Un micromundo para el estudio de paralelismo con triángulos y cuadriláteros en la escuela secundaria

Víctor Larios Osorio

Resumen: Este trabajo tiene un doble propósito: por un lado, presenta un micromundo pensado para estudiar, en el nivel secundaria, propiedades de paralelismo y el desarrollo de justificaciones deductivas en el contexto de la geometría del triángulo y del cuadrilátero; por otro lado, presenta algunas observaciones realizadas durante su implementación en un grupo, así como algunas reflexiones al respecto y sobre el uso de la tecnología computacional en la educación matemática.

Palabras clave: enseñanza de la geometría, micromundos, educación matemática y nuevas tecnologías, geometría ginámica, geometría en la escuela secundaria.

Abstract: This work has two purposes: it shows a microworld designed to study parallelism properties and the development of deductive justifications on triangle and quadrilateral geometry at secondary school. On the other hand, it shows some observations carried out during microworld implementation in a class, as well as some reflections about it and about the use of computational technology in mathematics education.

Keywords: geometry teaching, microworlds, mathematics education and new technologies, dynamic geometry, secondary school geometry.

INTRODUCCIÓN

El uso de software para geometría dinámica en el ambiente escolar es cada vez más amplio y ha ayudado a abordar algunos problemas de aprendizaje, pero también ha generado otros, como son los relacionados con la dinamicidad del software. El estudio de sus implicaciones y la propuesta de formas para su uso en la

Fecha de recepción: 8 de enero de 2005.

educación matemática es un tema necesario para que la integración de esta tecnología en el aula sea lo más eficiente posible.

Con esta intención, se planteó un proyecto de investigación para observar el desempeño de estudiantes de secundaria que utilizan software para geometría dinámica dentro de un micromundo con actividades pensadas para el estudio del paralelismo y el desarrollo de justificaciones deductivas. El software considerado fue Cabri-Géomètre y las actividades quedaron enmarcadas en construcciones relacionadas con triángulos y cuadriláteros.

De esta manera, en este trabajo se presentan algunas reflexiones sobre las implicaciones del uso de la tecnología computacional en el aprendizaje de la geometría, pero también se muestra una propuesta de cómo un profesor, considerando las observaciones que se registran sobre una implementación realizada, puede llevar a cabo actividades que ayuden a estudiantes del nivel medio a estudiar el paralelismo, los triángulos y los cuadriláteros, así como a desarrollar habilidades de observación de propiedades, argumentación, justificación y razonamiento (en particular, deductivo).

CONSIDERACIONES PARA EL MICROMUNDO PROPUESTO

MICROMUNDOS

La idea de micromundo se generó en el ambiente de la inteligencia artificial (IA) y Seymourt Papert fue uno de los primeros que lo planteó como "un ambiente de aprendizaje interactivo sobre la base de computadoras, donde los prerrequisitos están incorporados al sistema y donde los estudiantes pueden convertirse en arquitectos activos, constructores de su propio aprendizaje" (Papert, 1982, p. 144). La concepción de micromundo ha ido evolucionando[1] conforme ha pasado el tiempo. Originalmente, esta noción estuvo ligada a la programación, principalmente con Logo, pero con la aparición de otros programas, que cubren una amplia gama de posibilidades tanto en la capacidad de interacción con el usuario como con respecto a su intencionalidad (si están concebidos para usarse en la matemática o en la educación matemática, como los menciona Dreyfus, 1994, pp. 206-207), los ambientes posibles se han ido modificando y enriqueciendo.

En general, los micromundos son "dominios en los cuales los niños (y los

[1] Se pueden consultar, por ejemplo, Noss y Hoyles (1996) y Edwards (1998), donde se hacen relatorías al respecto.

adultos) pueden explorar y aprender simultáneamente [...] Ambientes donde la gente puede explorar y aprender de lo que recibe de la computadora como respuesta de su exploración" (Hoyles y Noss, 2003, pp. 112-113). Así pues, las computadoras se convierten en herramientas útiles al aprovecharse sus potencialidades de retroalimentación casi inmediata, de sus representaciones gráficas y de manipulación directa que tiene el software para geometría dinámica.

Un micromundo tiene objetos y herramientas internas que permiten al usuario realizar operaciones sobre los objetos en su interior, restringidas también por reglas internas. Además, estos ambientes, hay que decirlo, no están compuestos por un aparato, unas actividades, el ambiente, el alumno o el profesor, cada uno de éstos por separado, sino que se forma de la interacción de estos elementos dentro de un campo de conocimiento. Se considera que un micromundo tiene cuatro componentes (Hoyles y Noss, 1987) que interactúan entre sí:

- *El componente técnico* corresponde al soporte utilizado, es decir, y para el caso de los ambientes computacionales, el software que se considera en los ambientes.
- *El componente pedagógico* incluye la planeación y las actividades que realiza el profesor y tiene como función "estructurar la investigación y la exploración de conceptos encarnados en el componente técnico [...] enfocar la reflexión sobre aspectos particulares, sugerir métodos productivos de operaciones, indicar puntos de inicio útiles y generar vínculos con otras actividades" (p. 588).
- *El componente contextual* se refiere al ambiente social donde se lleva a cabo el micromundo.
- *El componente del alumno* corresponde, básicamente, al sujeto que aprende, tanto desde el punto de vista cognitivo como desde el afectivo.

Es importante considerar cada uno de estos componentes y las interacciones entre sí, pues cada uno influye en la manera como el individuo se apropia del conocimiento y le otorga significados.[2]

Así pues, con esto en mente, se presentan a continuación algunas consideraciones sobre el micromundo que se propuso. Se ha hecho énfasis en los dos primeros componentes, ya que los últimos dos siempre quedan supeditados a las condiciones existentes en el momento de la implementación.

[2] Sutherland y Balacheff (1999) ponen como ejemplo las diferencias entre los significados que se pueden otorgar al aprender geometría utilizando Logo y Cabri-Géomètre.

El Cabri-Géomètre como componente técnico

Cabri-Géomètre es uno de los programas disponibles para abordar la geometría dinámica y ofrece la oportunidad de trabajar con construcciones geométricas bajo un "espíritu" euclidiano que tiene una correspondencia con la geometría euclidiana (Mariotti, 2000, p. 28). Las principales características que distinguen a una aproximación a la geometría utilizando este software, en comparación con la tecnología de papel y lápiz o incluso con software de programación como Logo, son, según Straesser (2001): la posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macros, la de construir lugares geométricos y, más que nada, "la transformación continua en tiempo real comúnmente llamada 'arrastre'" (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351).

Esta operación de arrastre tiene consecuencias importantes en la apreciación de la geometría, pues el software se constituye en un mediador entre el conocimiento geométrico y el usuario. Sin embargo, es importante recalcar que las funciones y el uso que se le dé al arrastre pueden ser diversos y no necesariamente coinciden en todos los individuos (profesor, por un lado, y alumno, por el otro) para una misma situación.

Por ejemplo, Olivero (2003b), tras una investigación realizada desde un punto de vista cognitivo, identifica las siguientes modalidades de arrastre en alumnos a los que se les pide que resuelvan un problema geométrico:

- *Arrastre errante*: el mover los puntos básicos en la pantalla de manera aleatoria, sin un plan, a fin de descubrir configuraciones o regularidades interesantes.
- *Arrastre de borde*: el mover un punto semiarrastrable[3] que ya está ligado a un objeto.
- *Arrastre guiado*: el arrastre de puntos básicos de una figura, a fin de darle una forma particular.
- *Arrastre de* lieu muet:[4] el mover un punto básico de tal manera que la figura mantenga una propiedad descubierta; esto significa que está siguiente una trayectoria oculta (*lieu muet*), incluso sin ser consciente de esto.

