

Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática

Martín Eduardo Acosta Gempeler

Resumen: A pesar del gran potencial didáctico del software de geometría dinámica, los profesores de matemáticas experimentan serias dificultades para integrarlo en la enseñanza. En este artículo exponemos la falta de una práctica de referencia como una de las causas de esta situación. Proponemos, entonces, la geometría experimental como práctica de referencia de la geometría dinámica e ilustramos, mediante un ejemplo de resolución de problemas, las nuevas técnicas y tecnologías (en el sentido de la teoría antropológica de la didáctica) que pueden implementarse como parte de esa práctica.

Palabras clave: geometría dinámica, resolución de problemas, técnicas y tecnologías, matemática experimental, enseñanza de la geometría.

Résumé: Malgré le grand potentiel didactique des logiciels de géométrie dynamique, les enseignants ont de sérieuses difficultés pour les intégrer dans l'enseignement. Dans cet article nous soulignons le manque d'une pratique de référence comme une des causes de cette situation. Nous proposons la géométrie expérimentale comme pratique de référence de la géométrie dynamique et nous illustrons, à l'aide d'un exemple de résolution de problèmes, les nouvelles techniques et technologies (dans le sens de la théorie anthropologique du didactique) qui peuvent être développées comme partie de cette pratique.

Mots clés: géométrie dynamique, résolution de problèmes, techniques et technologies, mathématique expérimentale, enseignement de la géométrie.

Fecha de recepción: 9 de enero de 2005.

LA GEOMETRÍA DINÁMICA Y LA ENSEÑANZA: NECESIDAD DE UNA NUEVA PRAXEOLOGÍA MATEMÁTICA

El software de geometría dinámica ha experimentado un rápido desarrollo y difusión en años recientes y distintos trabajos de investigación resaltan sus potenciales en la enseñanza de las matemáticas (Laborde, 1995; Laborde y Capponi, 1994). Sin embargo, la utilización de la geometría dinámica por parte de los profesores de matemáticas se muestra problemática y compleja. Incluso en las instituciones con condiciones de infraestructura favorables (disponibilidad de equipos y licencias, interés de parte de los profesores), los estudios revelan un uso bastante limitado del software (Ruthven *et al.*, 2004).

Una de las razones que explican esta dificultad es un desequilibrio entre el punto de vista matemático y el punto de vista didáctico entre los usuarios del software de geometría dinámica. A diferencia de otros software de matemáticas, la geometría dinámica fue destinada desde su origen a la enseñanza, por lo que se reconoce fácilmente su vocación didáctica y se resaltan sus potencialidades en la enseñanza; pero como la comunidad matemática no lo ha integrado dentro de su práctica profesional, no se lo reconoce como una herramienta legítima para hacer matemáticas ni se estudian las repercusiones de su utilización en la producción de nuevo conocimiento. En otras palabras, se acepta la necesidad de una nueva práctica de la enseñanza de las matemáticas que introduzca la utilización de la geometría dinámica, pero no la necesidad de una nueva práctica de las propias matemáticas que utilice esta herramienta.

Tal como lo señala la teoría antropológica de la didáctica (TAD) (Bosch y Chevallard, 1999), los puntos de vista didáctico y matemático no pueden tomarse de manera independiente; ambos forman parte de una misma totalidad: el estudio de las matemáticas. Toda praxeología didáctica depende de una praxeología matemática que pretende construir y, a su vez, toda praxeología matemática implica una praxeología didáctica que permita su nacimiento en la práctica. Pretender modificar la praxeología didáctica para utilizar el software sin modificar la praxeología matemática es una tarea imposible: el profesor de matemáticas se verá enfrentado a una forma de trabajo de los alumnos que no podrá reconocer legítimamente como trabajo matemático, pues difiere de la praxeología matemática que él debe enseñar y, por lo tanto, terminará restringiendo a un mínimo la intervención del software en el trabajo matemático de los alumnos.

Por otra parte, la misma teoría advierte sobre la imposibilidad de introducir

nuevos objetos ostensivos¹ dentro de una praxeología matemático/didáctica, sin que se dé una reestructuración global de dicha praxeología (Bosch y Chevallard, 1999). Precisamente este fenómeno es el que enfrentamos al tratar de introducir la geometría dinámica en la enseñanza. La geometría dinámica constituye un nuevo sistema de representación de los objetos geométricos que utiliza nuevos objetos ostensivos, los dibujos computarizados, que se diferencian de los dibujos sobre el papel precisamente por su dinamismo: pueden ser arrastrados y deformados en la pantalla, conservando las propiedades geométricas que se les ha asignado por el procedimiento de construcción. ¿Cuáles son las consecuencias matemáticas de la utilización de estos nuevos objetos ostensivos? Es decir, ¿qué técnicas matemáticas pueden emplear estos nuevos objetos dinámicos, y qué tecnologías utilizar para justificar y explicar este empleo? Las respuestas a estas preguntas son indispensables para enfrentar la problemática de la utilización de la geometría dinámica en la enseñanza de las matemáticas.

