

La capacidad espacial en la educación matemática: estructura y medida

Modesto Arrieta

Resumen: Desde la década de 1950 los educadores matemáticos se han interesado por la capacidad espacial, sobre todo, por su relación con el rendimiento en matemáticas en general y en geometría en particular. Términos como “pensamiento espacial”, “visualización”, “orientación espacial” han sido tratados sin un modelo en el cual apoyarse, lo que ha ocasionado una gran dispersión de nombres, conceptos y pruebas en las investigaciones realizadas, lo cual dificulta enormemente la obtención de conclusiones válidas.

Como modelo de inteligencia se propone el modelo de los tres estratos de Carroll, en cuya estructura factorial figura la capacidad espacial como factor amplio de segundo orden configurado por cinco factores específicos independientes de primer orden que se tratan de caracterizar: visualización, relaciones espaciales, velocidad de clausura, flexibilidad de clausura y velocidad perceptiva.

Se proponen diferentes pruebas que nos permiten medir la capacidad espacial de los alumnos, las cuales deben llevarse a cabo cada dos años, a lo largo de toda la escolaridad obligatoria. Se muestran los resultados obtenidos por cada grupo de edad y se analizan también las diferencias entre chicos y chicas. Se concluye con una breve exposición sobre la importancia y utilidad del modelo propuesto tanto para el futuro de la investigación en este campo, que permitirá saber si una propuesta didáctica de geometría mejora o no la capacidad espacial de los alumnos a los que va dirigida, como para las implicaciones en el trabajo de orientación que se desarrolla en la escuela obligatoria.

Palabras clave: capacidad espacial, visualización, orientación espacial, geometría, enseñanza obligatoria.

Abstract: Ever since the 1950s Maths tutors have been interested in spatial capacity, mainly, because it is related to performance in Maths, in general, and in Geometry, in particular. Terms such as “spatial thought”, “visualization”, “spatial

Fecha de recepción: 29 de julio de 2004.

orientation” have been dealt with, without having a model which to rely on; a fact which has brought about so ample a variety of names, concepts and proofs in the accomplished research, that makes it extremely difficult to obtain valid conclusions.

Carroll's three-stratum pattern has been proposed as a model of intelligence, and in its factorial structure, spatial capacity appears as a second rate ample factor made up of five other specific, independent first rate factors, which are to be characterised: visualization, spatial relations, closure speed, closure flexibility and perceptive speed.

Different tests are proposed, which would allow us to measure the spatial capacity of the students, to be carried out every two years all throughout their schooling. For each age group a different scale is proposed and the differences between boys and girls, so common in this kind of tests, are also analysed. It is all rounded up with a brief exposition on the importance and usefulness of the proposed pattern, both for the future of the research in this field and for the implications in the field of counselling in compulsory schooling.

Keywords: spatial ability, visualization, spatial orientation, Geometry, compulsory education.

INTRODUCCIÓN

En la línea de investigación planteada por el autor (Arrieta, 2003), se explicita la importancia de la capacidad espacial en la educación matemática, la cual han puesto de manifiesto autores como Bishop (1980, 1989), Clements y Battista (1992), Clements (1998), Gutiérrez (1998) y Clements (2003). Además, en dicha línea se plantean tres problemas como básicos o preferentes para el futuro de la investigación en este campo. El primer problema aborda el análisis de la estructura de la capacidad espacial y una propuesta de medida de ésta. El segundo problema aborda el análisis del desarrollo de la capacidad espacial y de los contenidos geométricos asociados. El tercer problema pretende analizar diferentes modelos de propuestas didácticas e integrarlas en un modelo común que favorezca un desarrollo equilibrado y progresivo de la capacidad espacial.

El contenido de la investigación realizada estos últimos años y que se recoge en este artículo se centra en el primer problema, es decir, en la búsqueda de un modelo de capacidad espacial que, justificado teórica y empíricamente, nos permita medir o diagnosticar la capacidad espacial de los alumnos a lo largo de toda la escolaridad obligatoria.

Los modelos factoriales-psicométricos ofrecen suficientes garantías para una medida eficaz de la capacidad espacial, aunque es bien sabido que, desde dicha perspectiva, a la hora de explicar los procesos cognitivos subyacentes, se pone en evidencia un déficit que otras corrientes, como la del procesamiento de la información, subrayan y desarrollan.