[3] "Un punto semiarrastrable es un punto en un objeto que puede ser movido, pero sólo sobre el objeto al que pertenece."

[4] *Lieu muet* significa literalmente "lugar mudo", término que utiliza la autora (y otros autores), porque se refiere a una trayectoria que no "dice" explícitamente cuál es su forma, pues se desconoce.

- *Arrastre en línea*: el dibujar nuevos puntos en los que se mantiene la regularidad de la figura.
- *Arrastre ligado*: el ligar un punto a un objeto y moverlo en tal objeto.
- *Examen de arrastre*: el mover puntos arrastrables o semiarrastrables, a fin de ver si la figura mantiene las propiedades iniciales (p. 66).

Asimismo, Olivero considera que estas modalidades tienen cierta jerarquía que le permite al individuo ir obteniendo cada vez más control sobre la operación de arrastre y los resultados que se obtienen.

Precisamente, en cuanto a la posibilidad de validación se tiene la última modalidad, la de *examen de arrastre,* pues es en ésta donde el arrastre explota la capacidad del software para mantener las relaciones geométricas entre los elementos de una construcción y así es posible verificar si está construida correctamente (Mariotti, 2000).

Además, la capacidad de manipulación directa de las construcciones puede permitirle al alumno comenzar a diferenciar entre lo que se denomina *dibujo*, que corresponde a las representaciones gráficas que se tienen de un objeto geométrico, y *figura,* que se refiere al significado que se le asigna a un objeto geométrico a través de sus dibujos o representaciones gráficas (Laborde y Capponi, 1994;[5] Hölzl, 1995; Goldenberg y Cuoco, 1998), lo cual está relacionado con la capacidad del individuo de "ver" más allá de la representación gráfica que tiene enfrente y llegar a un grado de abstracción mayor (Hoyles y Jones, 1998, p. 124). Sin embargo, no sólo es necesario que el usuario se percate de esa diferencia para poder explotar efectivamente el carácter dinámico del software, sino que también debe considerar las dependencias que se establecen entre los diversos objetos geométricos que intervienen en una cierta construcción (Hölzl, 1995). Por desgracia, tal aprehensión del carácter dinámico de las construcciones en un ambiente Cabri parece no ser automática, sino que requiere un esfuerzo y un desarrollo cognitivo (Larios, 2003; Olivero, 2003a). Por esta razón, una posible consideración es hacer que los alumnos trabajen en parejas, a fin de que la interacción entre dos pueda ser un medio para superar obstáculos, provocar reflexión y articular pensamientos (Ursini, 1993, p. 68).

Así que, como ya se ha visto en los párrafos precedentes, Cabri-Géomètre se puede convertir en un ambiente que propicia la exploración de la geometría por

[5] Laborde y Capponi introducen un tercer nivel: el de objeto geométrico, que es el referente teórico de todos los dibujos, el cual está restringido o "controlado" por las definiciones y las limitantes lógicas.

parte del usuario, pero también puede provocar situaciones que modifican la percepción clásica (la de dibujos estáticos) de la geometría escolar e introducir nuevas cuestiones que, a su vez, generan nuevos problemas para ser considerados en la labor docente y en la investigación de didáctica de las matemáticas.

Cabri-Géomètre, además, tiene la capacidad técnica de modificar sus menús, a fin de cumplir con los objetivos de las actividades que se puedan plantear. En el caso del micromundo propuesto, es importante considerar esta característica, pues resulta conveniente eliminar las opciones del menú "Verificar".[6] Esto es con el propósito de que los alumnos sean capaces de verificar propiedades por otros medios que no sean estas opciones y proporcionen justificaciones que se basen en propiedades geométricas. También conviene eliminar las opciones del menú "Transformaciones",[7] a fin de que los alumnos no utilicen estas operaciones que no tienen relación directa con las actividades propuestas. Esta capacidad del software puede aprovecharse también para incluir una opción en el menú "Construcciones de objetos lineales", a fin de poder construir directamente cuadriláteros, aunque no es absolutamente necesario, pues sólo simplificaría la opción para construir polígonos irregulares.

Consideraciones teóricas para el componente pedagógico

Otras de las partes importantes por considerar es el respaldo teórico que se tuvo en cuenta para el diseño de las actividades del micromundo. En otras palabras, son consideraciones que sirven para darle un sentido al uso de la tecnología computacional.

Tres aspectos se han considerado: en primer lugar, el significado de la demostración matemática, ya que este micromundo busca que los alumnos propongan justificaciones para sus construcciones y sus observaciones que se basen en argumentos tendientes a la deducción; en segundo, la denominada *Unidad Cognitiva de Teoremas* (Boero *et al.*, 1996), y, en tercero, la existencia de aspectos figurales y conceptuales en el caso de los objetos geométricos (Fischbein, 1993).

La demostración matemática es un constructo cuyo uso y significado cambia

[6] Las opciones de este menú corresponden a la verificación, por parte del programa, de si varios puntos son colineales, si objetos lineales son paralelos o perpendiculares, o si algunos objetos son equidistantes.

[7] Las opciones de este menú incluyen las simetrías, las rotaciones y las traslaciones.

según la comunidad o la institución[8] que la esté considerando. En este trabajo, el interés se centra básicamente en dos instituciones: la de los *matemáticos* y la de los *enseñantes de la matemática*. Es obvio que nos interese el significado de la demostración en la institución de los enseñantes de la matemática, ya que este trabajo pertenece al campo de la educación matemática, pero el que se le otorga en la institución de los matemáticos es importante, puesto que determina parcialmente el significado otorgado en la educación como consecuencia del proceso denominado *transposición didáctica* (Chevallard, 2000).

Considerando esto, sabemos que la demostración en la matemática es una parte epistemológicamente central de esta ciencia, pues es el medio que proporciona la certeza al conocimiento que desarrolla. No es en sí el método de investigación, sino el de validación y, puesto que los objetos en la matemática tienen la característica de ser abstractos, entonces este método para validar tiene que considerar tal naturaleza ajena a juicios empíricos (Hanna, 1996). Básicamente, también por esta razón la demostración es de carácter deductivo y, desde un punto de vista lógico, se puede definir como "...una serie finita de fórmulas, cada una de las cuales o es un axioma o puede derivarse de otras fórmulas anteriores de la serie mediante las reglas de transformación"[9] (Nagel y Newmann, 1979, p. 64).

Sin embargo, aunque se pudiera pensar que la única función de la demostración en la matemática es la de validar, ocurre que no siempre es así, pues como Thurston (1994, p. 162) comenta, también busca ayudar a la comprensión de la matemática. Así pues, la demostración para un matemático profesional es deductiva y puede ser formal, pero como producto social generado en el seno de una comunidad es "un argumento que convence a jueces calificados" (Hersh, 1993, p. 391), pudiendo también adoptar un carácter social, convencional e, incluso, temporal (Godino y Recio, 1997).[10]

[8] Aquí el término *institución* es en el sentido de Godino y Batanero (1994), entendiéndola como una comunidad dedicada a resolver problemas en común.

[9] Con los términos *fórmulas* y *reglas de transformación* los autores se refieren, respectivamente, a las expresiones formuladas correctamente y a las reglas de transformación que convierten una fórmula en otra de manera válida, todo dentro del sistema axiomático considerado.