Podemos resumir diciendo que para poder *enseñar* matemáticas utilizando la geometría dinámica, primero debemos *hacer* matemáticas utilizando la geometría dinámica. Por lo tanto, es indispensable desarrollar una nueva práctica de las matemáticas y no sólo de su enseñanza. Necesidad que incluye la identificación de nuevas técnicas y tecnologías (en el sentido de la teoría antropológica de la didáctica) que utilizan la geometría dinámica, su difusión y su discusión en el seno de la comunidad matemática y de profesores de matemáticas.

Como los programas de geometría dinámica no nacieron como parte de la práctica de los matemáticos profesionales, no puede contarse con bibliografía de referencia que describa su utilización matemática. Por consiguiente, me he propuesto poner a prueba el potencial matemático del programa Cabri, resolviendo problemas no rutinarios de geometría plana.² El trabajo que presento a continuación busca sintetizar los principales resultados de ese esfuerzo, y el nombre de esa nueva práctica es geometría dinámica experimental.

El profesor Jonathan Browein³ habla de la necesidad de reconocer la utiliza-

¹ La TAD postula que en el trabajo matemático se manipulan dos clases de objetos: los objetos ostensivos son aquellos que tienen una materialidad y pueden ser aprehendidos por los sentidos, mientras que los objetos no ostensivos no tienen ninguna materialidad. Estos dos tipos de objetos dependen uno del otro y no pueden existir por separado.

² En la página web tecfa.unige.ch/problemes pueden encontrar ejemplos de algunos de esos problemas.

³ <http://www.cecm.sfu.ca/organics/vault/expmath/expmath/html/expmath.html>, página web consultada en abril de 2005.

ción de computadoras en la investigación matemática como una práctica legítima, para lo cual propone definir las matemáticas experimentales como aquellas que:

1. Utilizan la computadora para generar datos y poner a prueba sus conjeturas.
2. Hacen énfasis en los procesos de construcción del conocimiento más que en su formalización.
3. Reconocen las ventajas de la formalización del conocimiento, pero no consideran dicha formalización como condición indispensable para la investigación y reconocen la legitimidad del conocimiento validado por la experiencia, en espera de una posible formalización.

Adaptando esta definición, la geometría dinámica experimental puede definirse como una práctica geométrica que privilegia la observación y manipulación de los objetos geométricos en la pantalla de la computadora, con la intención de emitir conjeturas sobre las propiedades geométricas de dichos objetos, conjeturas que se ponen a prueba mediante el arrastre, la medición y la construcción de objetos auxiliares. La invalidación de una conjetura en geometría experimental puede considerarse equivalente a una demostración de su falsedad por medio de un contraejemplo. Las conjeturas que no sean invalidadas por la experiencia se consideran verdaderas, en espera de una demostración formal. Aunque una figura dinámica no puede constituir una demostración de la validez de una conjetura, sí puede contribuir a la construcción de una demostración formal, pues permite encontrar relaciones que pueden constituir encadenamientos lógicos de dicha demostración.

A continuación trataré de ilustrar estas afirmaciones mediante un ejemplo de resolución de un problema de geometría.

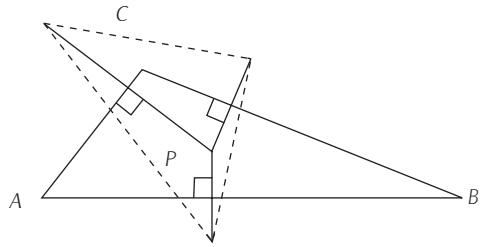
EJEMPLO DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA NO RUTINARIO DE GEOMETRÍA UTILIZANDO LA GEOMETRÍA DINÁMICA

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

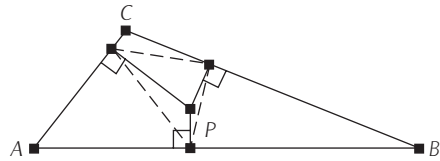
Dado un triángulo cualquiera ABC y un punto cualquiera P , ¿cuál es el lugar geométrico de puntos P tales que su triángulo simétrico-lateral y su triángulo antipedal sean perspectivas?

Definiciones:⁴

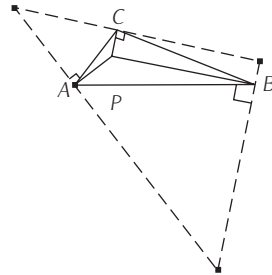
Triángulo simétrico-lateral: dado un triángulo ABC y un punto P , el triángulo simétrico-lateral de P con respecto a ABC es el triángulo formado por los puntos simétricos de P con respecto a los lados a , b y c .



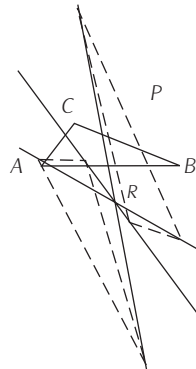
Triángulo pedal: dado un triángulo ABC y un punto P , el triángulo pedal de P con respecto a ABC es el triángulo formado por los pies de las perpendiculares a los lados a , b y c que pasan por P .



Triángulo antipedal: dado un triángulo ABC y un punto P , el triángulo antipedal de P con respecto a ABC es el triángulo tal que ABC es pedal de P con respecto a él.



Triángulos perspectivas: dos triángulos se consideran perspectivas si las rectas que unen sus vértices respectivos son concurrentes. En la imagen pueden verse el triángulo simétrico-lateral de P (punteado) y el triángulo antipedal de P (punteado grueso) perspectivas, el punto de concurrencia de las tres rectas es el punto R .