En este trabajo nos detendremos en este primer aspecto, que queda explícito en el título del artículo (estructura y medida) y dejaremos para trabajos posteriores aspectos importantes que hacen referencia a los procesos cognitivos y a las estrategias utilizadas en la resolución de tareas espaciales.

Si bien en el currículo de la enseñanza obligatoria se reconoce que el estudio de la matemática, además de su valor instrumental, posee la capacidad de desarrollar la capacidad intelectual de los sujetos, el disponer de un modelo de capacidad espacial contrastado que nos posibilite obtener su medida nos permitirá disponer de un control externo para ver si una propuesta didáctica de geometría mejora o no la capacidad espacial de los alumnos a los que va dirigida.

ANTECEDENTES EN EL ESTUDIO DE LA CAPACIDAD ESPACIAL

Además de las revisiones citadas antes acerca de las investigaciones realizadas desde la educación matemática sobre la capacidad espacial, hay otros muchos estudios que tratan diferentes aspectos de esta capacidad. Entre ellos destacan los que relacionan la capacidad espacial con el rendimiento en matemáticas o alguno de sus tópicos como la geometría (Guay y McDaniel, 1977; Lean y Clements 1981; Battista, Wheatley y Talsma, 1982; Clements, 1983; Bishop, 1983; Connor y Serbin, 1985; Fennema y Tartre, 1985; Tartre, 1990; Triadafillidis, 1995; Bartolini Bussi, 1996), las investigaciones que analizan las diferencias de sexo (Fennema y Sherman, 1978; Weatley *et al.*, 1978; Connor y Serbin, 1980; Fennema y Tartre, 1985; Leder, 1985; Linn y Petersen, 1985; Ferrini, 1987; Ethington, 1990; Battista, 1990; Fennema y Hart, 1994; Voyer, Voyer y Bryden, 1995; Rilea, 2002), y los estudios que analizan las diferencias culturales en capacidad espacial (Mitchelmore, 1976, 1980; Bishop, 1977; Shar y Geeslin, 1980; Eisenhart, 1988; Gerdes, 1988; Presmeg, 1989; Cobb, 1995; García Ganuza, 2000).

Las investigaciones citadas tienen en común que tratan algún aspecto de la capacidad espacial y en ello vamos a centrar nuestro análisis, en cómo entienden, definen o caracterizan la capacidad espacial y en cómo la miden.

Un análisis, que *a priori* parece simple, entraña en la práctica una gran difi-

cultad por la dispersión de conceptos asociados a la capacidad espacial. La dispersión es de tal magnitud que es prácticamente imposible sacar conclusiones más allá de las ya conocidas de la influencia de la capacidad espacial en el rendimiento en matemáticas en general y en geometría en particular; que las diferencias en aptitud según el sexo son cada vez menores y que, si se mantiene alguna, es en algún aspecto relacionado con la capacidad espacial. De ahí que sea preferible un análisis global que identifique las aportaciones o carencias y posibilite, a partir de las investigaciones precedentes, un modelo de capacidad espacial coherente con los estudios psicológicos desarrollados hasta el momento.

Algunos de los estudios citados (Lean y Clements, 1981; Clements, 1983; Connor y Serbin, 1985) consideran la capacidad espacial, llamada también pensamiento espacial o capacidad visoespacial, como un constructo más global, como la cualidad que tiene una persona para las representaciones espaciales y donde habitualmente se acepta la definición dada por McGee (1979) como la capacidad de formar imágenes mentales y poder manipularlas en el pensamiento.

Hay otros estudios (Guay y McDaniel, 1977; Bishop, 1983; Tartre, 1990) que suelen considerar la capacidad espacial como un conjunto de subcapacidades más específicas como la visualización, la orientación espacial, las relaciones espaciales o la percepción espacial, dependiendo de la categorización adoptada por los autores, y donde destacan las aportadas por McGee (1979) (visualización y orientación), Connor y Serbin (1980) (visualización y clausura), Linn y Petersen (1985) (visualización, rotación mental y percepción) o Lohman *et al.* (1987) (relaciones espaciales, orientación espacial y visualización).