[10] Al respecto, se pueden recordar, por ejemplo, las diversas crisis de fundamentos por las que ha pasado la matemática a lo largo de su historia, las cuales han obligado a los miembros de la comunidad matemática a considerar el replanteamiento de algunas concepciones y teorías matemáticas, como fue el caso de la geometría a inicios del siglo XX. Como otro ejemplo, también existe el tema de la aceptación de las demostraciones que utilizan computadoras, tal como ya ocurrió en la década de 1970 con la "demostración" del *teorema de los cuatro colores,* de la cual algunos están recelosos, porque sus autores recurrieron a la verificación con computadoras en una parte del proceso.

Estas consideraciones se hacen importantes al transitar hacia la institución de los educadores matemáticos, pues se nota que la demostración es un producto de la comunidad y no cumple una y sólo una función. Además, y teniendo en cuenta ya únicamente el ámbito escolar, la demostración no sólo se puede concebir como un objeto de estudio (un contenido por aprenderse), sino también como un medio y una herramienta para aprender. Esto quiere decir que, en este ámbito, la demostración puede tener una variedad de funciones (De Villiers, 1993; Olivero, 2003b): como *verificación* de la verdad de una afirmación, como *convicción* de un hecho, como *explicación* de un enunciado matemático, como *medio de comunicación* entre los individuos (sean alumnos, profesores o matemáticos), como *sistematización* de varios resultados o conocimientos, como *descubrimiento* y como *reto intelectual*.

De esta manera, una demostración no cumple una y sólo una función, sino que, dependiendo del contexto, del momento, del uso que se le dé e incluso de la persona que la esté utilizando (construyendo o leyendo), una demostración específica podrá tener una u otra función.

Ahora bien, ante estas funciones diversas en la matemática escolar, la definición de demostración que proporcionan Nagel y Newmann (1979) no puede ser considerada tal cual (si fuese así, simple y sencillamente no se podría hablar de demostración en la escuela), así que es necesario considerar algún punto de partida acorde con este cambio en la comunidad de referencia y que incluso refleje el fenómeno de la transposición didáctica.

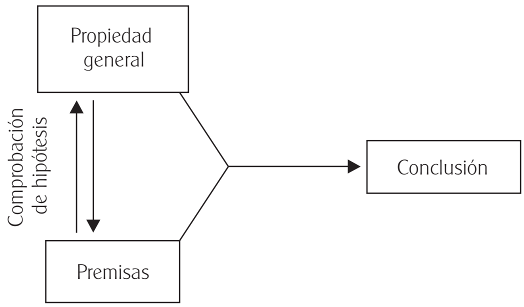
Balacheff (1987) ha abordado este asunto haciendo una diferencia entre los términos "prueba" y "demostración". Con el primero se refiere "a una explicación[11] aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser objeto de un debate cuya significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores" (p. 148). Con el segundo término se refiere a las pruebas que se realizan en el seno de la comunidad matemática. Sin embargo, al parecer es más importante establecer la diferencia entre ambas instituciones (en el sentido de Godino), que entre las dos palabras. Lo importante es, entonces, que la demostración se sitúa como una *explicación* con un cierto carácter social y con ciertas funciones (dependiendo de la institución). Así que, en la institución escolar, proponemos que el significado de la demostración está ligado a las prácticas argumentativas en las cuales se busca explicar un hecho matemático y convencer a uno mismo y a otros individuos de que tal hecho

[11] Para Balacheff una *explicación* es "un discurso dirigido a volver inteligible el carácter de verdad, adquirido por el que habla, de una proposición o de un resultado" (p. 147).

es cierto, con la característica de que estas prácticas argumentativas estén estructuradas con base en el razonamiento deductivo.

Para precisar, al razonamiento lo concebiremos tal como lo propone Balacheff (2000, p. 13): "... la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información". En particular, el razonamiento deductivo o inferencial tiene una estructura ternaria en el que intervienen las premisas (que contienen las hipótesis), una propiedad general (que incluye al menos una implicación) y la conclusión (que incluye una nueva proposición):

Figura 1



Las hipótesis de las premisas son comprobadas en la propiedad general, entonces se lleva a cabo una "sustitución" en esta última del caso particular y se realiza la deducción, considerando la implicación que existe en la propiedad general.

Ahora bien, por otro lado, el enfrentar a los alumnos a un teorema ya planteado y pedirles una demostración los lleva a tener que reconstruir la complejidad cognitiva de un proceso en el cual se enlazan funcionalmente actos de pensamiento de diversas naturalezas que los llevan a actividades parciales que son difíciles de reunir en una sola (Boero *et al.*, 1996). De hecho, este proceso se puede apreciar al leer los comentarios de los propios matemáticos cuando realizan investigaciones matemáticas, descubrimientos y, después, demostraciones.[12]

Ante esta situación, y como producto de algunas investigaciones, se ha planteado la existencia de una unidad cognitiva denominada *unidad cognitiva de*

[12] Al respecto, se pueden consultar varias obras, como por ejemplo *El enigma de Fermat* de Simon Singh (1998, México, Planeta) donde se describe la experiencia de Andrew Wiles durante la construcción de la demostración del llamado "último teorema de Fermat".

teoremas (Boero *et al.*, 1996), que se basa en la continuidad que existe entre el proceso de producción de una conjetura y la construcción posible de su prueba. Si, por ejemplo, esta unidad se rompe, como cuando se pide una tarea a los alumnos utilizando una frase que inicie con "demuestre que...", se pierde la continuidad y sólo se recupera cuando existe una reapropiación del enunciado a través de un ciclo completo: *explorar, conjeturar, explorar, reorganizar una nueva demostración*. Estas etapas se pueden agrupar en dos fases: la primera, relativa a la producción de conjeturas y la segunda, a la construcción de la prueba.

En el ciclo, las partes de exploración son dinámicas. En la primera fase, la exploración es sobre la situación problemática, a fin de generar un espacio de posibles configuraciones y, así, trabajar después en la producción de la conjetura. Esta exploración dinámica tiene una relevancia fundamental, pues provee al individuo no sólo del enunciado que después validará (la conjetura), sino también de argumentos que pueden utilizarse posteriormente. Este razonamiento argumentativo permite a los alumnos la exploración consciente de alternativas y el acercamiento progresivo al establecimiento de enunciados, así como la justificación de la plausibilidad de las conjeturas producidas.

En la fase de construcción de la prueba, se lleva a cabo otra exploración dinámica que permite la búsqueda de argumentos para la construcción de la demostración. Estos argumentos están relacionados con los argumentos que llevaron a la construcción de la conjetura, pues estos últimos se utilizan para apoyarse en la formulación de los de la segunda fase. Más aún, los argumentos hechos durante la producción de enunciados se usan en la justificación de la propia demostración, a menudo con expresiones lingüísticas similares. Sin embargo, tienen marcadas diferencias entre sí, principalmente en la función que asumen durante el proceso de pensamiento: inicialmente son un soporte para la selección y la especificación de la conjetura y después, pueden ser un soporte para la implementación de una conexión lógica.

La relación entre la argumentación y la construcción de la demostración es compleja, a pesar de la posibilidad de aprender a construir demostraciones a partir de exploraciones y conjeturas.

La última consideración importante para este componente pedagógico del micromundo es la *teoría de los conceptos figurales* de Fischbein (1993). Esta teoría se refiere a la posibilidad de considerar los objetos geométricos como *conceptos figurales* que poseen dos componentes: el *figural* (relativo a la información física y visual de las representaciones gráficas) y el *conceptual* (relativo a la información proporcionada por las propiedades y las definiciones). Ambos aspectos se hallan ligados entre sí e, idealmente, deberían fusionarse de manera equilibrada para poder manejarse de manera adecuada. Pero también lo anterior hace necesario distinguir entre *figuras* y *dibujos*, tal como se comentó en la sección anterior.