⁴ A fin de facilitar la lectura, en todas las figuras la forma y la posición del triángulo ABC se mantienen invariables. Sin embargo, también se comprobaron todas las propiedades enunciadas deformando el triángulo ABC .

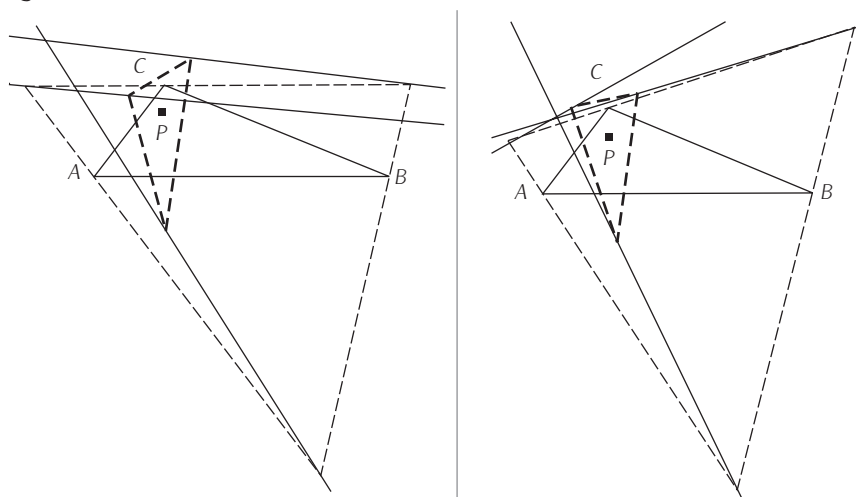
IDENTIFICACIÓN DE LA FORMA DEL LUGAR GEOMÉTRICO.**TÉCNICA DE DETECCIÓN DE PUNTOS**

Como es corriente en un problema de lugar geométrico, necesitamos ubicar gráficamente algunos puntos de éste con el propósito de identificar la forma y el grado de la curva solución.

La complejidad de las construcciones que implica este problema hace que su tratamiento con papel y lápiz sea sumamente costoso en tiempo y atención. En cambio, la geometría dinámica nos permite hacer una construcción que puede ajustarse mediante el desplazamiento del punto P hasta obtener visualmente la condición de concurrencia, como se muestra en la figura 1. Es decir, construimos el triángulo ABC (de trazo continuo en la figura), el punto P y los triángulos simétrico-lateral (punteado grueso) y antipedal de P (en punteado delgado) y trazamos las rectas que unen los vértices correspondientes de los dos últimos triángulos. Luego arrastramos P hasta una o varias posiciones en las que dichas rectas son concurrentes.

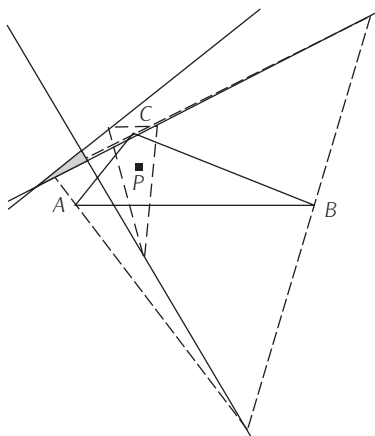
Se plantean entonces dos dificultades: primero, cómo asegurar que nuestra percepción visual de la concurrencia es lo suficientemente precisa y, segundo, en el caso de tener una precisión aceptable, cómo guardar una memoria de las posiciones de P .

Para resolver la primera dificultad, podemos pedir a Cabri que dibuje los puntos de intersección de las tres rectas que unen los vértices correspondientes de

Figura 1

los triángulos simétrico-lateral y antipedal. Estos puntos dan una mejor idea de la concurrencia de las rectas, pero aún no nos permiten determinar el grado de precisión de nuestro dibujo. En cambio, si tomamos el triángulo formado por esos puntos de intersección (que llamaremos en adelante “triángulo de concurrencia”), podemos considerar el perímetro de dicho triángulo como una medida de la exactitud de la construcción, pues cuando el perímetro sea 0, necesariamente las rectas serán concurrentes. Así que utilizaremos el dibujo dinámico para generar datos del perímetro del triángulo de concurrencia, interesándonos en las posiciones de P que arrojan un perímetro cercano a 0.⁵

Figura 2. Triángulo de concurrencia lleno



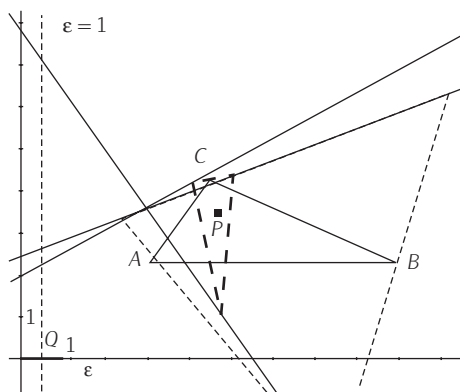
Ahora enfrentamos la segunda dificultad: conservar una memoria de las posiciones de P que dan una solución aceptable. Cabri nos ofrece dos herramientas para visualizar la trayectoria de un punto: el *lugar geométrico* y la *traza*. El *lugar geométrico* describe la trayectoria de un punto dependiendo del desplazamiento de un segundo punto sobre un objeto determinado; en este caso, como P no depende de ningún punto ni se mueve sobre un objeto determinado, el *lugar geométrico* no puede utilizarse. La *traza* hace que un punto determinado vaya dejando huellas en las posiciones que ocupa durante su desplazamiento, por lo que podríamos utilizarla en nuestro caso, pero tiene el inconveniente de que P dejará huella independientemente de si su posición produce un valor

