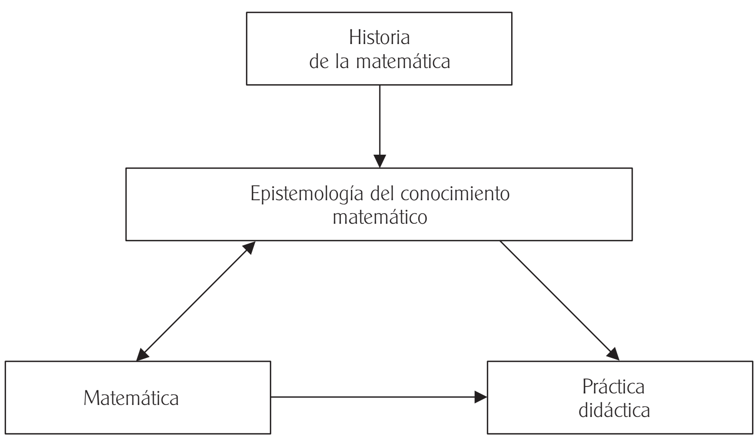
En la figura 6, tomada de Barbin (1996), se esquematizan las relaciones entre historia de la matemática, epistemología y didáctica: por un lado, la historia proporciona elementos que pueden ser aplicados en la tarea docente: problemas para resolver, criterios de dificultad, visión de conjunto. Por otra parte, la historia nos permite analizar la génesis y la evolución de los conceptos matemáticos, y ello puede provocar cambios profundos en la capacidad de enseñar. Si el conocimiento matemático es un proceso y no un producto, el aprendizaje de este proceso estará directamente concernido por el conocimiento de los procesos que han tenido lugar históricamente.

La experimentación con los estudiantes nos ha permitido comprobar la dificultad que les supone el hecho de situarse en el contexto histórico-matemático del problema que se les plantea. Han tenido que reflexionar sobre cuáles son los instrumentos que pueden usar para resolver un problema histórico y darse cuenta, por ejemplo, de que no es posible utilizar aquello que estamos tratando de demostrar. En nuestro caso concreto, ha sido necesario darse cuenta de que no podemos utilizar la resolución de una ecuación de segundo grado al calcular una aproximación de una raíz, puesto que la resolución de dicha ecuación requiere precisamente la realización de una raíz. La superación de esta dificultad mediante la búsqueda de otros métodos permite, por un lado, un cambio de mentalidad para comprender el contexto del problema y, por otro, enriquece sus concepciones sobre la realidad y la evolución de la matemática.

Como consecuencia final, y teniendo en cuenta que nuestro objetivo es la enseñanza de la matemática y no la de su historia por sí misma, podríamos afirmar que queda justificada una reestructuración del esquema de Barbin (reproducido en la figura 6), introduciendo en él la propia matemática (figura 7). Esta inclusión tiene, a nuestro entender, dos consecuencias fundamentales: en primer lugar nos permite destacar que la matemática interactúa con el análisis epistemológico en una doble dirección: por un lado, el análisis epistemológico nos lleva de manera natural a *hacer* matemáticas y, en sentido inverso, *haciendo* matemáticas es como comprendemos el sentido profundo de la evolución de las ideas.

En segundo lugar, consideramos que el hecho de *hacer* matemáticas incide de una manera directa en la práctica de la enseñanza, mientras que, en el es-

Figura 7 Relaciones entre historia, matemática y enseñanza



quema original, quien incide en la práctica de la enseñanza es la historia de la matemática, afirmación que consideramos inexacta: el mero estudio de la historia de la matemática corre el riesgo de incidir sobre su enseñanza únicamente en aspectos que podríamos calificar de anecdóticos, o cuanto menos no especialmente relevantes. Por todo ello, nos atrevemos a afirmar que la historia incide en realidad sobre la enseñanza de la matemática a través del análisis de la evolución de los conceptos de dicha ciencia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1990), "Épistémologie et Didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, núms. 2-3, pp. 242-285.

Avitel, S. (1995), "History of Mathemtics Can Help Improve Instruction and Learning", *Learn from the Masters*, Washington, The Mathematical Association of America.

Barbin, E. (1996), "The Role of Problems in the History and Teaching Mathematics", en *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, Washington, The Mathematical Association of America.

Bombelli, R. (1579), *L'Algebra, opera di..*, 2a. ed., Bolonia.

Cajori, F. (1980), *History of Mathematics*, 3a. ed., Nueva York, Chelsea Publishing.

Cataldi, P. A. (1613), *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice...*, Bolonia, B. Cochi.

Euler, L. (1988), *Introductio in analysin infinitorum*, Lausana. Edición inglesa: *Introduction to Analysis of the Infinite*, Nueva York, Springer-Verlag [1748].

Fauvel, J. (1991), "Using History in Mathematics Education", *For the Learning of Mathematics*, vol. 11, núm. 2, pp. 3-6.

Fowler, D. (1991), "Perils and Pitfalls of History", *For the Learning of Mathematics*, vol. 11, núm. 2, pp. 15-16.

Gheverghese, G. J. (1996), *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*. [Edición castellana: *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Madrid, Pirámide.]

Miralles de Imperial, J. (2000), *Sobre l'evolució històrica del concepte de nombre. Impacte didàctic i algunes propostes concretes*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Miralles de I., J. y J. Paradís (1999), "Resolució de problemes i mètode de raonament en l'educació matemàtica", *Temps d'educació*, núm. 22, segundo semestre.

Paradís, J. y A. Malet (1989), *Los orígenes del Álgebra: de los árabes al Renacimiento,* Barcelona, PPU.
Poincaré, H. (1944), *Ciencia y método,* Buenos Aires, Espasa-Calpe.
Polya, G. (1966), *Matemáticas y razonamiento plausible,* Madrid, Tecnos.
Smith, D. E. (1958), *History of Mathematics* (2 vols.), Nueva York, Dover.
Stevin, S. (1639), *Les oeuvres mathématiques...,* Leiden, Albert Girard.

DATOS DE LOS AUTORES

Joan Miralles de I. Llobet
Departamento de Economía y Empresa, Universitat Pompeu Fabra, España
joan.miralles@upf.edu

Jordi Deulofeu Piquet
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universitat Autònoma de Barcelona, España
jordi.deulofeu@uab.es