Esta distinción se hace, porque el *dibujo* es una representación gráfica que contiene información figural, la cual, en ocasiones, puede incluir datos innecesarios que van desde aspectos completamente sin relación con el objeto geométrico en sí, pero relacionados con el aspecto gráfico (como el color, el grosor, etcétera), hasta aspectos que pueden influir en la apreciación del dibujo, como lo es la orientación. Ahora bien, como no se puede tener acceso directamente a los *objetos geométricos* (ya que son referentes teóricos), se representan por medio de los *dibujos*, a los cuales se les asignan *significados*, que son las relaciones que el individuo establece entre el objeto y su representación.

Estos significados corresponden precisamente a la noción de *concepto figural* propuesta por Fischbein (Laborde y Capponi, 1994, p. 169), ya que en ella se entrelazan los aspectos figurales que están relacionados con los dibujos atribuidos a una figura geométrica en particular, con las limitantes conceptuales que proporciona el objeto geométrico desde su naturaleza teórica.

Ambos aspectos ejercen una influencia en el individuo que está supeditada, entre otras cosas, a su desarrollo cognitivo, por lo que no se hallan necesariamente equilibrados de una manera adecuada. Si bien es necesario que exista una fusión entre ellos para que el manejo de los objetos geométricos sea apropiado, tal parece que eso ocurre sólo en una situación ideal y extrema (Maracci, 2001), ya que, de hecho, Fischbein (1993, p. 150) afirma: "Lo que sucede es que las propiedades conceptuales y figurales permanecen bajo la influencia de los sistemas respectivos, el conceptual y el figural".

Sin embargo, según Maracci (2001), parece que los alumnos buscan dicha fusión de una u otra manera (incluso de una manera no consciente) al tratar de construir dibujos que les resulten *satisfactorios*, es decir, dibujos que cumplan con las siguientes condiciones:

- Un dibujo debería representar "correctamente" la situación geométrica descrita en el problema, esto significa que la comprensión del estudiante de una situación dada y su interpretación del dibujo producido debería ser consistente.
- Un dibujo debe ser reconocido como suficientemente genérico [...]
- Un dibujo debería poseer una buena *gestalt*,[13] debería satisfacer las leyes

[13] Con el término "buena *gestalt*" Maracci se refiere a que la configuración visual del di-

> fundamentales que controlan los procesos básicos de percepción (Maracci, 2001, p. 481).

Sin embargo, como se puede observar, dicha satisfacción no necesariamente se relaciona con las limitantes lógicas o conceptuales de las figuras, pues hay muchas situaciones en las que se cumplen estas condiciones sin considerar este tipo de limitantes, como por ejemplo, al tener en cuenta la forma (negarse a usar triángulos rectángulos como ejemplos genéricos de los triángulos) o la orientación (utilizar diagramas con segmentos o lados de polígonos alineados obligatoriamente con los bordes de la hoja).

Las tensiones que se generan entre los aspectos figurales y conceptuales pueden transformarse en un obstáculo durante el aprendizaje de la geometría, sobre todo cuando hay un predominio de los aspectos figurales, tal como lo comentaremos en la sección "Algunas observaciones durante una implementación" de este escrito.

UN MICROMUNDO PARA ESTUDIAR PARALELISMO

En general, las actividades que conforman el micromundo propuesto se dividen en dos, según los objetos utilizados: las de triángulos y las de cuadriláteros. En ambos casos, se plantearon actividades en las que, en términos generales, los alumnos tienen que realizar construcciones y observar propiedades de paralelismo que, al aplicarlas, les permitirán después "recuperar" la construcción original. Para ello, se recurrió a la noción de *unidad cognitiva de teoremas* (mencionada en la sección anterior) para el diseño y estructuración de las actividades, pues se buscó un ciclo de explorar, plantear propiedades observadas o procedimientos (en el nivel de conjetura), volver a explorar y justificar las propiedades observadas o los procedimientos propuestos.

Con ello los alumnos desarrollan sus capacidades de observación y de justificación matemática, específicamente de tipo deductivo, y se utilizan, a partir de triángulos y cuadriláteros, los llamados triángulos y cuadriláteros de los puntos medios.

A continuación, se presenta una guía de actividades que puede ser adaptada a las necesidades de los profesores del nivel medio. Es importante mencionar

bujo (incluidas su posición y orientación con respecto a un marco de referencia, como el constituido por los bordes del papel) sea adecuada para una buena aprehensión visual de los elementos de la construcción que le permitan al individuo identificarlos de manera correcta.

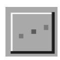
que se está suponiendo que los alumnos ya tienen un conocimiento básico del uso del programa, por lo que no se hará énfasis en ese aspecto.

ACTIVIDADES CON TRIÁNGULOS

Primera actividad

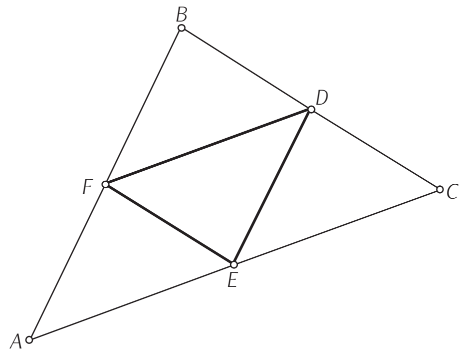
Como primer paso, se pide a los alumnos que construyan un triángulo cualquiera, cuyos vértices se llamarán (por comodidad) *A*, *B* y *C*. Recordemos que, para realizar esta acción, se utiliza la opción  para construir el triángulo y  para ponerles nombres a los vértices.

Resulta importante que los alumnos, desde este momento, se percaten de la capacidad distintiva del software: el arrastre. Activando la opción  deben darse cuenta de las posibilidades de modificar la forma, tamaño y posición del triángulo. Desde este momento, es necesario que el profesor esté al pendiente del significado que los alumnos atribuyan a esta operación, ya que pueden ir desde la percepción adecuada del arrastre, como productor de una gran diversidad de casos de la construcción, hasta el de una herramienta física útil sólo para "acomodar" el dibujo. Estos fenómenos se comentarán con mayor profundidad más adelante.

Lo siguiente es que los alumnos construyan el *triángulo de los puntos medios* a partir del que ya tienen. Para ello, tienen que construir los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo utilizando la opción  y luego construir el triángulo, utilizando tales puntos como vértices. Se puede tener orden en las construcciones de los alumnos pidiéndoles que llamen *D* al punto medio del lado *BC*, *E* al de *AC* y *F* al de *AB*. De esta manera, el triángulo *DEF* es el *triángulo de los puntos medios* del triángulo *ABC* (figura 2).

En este punto resulta importante, durante el proceso de aprehensión de la potencialidad dinámica del software, que los alumnos verifiquen si la construcción está bien hecha, es decir, que el dibujo refleje las relaciones geométricas de la figura. Lo ideal sería que los alumnos utilizaran en este momento el arrastre en su modalidad de *examen de arrastre*, al mover los vértices del triángulo *ABC* para observar si realmente el triángulo *DEF* que hicieron es el *triángulo de los puntos medios* del primero.

Figura 2



Ahora bien, utilizando la opción  se pueden medir los perímetros de los dos triángulos para establecer cuál es la razón entre ellos. Pero también, y más importante, se puede establecer el paralelismo entre los lados de los dos triángulos: *AB* es paralelo a *DE*, *BC* a *EF* y *AC* a *DF*. Esta propiedad es lo que une las diversas actividades, por lo que resulta necesaria su observación. Una posibilidad es pedir a los alumnos que determinen cuál es la posición entre sí de cada una de las parejas de lados mencionadas.