⁵ La obtención del valor 0 únicamente mediante el arrastre es prácticamente imposible, ya que los puntos representados en la pantalla no son todos los puntos del plano, sino sólo una muestra discreta de ellos, porque la pantalla tiene un número limitado de píxeles.

aceptable de la concurrencia o no. Así que la nueva dificultad consiste en lograr que P deje una traza únicamente cuando el valor del perímetro del triángulo de concurrencia sea cercano a 0.

Para resolver esta dificultad, podemos crear un punto condicional, es decir, un punto que existe si y sólo si el perímetro del triángulo de concurrencia es cercano a 0. En Cabri, los puntos de intersección aparecen o desaparecen dependiendo de la condición de que los objetos se corten o no y permiten crear así puntos condicionales. Creamos primero una expresión numérica que represente el grado de precisión aceptable de la cercanía a 0 (objeto modificable a voluntad) que llamaremos ϵ . Luego mostramos los ejes de coordenadas y transferimos esa medida sobre el eje de las abscisas, y construimos un segmento de 0 a ϵ . Asimismo, transferimos el perímetro del triángulo de concurrencia sobre el eje de las abscisas y trazamos una recta perpendicular a dicho eje por ese punto (recta punteada en la imagen). El punto de intersección de esta recta con el segmento $[0, \epsilon]$ existe si y sólo si el perímetro del triángulo de concurrencia es menor o igual a ϵ . Llamemos Q a ese punto de intersección.

Figura 3



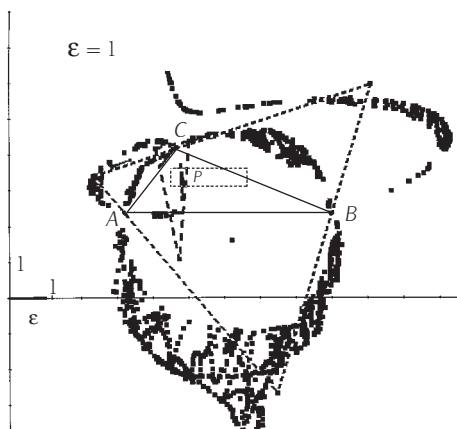
La dificultad ahora es transferir ese punto sobre P de manera que deje una huella para las posiciones de P que tengan una medida aceptable de la concurrencia. Si construimos el punto R simétrico de P con respecto a Q y luego el simétrico de R con respecto a Q , obtenemos un punto S que está en la misma posición de P y que responde a la misma condición que Q .⁶ Así que, aplicando la traza al

⁶ Este procedimiento se conoce con el nombre de macro PingPong. Véase Abracadabri <http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/>.

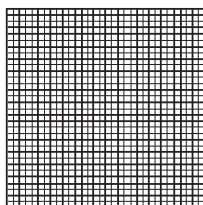
punto S , si desplazamos el punto P obtendremos una traza de su posición cada vez que el perímetro del triángulo de concurrencia es menor o igual a ϵ (y este ϵ podemos modificarlo a voluntad).

En la figura 4 puede verse la traza que ha dejado el punto P al moverlo por toda la pantalla, para $\epsilon = 1$.

Figura 4



Esta técnica de detección de puntos que cumplen aproximadamente una condición dada puede mejorarse si hacemos que P se mueva sobre un objeto bidimensional, de manera que podamos construir el lugar geométrico de S con respecto a P . Para obtener ese objeto bidimensional, se construye un polígono cruzado sobre la base de un cuadrado cuyos lados se dividen en 50 partes iguales,⁷ obteniendo una cuadrícula de la región del plano que ocupa dicho cuadrado, y P puede redefinirse como punto sobre el polígono.

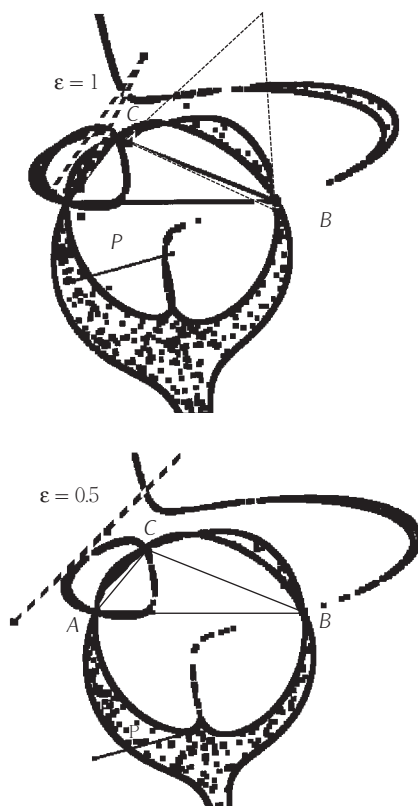


⁷ Se construye un cuadrado utilizando un segmento como lado, se divide cada lado del cuadrado en 50 partes iguales y, con la herramienta "Polígono", se seleccionan uno a uno los puntos de manera que el interior del cuadrado quede cuadrículado.