Otro grupo de estudios considera únicamente la visualización espacial como objeto de estudio, aunque sin especificar su posición en la jerarquía de la capacidad espacial (Fennema y Sherman, 1977, 1978; Bishop, 1977; Battista, Wheatley y Talsma, 1982; Fennema y Tartre, 1985; Hershkowitz, 1989; Battista, 1990), pero no en todos los casos se hace referencia al mismo concepto ni se elige la misma prueba para su medición.

Desde la educación matemática hay diferentes aportaciones asociadas al estudio teórico de la capacidad espacial basadas en las propuestas de McGee (1979) y Guay y McDaniel (1977), y recogidas por Clements (1983), Bishop (1983) y Tartre (1990), quienes discriminan al menos dos factores desde el punto de vista teórico:

Visualización: Aptitud para manipular objetos mentalmente (el objeto es lo que es manipulado por el sujeto).

Orientación espacial: Aptitud para imaginar un objeto desde otra perspectiva (el sujeto es quien cambia de posición ante el objeto).

Además, Bishop (1983) los encuadra en dos constructos más amplios y refinados:

Capacidad de procesamiento visual (VP), que comprende visualización y traslación de relaciones abstractas e información no figural en términos visuales, incluidas la manipulación y la transformación de representaciones visuales. Es una capacidad de proceso no relacionada con la forma del estímulo presentado.

Capacidad para interpretar información figural (IFI), que comprende lectura, comprensión e interpretación de representaciones visuales y vocabulario espacial usado en trabajos geométricos, gráficos, diagramas. Es una capacidad de contenido relacionada con la forma del estímulo presentado.

También Wattanawaha (1977) hace una aportación interesante con su modelo operacional DIPT, en el que clasifica taxonómicamente los ítems de visualización espacial teniendo en cuenta cuatro criterios: número de dimensiones en los que se resuelve el ítem (D), grado de interiorización exigido en la resolución del ítem (I), tipo de presentación de respuesta al ítem (P) y operaciones mentales necesarias para resolver el ítem (T). En ellas se describen las tareas espaciales más que las destrezas cognitivas necesarias y ha sido utilizado en diferentes investigaciones por Lahrizi (1984) y Cossio (1997).

Del análisis de todos estos conceptos asociados a la capacidad espacial no se pueden inducir definiciones uniformes, así como tampoco relación entre ellos ni jerarquía estructural, pero todos los trabajos utilizan en sus investigaciones pruebas que tratan de medir los diferentes factores de la capacidad espacial explicitados. Destacan, entre otras, *Spatial Relations Test* del DAT (Bennett, Seashore y Wesman, 1973), *Embedded Figures Test* (Oltman, Ratskin y Witkin, 1981), *Form Board Test*, *Card Rotation Test*, *Cube Comparison Test*, *Hidden Figures Test* y *Gestalt Completion Test* (Ekstrom, French, Harman y Dermen, 1976).

Estas pruebas psicométricas responden a diferentes factores como la visualización, las relaciones espaciales, la velocidad o la flexibilidad de clausura. En cambio, ninguno de los trabajos analizados hace un análisis exhaustivo de dicha capacidad ni la integra en una estructura superior común, y tampoco contempla los modelos factoriales propuestos en cada momento por la psicología psicométrica: Cattell en la década de 1970, Gustaffsson en la de 1980 y Carroll en la de 1990.

MODELOS FACTORIALES DE CAPACIDAD ESPACIAL

Históricamente el estudio de la capacidad espacial ha estado ligado al estudio de la inteligencia, la cual ha sido analizada desde dos vertientes. Una vertiente diferencial, que trata de analizar cuánto y en qué se diferencian los individuos, y otra generalista, cuyo objeto de estudio ha sido la conducta (conductismo), la función mental (cognitivismo) o los estadios evolutivos (epistemología genética piagetiana) (Eliot, 1987).

Galton (1869) planteó la variabilidad psicológica humana como un problema científico. Cattell (1890) sugirió la relación de las tareas psicológicas con el éxito escolar. Binet y Simon (1905) desarrollaron la primera escala de la inteligencia por edades, y Terman y Merrill (1916) fueron los primeros en describir pruebas específicas relacionadas con la capacidad espacial como el reconocimiento de objetos por su imagen, la discriminación de formas, el doblado de papel, etcétera.