Es conveniente que los alumnos realicen la exploración y la investigación en parejas, ya que así pueden compartir observaciones y opiniones, y formularlas así verbalmente. Después, es adecuado realizar una discusión grupal, a fin de que compartan las observaciones, las posibles conjeturas y las justificaciones iniciales de las observaciones y las conjeturas. Puesto que el interés es el paralelismo, se puede conjeturar (atendiendo a la figura 1) que *los lados de un triángulo ABC y los de su triángulo de los puntos medios* (*DEF*) *son paralelos entre sí* (**conjetura 1**).

Dos observaciones importantes: primero, es muy posible que los alumnos del nivel medio no planteen una conjetura en los términos en los que se acaba de hacer, sino que podrán hacerlo sin atender algunos detalles o con imprecisiones; será parte de la labor del profesor ayudar a refinar la afirmación lo más posible, eliminando las imprecisiones, pero sin crear confusiones. Segundo, hay que hacer énfasis en que, para continuar con las actividades propuestas, se tiene que observar el paralelismo planteado, pues las justificaciones proporcionadas no necesariamente serán deductivas, ya que para ello los alumnos necesitarían tener en cuenta otros resultados que el profesor, después de que los alumnos expusieran sus justificaciones y las refinaran, puede proporcionar para ligarlo con la discusión. ¿Podría el lector seleccionar algún teorema que ayude al respecto? Sugerencia: una buena opción es recurrir a la semejanza entre triángulos, pero se le deja al lector determinar cómo usarlo.

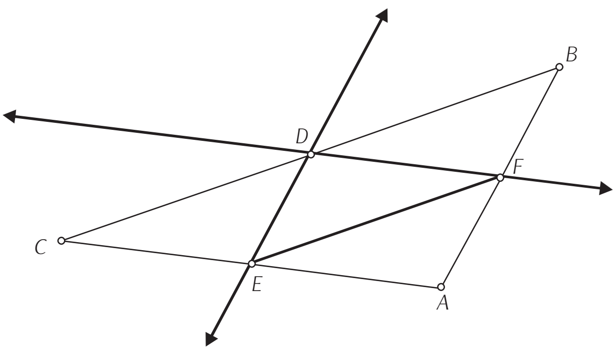
En este punto se observa la conveniencia de eliminar las opciones de verificación del programa, pues así se evita la posibilidad de que los alumnos le "pregunten" al programa (utilizando la opción ) si las parejas de lados son paralelos entre sí y, al obtener una respuesta, no necesiten más argumentos para convencerse (la computadora se convierte en árbitro o autoridad).

Segunda actividad

En esta ocasión, se realiza una construcción recíproca a la primera: se utilizan rectas paralelas para construir los puntos medios de los lados del triángulo. Entonces, se inicia nuevamente construyendo un triángulo *ABC* y el punto medio de *sólo un lado*, que bien puede ser el lado *BC*, llamándolo *D*. Ahora bien, utilizando la opción  se construyen dos rectas paralelas que pasen por *D*: una paralela al lado *AB* y la otra a *AC*. Evidentemente, cada una de estas rectas corta el triángulo en dos puntos distintos, así que se puede llamar *F* al punto que se creó en la intersección con el lado *AB* y *E* al que se creó sobre el lado *AC* (figura 3).

Utilizando la opción  se pueden ocultar las rectas paralelas y construir así el triángulo *DEF* con la opción adecuada.

Figura 3



La intención, en este momento, es observar ambos triángulos y pedir a los alumnos que determinen dos cosas: si *BC* es paralelo a *EF* y si los puntos *D*, *E* y *F* son los puntos medios de los lados del triángulo *ABC*, porque si lo fuesen, entonces el triángulo chico sería el *triángulo de los puntos medios* del grande. Una vez más, una discusión grupal ayudará a que los alumnos compartan las observaciones y las conjeturas planteadas. Siguiendo la misma línea de este trabajo, se puede conjeturar (atendiendo a la nomenclatura de la figura 2) que, *si en un triángulo* ABC *se traza el punto medio de un lado* (BC) *y luego se trazan rectas paralelas hacia los otros dos lados que pasen por dicho punto medio, éstas determinan los puntos medios de los lados restantes del triángulo, y estos puntos medios, junto con el primero trazado sobre* BC, *son los vértices del triángulo de los puntos medios del original* (**conjetura 2**).

Esta afirmación es un resultado directo de la aplicación del Teorema de Tales, pero de nuevo, la intención no es que el profesor proporcione de manera inicial la justificación (la prueba), sino que los alumnos justifiquen, expliquen y se convenzan.

Tercera actividad

En esta actividad se cambia el procedimiento: en lugar de observar propiedades a partir de construcciones, se hará la construcción a partir de las propiedades.

En un trabajo en equipo y sin usar la computadora, se plantea la situación inversa a los alumnos: supongan que tienen el *triángulo de los puntos medios* (que hemos estado llamando *DEF*) y tienen que construir el triángulo original (al que hemos llamado *ABC*), ¿cuáles condiciones necesita cumplir el triángulo *DEF*? y ¿cómo lo harían?

Para realizar esta construcción, es necesario que los alumnos recuperen las observaciones hechas sobre paralelismo, determinen las condiciones necesarias para el triángulo *DEF* y planteen un procedimiento de construcción. Después del trabajo en equipo, se puede realizar una discusión grupal inicial, a fin de que los alumnos se pongan de acuerdo en algunos puntos clave del proceso, los justifiquen y defiendan. Posteriormente, se realiza la construcción en la computadora por equipos.

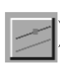
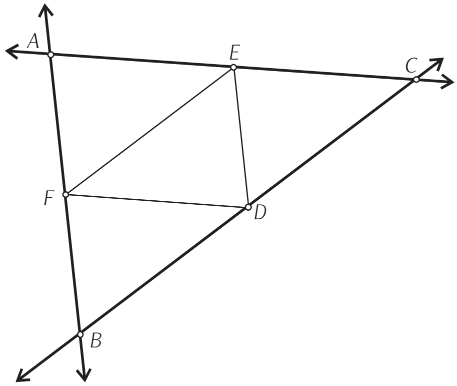
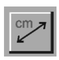
Un procedimiento para la construcción, que recupera las propiedades de paralelismo observadas, consiste en construir (con la opción ) las rectas paralelas

Figura 4



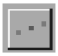
a cada uno de los lados que pasan por el respectivo vértice opuesto, las cuales se cortan entre sí en pares, para después construir el triángulo buscado, considerando los puntos de intersección de las rectas construidas, como los vértices *A*, *B* y *C* (figura 4). Utilizando la opción , se ocultan las rectas y queda el triángulo *ABC*.

Tras la construcción, cuatro cosas son relevantes: primero, lo ideal sería que los alumnos verificaran si su construcción es correcta, utilizando el arrastre como medio de examen para mover los puntos independientes, es decir *D*, *E* o *F*. Segundo, la respuesta a si el triángulo *DEF* necesita alguna propiedad especial para iniciar la construcción es negativa, así que, como profesor, habría que estar pendiente a ese respecto, pues los alumnos no siempre dan esta respuesta. Tercero, se debe verificar si realmente el procedimiento produce el triángulo *ABC* tal que el triángulo *DEF* sea el de sus puntos medios; para cuestiones de convicción, no es raro que algunos utilicen la opción  para medir los lados de ambos triángulos, pero en este punto, valdría la pena explorar el razonamiento deductivo y ayudar a los alumnos a que presenten justificaciones que se apoyen en las justificaciones y en los resultados proporcionados en las dos actividades anteriores. Cuarto, se podría hacer una pequeña exploración sobre la siguiente pregunta: ¿a partir de un triángulo *DEF* cualquiera, cuántos triángulos *ABC* se pueden construir de tal suerte que aquél sea el *triángulo de los puntos medios* de este último? La respuesta, que sería bueno que los alumnos buscaran, es: sólo uno.