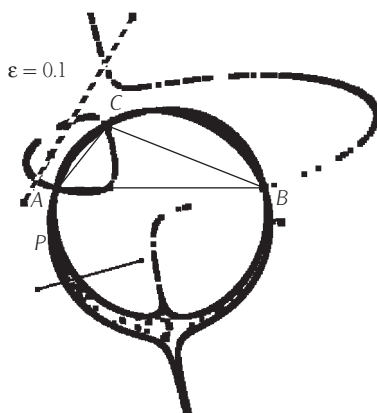
Una vez redefinido, puede ocultarse el polígono y de todas maneras podemos arrastrarlo a partir del segmento que sirvió de base a la construcción del cuadrado. Al solicitar a Cabri el lugar geométrico de S con respecto a P, se obtiene una región del polígono y podemos activar la traza de ese lugar geométrico de manera que, cuando arrastramos el segmento de base por la pantalla, obtenemos una imagen del lugar geométrico solución.⁸

PRIMERA CONJETURA: EL CIRCUNCÍRCULO

Figura 5

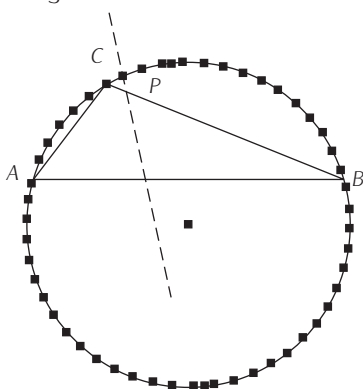


⁸ Para una mejor representación, es necesario deseleccionar la opción “Unir puntos” del lugar geométrico, para obtener únicamente los puntos calculados y no los segmentos que los unen. De esta manera obtenemos en la pantalla dos curvas límite que encierran una nube de puntos.



En esta serie de imágenes, donde se hizo una reducción gradual de ϵ , puede identificarse el circuncírculo como parte del lugar geométrico solución. Esta conjetura puede verificarse fácilmente construyendo el circuncírculo y redefiniendo P como punto sobre él.

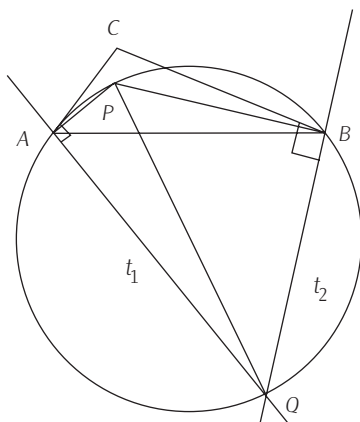
Figura 6. Perímetro del triángulo de concurrencia = 0.00 cm



De esta manera podemos constatar que el triángulo antipedal de un punto del circuncírculo se reduce al punto antípoda (diametralmente opuesto) y, por lo tanto, es perspectivo con el triángulo simétrico-lateral. Esta observación nos da la clave para construir una demostración, pues basta con mostrar que el triángulo antipedal de todo punto del circuncírculo se reduce al punto antípoda.

Demostración

Por definición, los lados del triángulo antipedal de P con respecto al triángulo ABC deben ser perpendiculares a las cevianas AP , BP y CP . Sea t_1 la perpendicular a PA por A y t_2 la perpendicular a PB por B , y Q el punto de corte de t_1 y t_2 ; como el triángulo PAQ es rectángulo en A , está inscrito en el círculo de diámetro PQ , al igual que el triángulo PBQ ; por lo tanto, el punto Q es el antípoda de P en el círculo APB .



Ahora bien, si P está en el circuncírculo, los circuncírculos de los triángulos APB , BPC y APC son iguales y, por lo tanto, los tres antípodas coinciden.

Como el triángulo antipedal se reduce a un punto, necesariamente las rectas que lo unen a los vértices del simétrico-lateral son concurrentes.

SEGUNDA CONJETURA: UNA CÚBICA CIRCUNSCRITA

La forma de la otra parte del lugar geométrico solución aparentemente es una cúbica circunscrita al triángulo de referencia.⁹ Para verificar esta conjetura necesitamos construir la cúbica como lugar geométrico y redefinir P como punto sobre ella. Si al hacer esta redefinición obtenemos un triángulo de concurrencia de perímetro 0, habremos verificado experimentalmente la conjetura. Si por el con-

⁹ Para poder emitir esta conjetura, es necesario estar familiarizado con las distintas formas de las cúbicas. El lector puede convenir que podríamos aproximar esa forma trazando una recta y una elipse, con lo cual se muestra la plausibilidad de la conjetura.

trario obtenemos un triángulo de concurrencia de perímetro diferente de 0, tendremos un contraejemplo que demostrará la falsedad de la conjetura. Para construir una cúbica cualquiera se necesitan nueve puntos de ésta.¹⁰

***Problema de la construcción del lugar geométrico:
técnica de los puntos nodales***

Nuestro problema en este momento es encontrar nueve puntos que pertenezcan a la cúbica de la conjetura, a fin de utilizarlos para construirla. Una variación de la técnica de detección de puntos se mostrará eficaz en este caso. Se trata de considerar las curvas de nivel definidas por distintos ϵ de aproximación. Concretamente, consideremos tres intervalos disjuntos para ϵ : (0.1), (3.4) y (6.7). Cada uno de esos intervalos en el eje x produce un punto de intersección con la recta perpendicular por el punto que representa el perímetro del triángulo de concurrencia, y cada uno de esos puntos de intersección produce puntos condicionales sobre P con sus respectivos lugares geométricos (de distintos grosores en la figura 8).

Figura 8.

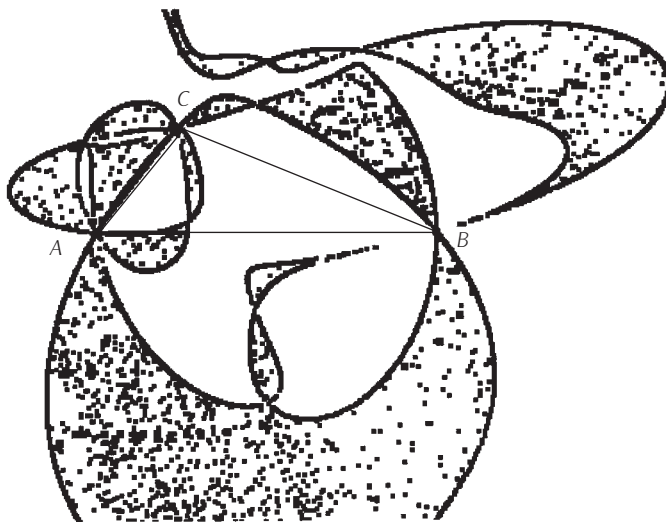


¹⁰ R. Cuppens, *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri géomètre II*, tomo 2, Brochure APMEP núm. 125.

Algo que sorprende al observar la figura 8 es constatar que existen puntos comunes a las zonas de solución, lo cual debería ser imposible, puesto que los intervalos son disjuntos. Surge la pregunta de cómo es posible que una posición de P produzca un triángulo de concurrencia cuyo perímetro esté *a la vez* entre 0 y 1, entre 3 y 4, entre 6 y 7. Acercando P a cada uno de los puntos nodales de estas curvas de nivel, podemos observar que aparentemente en esas posiciones de P , los triángulos simétrico-lateral y antipedal tienen un vértice común, con lo cual desaparece una de las rectas que definen el triángulo de concurrencia. En realidad esos puntos nodales son puntos de discontinuidad de las curvas, puesto que el perímetro del triángulo de concurrencia es indefinido cuando P ocupa la posición de cualquiera de esos puntos. Sin embargo, todas las curvas de nivel pasan por esos puntos de discontinuidad y, por lo tanto, también la cúbica solución, para la cual también $\varepsilon = 0$, con lo cual podríamos utilizar esos puntos para construir la cúbica.

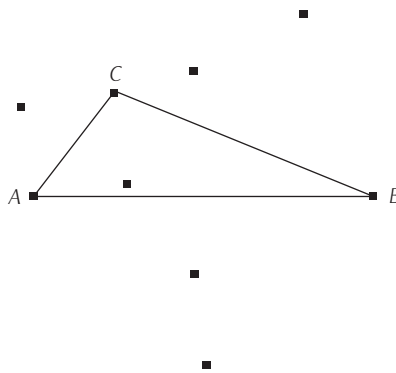
Nuestro problema ahora es determinar de manera exacta los puntos nodales de esas curvas de nivel. Para lo cual vamos a tomar ε en el intervalo $(-5; 5)$.

Figura 9



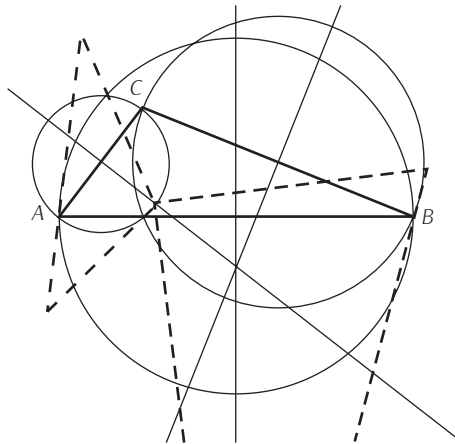
Para estudiar la posición de los puntos nodales, colocamos puntos aproximadamente en los cortes de la curva y luego eliminamos la traza y los triángulos auxiliares.

Figura 10



Con ayuda de esta imagen podemos hacer varias conjeturas: primero, los puntos nodales parecen ser simétricos con respecto a los lados del triángulo de referencia. Además, parecen estar sobre la mediatriz de cada lado. Por último, parecen estar sobre el círculo con diámetro el lado del triángulo. Con estas tres conjeturas es posible hacer la construcción para verificarlas. Así que trazamos las mediatrices de ABC y los círculos diámetro de cada lado, construimos los puntos de intersección de cada mediatriz con su círculo correspondiente y luego redefinimos P sobre cada uno de los seis puntos obtenidos.