Actividades con cuadriláteros

A partir de las actividades realizadas con triángulos, se pueden sustentar las siguientes que involucran cuadriláteros.

Primera actividad

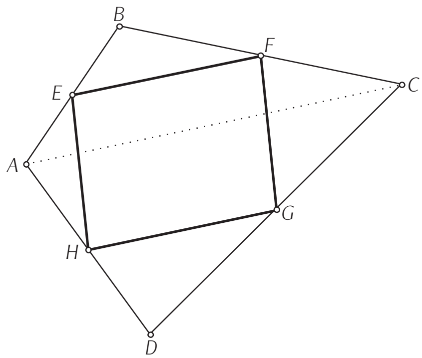
Hay que construir un cuadrilátero, lo cual se logra utilizando la opción .[14] Conviene llamar a los vértices *A, B, C* y *D* para seguir un orden. Enseguida, se realiza la construcción de su *cuadrilátero de los puntos medios* (utilizando las opciones  y ), llamando *E, F, G* y *H* a sus vértices (véase la figura 5 más adelante).

Mediante el arrastre, los alumnos pueden verificar si su construcción está bien hecha, pero también se les pide que identifiquen cuáles propiedades se mantienen invariantes al modificar el tamaño y forma del cuadrilátero original. Se puede utilizar la opción para medir longitudes para determinar que los lados opuestos del cuadrilátero *EFGH* miden lo mismo, a fin de que observen propiedades relacionadas que son invariantes y que llevan al paralelismo entre los lados opuestos de este cuadrilátero. Nuevamente, una discusión grupal dirigida por el profesor, donde los alumnos presenten sus observaciones y las defiendan, podría llevar a conjeturar que *el cuadrilátero de los puntos medios de otro cuadrilátero tiene lados opuestos paralelos entre sí o que miden los mismo* (**conjetura 3**).

Esta afirmación puede refinarse durante la discusión grupal bajo la coordinación del profesor. Durante este proceso, y tras una revisión de los nombres de los cuadriláteros, se puede replantear la afirmación, buscando también un formato de proposición condicional: *si EFGH es el cuadrilátero de los puntos medios de otro, entonces EFGH es un paralelogramo* (**conjetura 3**). El siguiente paso es realizar la justificación.

[14] Es importante que se avise a los alumnos que, al crear o al considerar el último vértice (el cuarto), se haga un doble clic con el ratón para que el programa termine con la construcción del polígono.

Figura 5



Segunda actividad

A fin de proporcionar más elementos para la construcción de la justificación, se pide a los alumnos que construyan las diagonales del cuadrilátero original, aunque para ser más claros, conviene comenzar con sólo una de ellas (la punteada en la figura 5).

Una acotación interesante. Al construir sólo una diagonal, se observan sólo dos triángulos dentro del cuadrilátero (sin considerar el paralelogramo de los puntos medios), lo cual puede ayudar a relacionarlo con las actividades anteriores de triángulos, pues si se construyen las dos diagonales, se crean cuatro triángulos y entonces el alumno debe realizar un proceso de reconfiguración (Sánchez, 2003) de la figura que bien puede no llevarse a cabo.

Así pues, echando mano de la diagonal trazada (supongamos que es *AC*) y los triángulos que se crean en el interior del cuadrilátero (consideremos el caso de *ABC*), se puede pedir a los alumnos que determinen qué relación existe entre las posiciones del lado *EF* del *cuadrilátero de los puntos medios* y la diagonal *AC* (que viene siendo uno de los lados del triángulo creado). Después de una exploración al respecto, la discusión grupal es una buena opción para que nuevamente los alumnos se pongan de acuerdo en sus observaciones y defiendan sus conclusiones.

La intención es que los alumnos puedan utilizar una parte de lo que llamamos antes **conjetura 1**, pues como *E* y *F* son puntos medios de los lados *AB* y *BC*, respectivamente, del triángulo *ABC*, entonces *EF* es un lado del *triángulo de los puntos medios* de aquél y, por tanto, es paralelo al lado *AC* del triángulo que, a la sazón, viene siendo una diagonal del cuadrilátero *ABCD*.

Pero además, el siguiente paso es que los alumnos investiguen qué pasa con el segmento *HG* con respecto a la misma diagonal *AC* (se utiliza otro triángulo). El procedimiento es similar al descrito en el párrafo anterior y, entonces, resulta que *HG* es paralelo a *AC*, por lo que *EF* es paralelo a *HG*. Utilizando la otra diagonal del cuadrilátero original (*BD*), se puede llegar al caso de que *EH* es paralelo a *FG*.

Otra exploración que puede ser útil si se quiere extender esta actividad y la siguiente es una que lleve a observar la longitud de los lados del paralelogramo *EFGH* con respecto a las diagonales del cuadrilátero *ABCD*. La propuesta es dejarla en manos de los alumnos, lo que, junto con los mismos resultados de las actividades de los triángulos, derivaría en que los lados *EF* y *HG* miden cada uno la mitad que la diagonal *AC*, mientras que *EH* y *FG* miden también la mitad que *BD*.

Tercera actividad

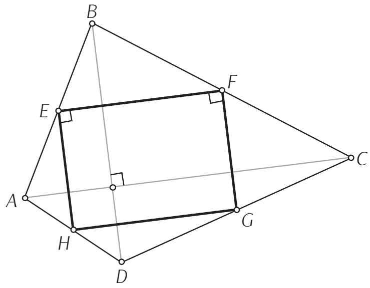
En esta actividad se va a considerar la definición de rectángulo como un paralelogramo cuyos ángulos internos son todos congruentes entre sí (miden 90°), pues, comenzando con un cuadrilátero *ABCD* y su *cuadrilátero de los puntos medios EFGH*, se pide a los alumnos que manipulen aquél para que este último sea rectángulo.

La intención es que, primero, los alumnos determinen si esto es posible, para luego, de ser así, determinar cuáles propiedades necesita tener el cuadrilátero *ABCD* para que esto ocurra. Al finalizar la exploración en equipos o parejas, es muy recomendable compartir y defender los puntos de vista mediante una discusión grupal coordinada por el profesor. Esta defensa de las observaciones y justificaciones propuestas por los alumnos puede ser encauzada hacia una estructura deductiva con la ayuda del profesor.

El caso es el siguiente (figura 6): como los lados adyacentes del paralelogramo *EFGH* son perpendiculares entre sí por la definición de rectángulo, y como también las parejas de lados opuestos son paralelas a cada una de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*, tal como se observó en la actividad anterior, entonces, las diagonales deben ser perpendiculares entre sí para que el cuadrilátero *EFGH* sea un rectángulo.

Un reto extra es plantear a los alumnos una nueva construcción del cuadrilátero *ABCD* y de su *cuadrilátero de los puntos medios* (*EFGH*), en la cual se utilice un procedimiento, ideado por los alumnos, de tal suerte que siempre *EFGH* sea un rectángulo. Una idea para el profesor es considerar que las propiedades recién observadas se centran en la perpendicularidad de las diagonales.

Figura 6



Otras actividades optativas

Existen otros retos más complicados que el profesor puede o no considerar, aunque finalmente resultan interesantes.