Figura 11



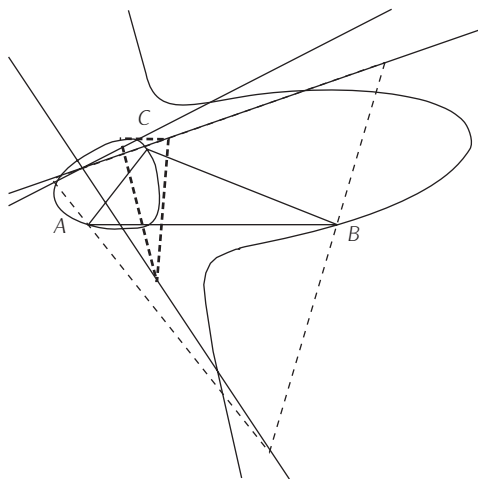
Observamos que, efectivamente, en cada uno de esos puntos el perímetro del triángulo de concurrencia es inexistente, pues dos vértices correspondientes de los triángulos simétrico-lateral y antipedal de P están confundidos.

Demostración

Sea P uno de los puntos de intersección de la mediatriz de AB con el círculo de diámetro AB . Uno de los vértices del simétrico-lateral de P es el simétrico de P con respecto a AB . Ahora bien, como lo vimos anteriormente, el vértice del antipedal correspondiente a AB es el antípoda de P con respecto al círculo APB , que es exactamente el simétrico de P con respecto a AB .

Así que ya tenemos 9 puntos por los cuales pasa la cúbica circunscrita solución del problema: los tres vértices y los 6 otros puntos nodales. Sólo nos queda trazar la cúbica por esos 9 puntos y redefinir P sobre ella:

Figura 12. Perímetro del triángulo de concurrencia = 0.00 cm



De esta manera, podemos verificar que los puntos P de esta cúbica producen triángulos simétrico-lateral y antipedal perspectivas. La demostración sintética de este resultado es particularmente compleja y requiere la revisión de toda la teoría sobre las cúbicas. Sin embargo, existe una demostración analítica, utilizando las coordenadas baricéntricas, en el sitio de Internet “Cubics in the triangle plane” de Bernard Gibert.¹¹ Allí también está clasificada esta cúbica con el nombre de ortocúbica.

¹¹ <http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/index.html>. Página consultada en abril de 2005.

TÉCNICAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA EXPERIMENTAL (DETECCIÓN DE PUNTOS, PUNTOS NODALES, VERIFICACIÓN POR RECONSTRUCCIÓN)

La primera técnica descrita es la de detección de puntos que cumplen una cierta condición. Esta técnica responde a la tarea de construir un cierto número de puntos que permitan describir la forma del lugar geométrico buscado, que a su vez puede considerarse como una subtarea de la técnica general del análisis: considerar el problema resuelto y encontrar propiedades que se deducen de él y permiten hacer su construcción.

Esta técnica de detección de puntos puede considerarse como un perfeccionamiento de la técnica general del ajuste por desplazamiento, que es característica de la geometría dinámica. A diferencia de los dibujos estáticos (en papel), los dibujos dinámicos (en la pantalla de la computadora) pueden modificarse de manera continua mediante el arrastre de los objetos que los componen, y mantienen las propiedades que les fueron asignadas por construcción. En el ejemplo mostramos cómo era posible desplazar el punto P hasta obtener visualmente la concurrencia de las rectas. Este desplazamiento continuo sirve de base a un tipo de razonamiento matemático que no es de uso corriente en geometría, donde estamos acostumbrados a la dicotomía verdadero/falso. Por el contrario, el cálculo, que se preocupa por la continuidad y discontinuidad de las funciones, ha desarrollado las herramientas teóricas que permiten tratar ese tipo de razonamiento: “en la vecindad de un cierto punto, los valores de la función tienden a...”. En nuestro caso podríamos decir que, ante la imposibilidad de obtener la concurrencia de manera exacta, podemos considerar el hecho de que en la vecindad de ciertos puntos la concurrencia tiende a cumplirse. La técnica de detección de puntos permite controlar el grado de precisión de la concurrencia, que ya no se considera como una condición verdadera o falsa, sino como una condición límite. Esta característica, unida al hecho de que el software calcula la posición de muchos puntos que cumplen ese grado de precisión, hace de la técnica de detección de puntos una herramienta poderosa para determinar la forma de los lugares geométricos buscados.

La segunda técnica descrita es la de los puntos nodales o puntos de discontinuidad de la condición límite. Esta técnica es una derivación y un complemento de la técnica de detección de puntos. En efecto, una vez cuantificada la condición de concurrencia, de manera que la podemos considerar como una condición límite a la que nos acercamos de manera continua, la existencia de puntos nodales revela la discontinuidad de esa condición. Al tomar distintos grados de

aproximación de la concurrencia, cada uno de ellos da lugar a una curva solución; si consideramos la familia de estas curvas, los puntos nodales son los puntos comunes a todas esas curvas y, por lo tanto, también pertenecen a la curva de $\epsilon = 0$. La técnica de los puntos nodales utiliza la imagen en la pantalla de dos de esas curvas para determinar de manera exacta dichos puntos, los que, a su vez, se utilizan para la construcción del lugar geométrico buscado.

Sobre la validación experimental: la técnica de validación por reconstrucción

El carácter experimental de este trabajo se reconoce en el recurso a la experiencia para producir y validar conjeturas, recurso que generalmente se considera inconveniente si no ilegítimo en geometría. En efecto, el gran esfuerzo de axiomatización que caracteriza a la historia de la geometría es una manera de liberarse de las contingencias de la percepción, la cual puede revelarse dudosa e inducir a error. La geometría dinámica permite retomar la percepción en el trabajo de investigación, asegurando un control teórico de ésta mediante el arrastre. En este sentido, la geometría experimental se diferencia claramente de la geometría formal (axiomático-deductiva) sin estar en oposición con ella.