Uno es utilizar la extensión que se planteó al final de la segunda actividad y repetir la tercera, pero buscando las propiedades que necesita tener el cuadrilátero *ABCD* para que su *cuadrilátero de los puntos medios* sea un cuadrado (considerándolo como un rectángulo que tiene todos sus lados de la misma longitud), por lo que esta exploración no sólo debe tener en cuenta el hecho de que los lados adyacente de *EFGH* (y por tanto las diagonales del cuadrilátero *ABCD*) son perpendiculares entre sí, como en el caso de la tercera actividad, sino también el hecho de que todos los lados miden lo mismo y, por tanto, las diagonales del cuadrilátero *ABCD* también miden los mismo, aunque el doble de los lados de su *cuadrilátero de los puntos medios*.

Otro es realizar la construcción de un cuadrilátero y la de su *cuadrilátero de los puntos medios*, de tal manera que, al arrastrar con el ratón los vértices de aquél, este último sea siempre un cuadrado. ¿Podría el lector realizarla? (La opción  podría ser útil.)

Un último reto es considerar un paralelogramo *EFGH* y pensar en un procedimiento tal que permita recuperar el cuadrilátero *ABCD* tal que aquél sea el *cuadrilátero de los puntos medios* de este último. Habría que pensar en las condiciones que necesita *EFGH* y si son necesarias otras condiciones, para luego considerar las propiedades observadas durante las actividades realizadas y así idear el procedimiento necesario. Este reto, sin embargo, tiene la dificultad extra de que es necesario un requisito adicional: el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero *ABCD* (o de sus extensiones) tiene una posición arbitraria. Esto lleva al hecho de que un paralelogramo cualquiera es *cuadrilátero de los puntos medios* de una cantidad infinita de cuadriláteros, a diferencia del caso de los triángulos. El procedimiento para realizar tal construcción se le deja al lector.

ALGUNAS OBSERVACIONES DURANTE UNA IMPLEMENTACIÓN

Durante el ciclo escolar 2003-2004 se aplicaron estas actividades en la escuela secundaria "Mariano Matamoros" en la localidad semiurbana de Santa Rosa Jáuregui, Querétaro (México). Participó un grupo de tercer grado que trabajó en parejas durante 10 sesiones de 50 minutos cada una.

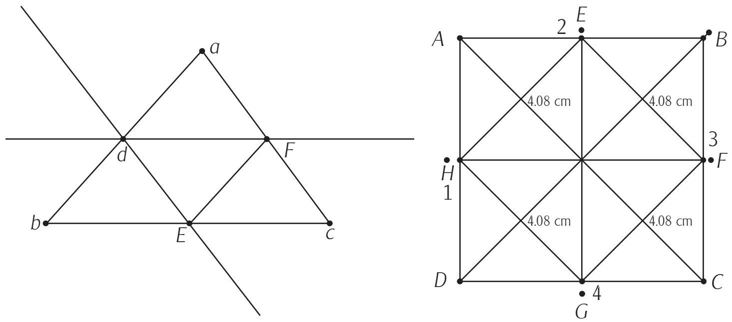
En esta implementación, que se realizó con el apoyo de la profesora del grupo, se hicieron preguntas a los alumnos con el propósito de observar algunos fenómenos cognitivos relacionados, más que nada, con una percepción de *rigidez geométrica* de las construcciones geométricas, el significado otorgado a la función de arrastre del software y el tipo de justificaciones que presentaron. A continuación, ampliaremos éstos para que el profesor que decida utilizar las actividades propuestas tenga en cuenta la posible presencia de estos fenómenos.

SOBRE LA RIGIDEZ GEOMÉTRICA

El fenómeno de rigidez geométrica se refiere a la incapacidad de un individuo para manejar mentalmente una figura geométrica cuando ésta no se encuentra en ciertas posiciones "estándares" o cuando no pueden imaginar la figura si varía su posición o su forma (Larios, 2003). Este fenómeno puede ser relacionado con los conflictos que aparecen entre los aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos, así como la necesidad de una búsqueda de dibujos satisfactorios en el sentido de Maracci (2001).

Además, a pesar de que los textos de las definiciones escolares de los objetos matemáticos (como los triángulos y los cuadriláteros que se utilizan en estas actividades) no hacen énfasis en tales posiciones, existe una tendencia a utilizar diagramas, incluso en la pantalla de la computadora, donde se privilegia la orientación y la forma de las figuras (véase, por ejemplo, la figura 7). Esta tendencia, que por cierto es fomentada muchas veces desde el nivel preescolar, aparece como

Figura 7 Ejemplos de construcciones de alumnos para la segunda actividad con triángulos (izquierda) y para la segunda con cuadriláteros (derecha)



un obstáculo, incluso para la aprehensión del rasgo que distingue al software de geometría dinámica: la dinamicidad proporcionada por el arrastre.

Es curioso ver incluso comportamientos que prevén la orientación, como es el caso de la tercera actividad con triángulos, en donde la mayoría de los alumnos construyeron el triángulo inicial *DEF* con un lado horizontal, casi isósceles y "apuntando" hacia abajo, a fin de que el triángulo *ABC* quedara tal como había estado siendo dibujado en las dos actividades anteriores (y como se muestra en el ejemplo de la figura 6 de la izquierda): con un lado horizontal casi isósceles y apuntando hacia arriba.

Sobre la función de arrastre

Como ya se mencionó con anterioridad, la función de arrastre es la característica principal del software de geometría dinámica. Sin embargo, esta función no es aprehendida automáticamente por parte de los alumnos (Larios, 2003; Olivero, 2003a), sino que requiere un desarrollo cognitivo, y este impedimento está relacionado incluso con aspectos relativos a la rigidez geométrica.

Una de las funciones que se le otorgan es la de validación de las construcciones por medio del *examen de arrastre*. Sin embargo, en la implementación que se realizó, resultó muy común que este arrastre se utilizara de una manera visual como herramienta física que tiene como finalidad el "arreglar" o "acomodar" las construcciones realizadas. Esto muestra la preponderancia de los aspectos figurales y una falta de desarrollo cognitivo que no permite incluso la diferenciación entre figura y dibujo, pues sólo se consideran la existencia de estos últimos en la pantalla de la computadora.

Ante esta situación, la potencialidad dinámica del software se pierde en la búsqueda de dibujos que convenzan a los alumnos, pero sin utilizar dibujos dinámicos que se acerquen a la noción de *figura*. De esta manera, sin el cuidado adecuado, el software se puede convertir incluso en un obstáculo para la aprehensión de la noción de figura, pues al ser más fácil "acomodar" los objetos geométricos para que visualmente convenzan (es decir, que parezcan ser lo que se pretende), se facilita aún más la tendencia a ignorar las propiedades geométricas de tales objetos y las relaciones que tienen entre sí. Evidentemente, la utilización de propiedades para una justificación deductiva también se dificultaría.

Sobre las justificaciones de los alumnos

Retomando un poco la última parte del párrafo anterior, el uso del arrastre como herramienta física que proporciona experiencia empírica puede llevar a que los alumnos proporcionen justificaciones de sus construcciones, de las propiedades que observan y de los procedimientos de construcción que propongan que tengan una base en la experiencia directa, eliminando la necesidad de una justificación formal.

En el caso de la implementación que se realizó, ocurrió más o menos así, ya algunos de los equipos proporcionaron justificaciones basadas en sus experiencias obtenidas de la computadora, o bien justificaciones que, más que describir propiedades observadas, describían el procedimiento realizado.

Sin embargo, el uso de deducciones no queda fuera del alcance de los alumnos, pues aunque sea en un nivel básico, sí pueden aparecer. Además, las actividades propuestas están estructuradas para que las propiedades observadas en algunas de ellas se utilicen para justificaciones de otras más adelante. Las discusiones grupales para exponer las observaciones y las justificaciones, así como para defender los puntos de vista propios, son momentos útiles para lograr esto y, en ellos, la participación del profesor como guía y coordinador es sumamente válida.

CONCLUSIONES

En este artículo se han presentado algunas consideraciones relacionadas con la geometría dinámica y los micromundos, a fin de proponer algunas actividades que pueden servir para aproximarse al estudio del paralelismo y al desarrollo del razonamiento deductivo en el nivel medio. Además, se ha mostrado la importancia de que el profesor considere los fenómenos que aparecen cuando se utiliza software para geometría dinámica, con el propósito de que esté preparado para ello y no abandone la empresa por desánimo al encontrarse con situaciones o problemáticas que le resulten nuevas e imprevistas.

Como ya se mencionó, es importante el uso y énfasis de figuras en posiciones no estándares, pues de otra manera, la identificación y la definición de éstas pueden complicarse al negarse los alumnos a identificar correctamente algunas figuras que no estén en esas posiciones (como es el caso de la no identificación de las diagonales externas de polígonos cóncavos, de triángulos rectángulos que no tienen los catetos con orientaciones horizontal-vertical, de las alturas externas de triángulos obtusos, de cuadrados que tampoco tienen la orientación horizontal-vertical y que repentinamente dejan de serlo y se convierten en rombos, y un largo etcétera).

Las posibilidades que ofrece el uso de la geometría dinámica en el salón de clases del nivel medio parecen ser muchas; sin embargo, el beneficio no es automático, pues mientras se logra abordar algunos problemas relacionados con el aprendizaje, aparecen otros. Es importante que el profesor esté consciente de esto y no tenga la idea de que basta únicamente con trasladar las actividades pensadas para realizarse con papel y lápiz (o alguna otra tecnología), pues algunas situaciones, que podrían ser problemas de gran riqueza al abordarlos con papel y lápiz, pueden resultar triviales al abordarlos con geometría dinámica y viceversa.[15] Además, el profesor debe estar prevenido respecto del uso de justificaciones empíricas y debe buscar la manera de generar la necesidad de utilizar justificaciones deductivas que se salgan del mero *examen de arrastre*. Mucha de la intención de las primeras secciones y la anterior de este trabajo es precisamente señalar estos aspectos.

Es importante continuar con las investigaciones y las reflexiones sobre el im-

[15] Para un ejemplo sencillo al respecto, el lector puede pensar en lo trivial que resultaría prolongar el lado de un polígono utilizando papel y lápiz, lo cual requiere un pensamiento diferente si se intenta realizar la misma acción en geometría dinámica sobre un polígono ya construido en la pantalla de la computadora.

pacto de estas tecnologías en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en cualquier nivel educativo. Por lo pronto, la implementación de estas actividades con fines de investigación se continuará, a fin de profundizar en el estudio de algunos de los fenómenos mencionados anteriormente.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer al personal de la Escuela Secundaria "Mariano Matamoros", en particular a la profesora Noraísa González González (profesora del grupo) y a la doctora Claudia Acuña S. por sus comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (1987), "Processus de preuve et situations de validation", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, núm. 2, pp. 146-176.

—— (2000), *Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas*, Colombia, Una Empresa Docente y Universidad de los Andes.

Boero, P., R. Garuti, E. Lemut y M.A. Mariotti (1996), "Challenging the Traditional School Approach to Theorems: A Hypothesis about the Cognitive Unity of Theorems", en L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, Valencia, Universitat de València, vol. 2, pp. 113-120.

Chevallard, Y. (2000), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Argentina, Aique Grupo Editorial.

De Villiers, M. (1993), "El papel y la función de la demostración en matemáticas", *Épsilon*, núm. 26, pp. 15-30. [Trad. del inglés: "The Role and Function of Proof in Mathematics", *Pythagoras*, vol. 24, núm. 17, 1990.]

Dreyfus, T. (1994), "The Role of Cognitive Tools in Mathematics Education", en R. Biehler, R.W. Scholz, R. Straesser y B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 201-211.

Edwards, L.D. (1998), "Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representations", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 17, núm. 1, pp. 53-78.

Fischbein, E. (1993), "The Theory of Figural Concepts", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, pp. 139-162.

Godino, J.D. y C. Batanero B. (1994), "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 14, núm. 3, pp. 325-355.

Godino, J.D. y A.M. Recio (1997), "Meaning of Proofs in Mathematics Education", en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education,* Lahti, Universidad de Helsinki, Finlandia, vol. 2, pp. 313-320.

Goldenberg, E.P. y A.A. Cuoco (1998), "What is Dynamic Geometry?", en R. Lehrer y D. Chazan (eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space,* New Jersey, Lawrence Erlbaum, pp. 351-367.

Hanna, G. (1996), "The Ongoing Value of Proof", en L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Valencia, Universitat de València, vol. 1, pp. 21-34. (Trad. al castellano en http://www.uaq.mx/matemáticas/articulos.html?0102.)

Hersh, R. (1993), "Proving is Convincing and Explaining", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 24, núm. 4, pp. 389-399.

Hölzl, R. (1995), "Between Drawing and Figure", en R. Sutherland y J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education,* Berlín, Springer, pp. 117-124.

Hoyles, C. y R. Noss (1987), "Synthesizing Mathematical Conceptions and their Formalization through the Construction of a Logo-based School Mathematics Curriculum", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 18, núm. 4, pp. 581-595.

—— (2003), "Microworlds: The Next Generation", en E. Filloy Y. (coord.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual,* México, Cinvestav-FCE, pp. 112-120.

Hoyles, C. y K. Jones (1998), "Proof in Dynamic Geometry Contexts", en C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 121-128.

Laborde, C. y B. Capponi (1994), "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 14, núms. 1-2, pp. 165-210.

Larios O., V. (2003), "Geometrical Rigidity: An Obstacle in Using Dynamic Geometry Software in a Geometry Course", en M.A. Mariotti (ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics*

Education, Bellaria, Italia, Edizioni Plus, Pisa University Press. (Disponible en http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_LariosOsorio_cerme3.pdf.)

Maracci, M. (2001), "Drawing in the Problem Solving Process", en J. Novotná (ed.), *Proceedings of 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Praga, Charles University, pp. 478-488.

Mariotti, M.A. (2000), "Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, pp. 25-53.

Nagel, E. y J.R. Newmann (1979), *El teorema de Gödel*, España, Tecnos.

Olivero, F. (2003a), "Cabri as Shared Workspace within the Proving Process", en N.A. Pateman, B.J. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, Honolulú, vol. 3, pp. 429-436.

------- (2003b), *The Proving Process within a Dynamic Geometry Environment*, Tesis de doctorado, Bristol, University of Bristol, Graduate School of Education.

Papert, S. (1982), *Desafío a la mente. Computadoras y educación*, Buenos Aires, Galápago.

Sánchez S., E. (2003), "La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 2, pp. 27-54.

Straesser, R. (2001), "Cabri-Géométre: Does Dynamic Geometry Software Change Geometry and its Teaching and Learning?", *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, vol. 6, núm. 3, pp. 319-333.

Sutherland, R. y N. Balacheff (1999), "Didactical Complexity of Computational Environments for the Learning of Mathematics", *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, vol. 4, pp. 1-26.

Thurston, W.P. (1994), "On Proof and Progress in Mathematics", *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, vol. 30, núm. 2, pp. 161-177.

Ursini L., S. (1993), *Pupils' Approaches to Different Characterizations of Variable in Logo*, Tesis de doctorado, Londres, Universidad de Londres, Instituto de Educación.

DATOS DEL AUTOR

Victor Larios Osorio
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, México
vil@uaq.mx