La posibilidad de deformar de manera continua una figura que mantiene durante el desplazamiento las propiedades que se le impusieron por construcción hace de la geometría dinámica un laboratorio de producción de contraejemplos para toda conjetura que enuncia una implicación simple entre dos propiedades. Supongamos que se tiene una figura con dos propiedades $P1$ y $P2$, de las cuales conjeturamos la implicación “ $P1$ entonces $P2$ ”. Si logramos mostrar un caso de figura en el que esté presente $P1$ y no se cumpla $P2$, constituye un contraejemplo que demuestra (formalmente) la falsedad de la implicación ($P1 \wedge \neg P2 \Rightarrow \neg (P1 \Rightarrow P2)$). Así que, si construimos una figura a la que imponemos (por construcción) la propiedad $P1$ y al deformarla por el arrastre obtenemos un caso en el que la propiedad $P2$ no se cumple, esa invalidación experimental es equivalente a una demostración formal.

Ahora bien, ¿qué sucede si no logramos invalidar una conjetura por el arrastre? ¿La acumulación de casos positivos de la implicación constituye una demostración de su validez? Naturalmente, la respuesta es no. Sin embargo, podemos decir que el fracaso de una invalidación experimental es una validación provisional de la conjetura hasta que se encuentre un contraejemplo o hasta que se

construya una demostración formal.¹² En ausencia de una demostración formal, la no invalidación constituye una validación experimental que no excluye la posibilidad de que se encuentren contraejemplos.

La técnica de validación experimental puede resumirse así: si se tiene la conjetura de que $P1$ implica $P2$, se construye $P1$ y se aplica el arrastre para buscar posibles casos donde no se cumpla $P2$; si no se encuentran contraejemplos, se considera validada la conjetura provisionalmente hasta que se encuentre un contraejemplo o hasta que se construya una demostración formal.

La exploración de una figura dinámica en la que $P1$ y $P2$ son invariantes puede, además, conducir a descubrir otras propiedades de la figura que pueden constituir eslabones lógicos de la demostración de $P1$ entonces $P2$. Así fue como, en el ejemplo, la construcción de P sobre el circuncírculo no sólo constituyó una validación experimental de la conjetura según la cual el circuncírculo forma parte del lugar geométrico buscado, sino que mostró que todo punto del circuncírculo tiene un triángulo antipedal reducido a su punto antípoda, propiedad que sirvió para la demostración de la conjetura.

CONCLUSIÓN

La geometría dinámica utiliza el principio de continuidad que sirvió de base a los desarrollos de la geometría proyectiva, pero que no ha sido objeto de un tratamiento formal en geometría. La formalización del concepto de continuidad fue resultado del estudio de las funciones, campo considerado hoy como distinto a la geometría: el cálculo. Esta operacionalización de la continuidad en geometría constituye un campo de problemas nuevo en las matemáticas, y las implicaciones de su utilización aún no se conocen. Hasta ahora, la comunidad matemática no ha mostrado interés en esta nueva problemática y se ha limitado a criticar toda práctica experimental como ilegítima y no rigurosa. Por su parte, la comunidad de profesores de matemáticas acepta el valor didáctico de la geometría dinámica, pero no tiene las herramientas teóricas suficientes para sustentar el trabajo matemático con estos nuevos objetos ostensivos. La didáctica de las matemáticas, que postula la dialéctica entre lo didáctico y lo matemático, requiere profundizar la investigación sobre las implicaciones de esa operacionalización de la continuidad en geometría, tanto en la actividad matemática, como en su enseñanza.

¹² Esta afirmación se basa en la teoría de la falsación de Karl Popper.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Borwein, J. *et al.*, "Experimental Mathematics: A Discussion", <http://www.cec.m.sfu.ca/organics/vault/expmath/expmath/html/expmath.html>, página web consultada en abril de 2005.
- Bosch, M. y Y. Chevallard (1999), "La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 1, pp. 77-124.
- Chevallard, Y. (1998), "Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique", en R. Noirfalise (ed.), *Actes de l'université d'été de La Rochelle*, Clermont-Ferrand, IREM, pp. 89-120.
- Cuppens, R., *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri géomètre II*, tomo 2, Brochure APMEP, núm. 125.
- Laborde, C. (1995), "Designing Tasks for Learning Geometry in a Computer Based Environment", en L. Burton y B. Jaworski (eds.), *Technology in Mathematics Teaching -A Bridge Between Teaching and Learning*, Londres, Chartwell-Bratt, pp. 35-68.
- Laborde, C. y B. Capponi (1994), "Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, núm. 12, pp. 165-210.
- Ruthven, K. *et al.* (2004), "Incorporating Geometry Systems into Secondary Mathematics Education: Didactical Perspectives and Practices of Teachers", Ponencia presentada en la conferencia anual de la British Educational Research Association, Manchester, septiembre.

DATOS DEL AUTOR

Martín Eduardo Acosta Gempeler
Universidad Joseph Fourier, Francia
martin.acosta@imag.fr