Spearman (1904, 1927) observó correlaciones positivas en los resultados de los sujetos a los que se les administraban diferentes pruebas de capacidad. Esto lo llevó a pensar que las pruebas no miden atributos totalmente independientes y propuso un modelo bifactorial: uno común, general, o factor “g” y otro que abarcaba diferentes capacidades específicas.

Thurstone (1938) propuso siete factores independientes: comprensión verbal, fluidez verbal, aptitud numérica, memoria, rapidez perceptiva, visualización espacial y razonamiento inductivo, donde la visualización espacial implicaba visualización de formas, rotación de objetos, etc. En un principio negó la existencia del factor “g”, ya que la rotación ortogonal impedía la obtención de “g” como factor de segundo orden, aunque con rotación oblicua obtuvo un factor de segundo orden que podía ser interpretado como el factor “g” de Spearman.

Burt (1949) organizó la estructura de la inteligencia en cinco niveles que, de mayor a menor nivel de generalidad, eran: inteligencia general, relaciones, asociaciones, percepciones y sensaciones. Vernon (1950) sugirió cuatro niveles, un factor general, dos factores amplios de grupo como el verbal-educativo y el factor cinético-mecánico, que comprende aptitudes menos generales como las aptitudes psicomotriz, perceptiva, espacial y mecánica, las cuales, a su vez, se subdividen en otras más específicas. Guilford (1967) propuso que las aptitudes intelectuales pueden identificarse como una expresión de tres categorías que se interceptan: cinco operaciones mentales (cognición, memoria, producción convergente, producción divergente y evaluación), cinco tipos de contenido (visual, auditivo, simbólico, semántico y conductual) y seis productos (unidades, clases, relaciones,

sistemas, transformaciones e implicaciones), las cuales, combinadas, dan lugar a 150 aptitudes.

Cattell (1971) integró los modelos de Spearman, Thurstone y varios aspectos del de Guilford, y definió tres niveles de generalidad: un tercer nivel de inteligencia general, un segundo nivel de factores de generalidad amplia, como la inteligencia fluida (aptitud de razonamiento lógico) y la inteligencia cristalizada (aptitud para adquisición de conocimiento cultural como el lenguaje), y un primer nivel constituido por las aptitudes primarias de Thurstone y algunas descubiertas por Guilford. Para Cattell, a medida que la persona se expone al ambiente educativo familiar y escolar, su inteligencia cristalizada va haciendo surgir otras aptitudes más específicas como las capacidades espacial, verbal, numérica, etc. Horn (1985) reformuló el modelo de Cattell añadiendo diversos factores de segundo orden a partir de las aptitudes de primer orden, como visualización general, aptitud general auditiva, aprehensión y recuperación a corto plazo, etcétera.

También hay que destacar los trabajos de Guttman (1954), que con su técnica denominada “radex” propuso una clasificación de las tareas mediante una representación radial de su complejidad. Análisis efectuados por Marshalek, Lohman y Snow (1983) muestran que los dispositivos de medida se pueden representar dispuestos en círculos concéntricos de tal manera que, a medida que disminuye la complejidad, los dispositivos de medida se sitúan hacia la periferia y, dentro de cada círculo, la proximidad indica analogía en el contenido.

En su reanálisis, Lohman (1979) encontró tres factores espaciales principales:

Relaciones espaciales: requieren la velocidad de rotación o reflexión de figuras y objetos.

Orientación espacial: aptitud para imaginar un estímulo desde diferentes perspectivas. Aunque reconocía la dificultad de identificar dicho factor en relación con los otros.

Visualización: definida por una gran variedad de tareas como el doblado de papel, desarrollos de sólidos o rotaciones.

Y otros tres secundarios:

Velocidad de clausura: aptitud para identificar rápidamente un estímulo visual incompleto.

Flexibilidad de clausura: aptitud para identificar un estímulo visual enmascarado.

Velocidad perceptiva: aptitud para equiparar estímulos visuales.

En los últimos 20 años se han revisado los modelos anteriores y se ha intentado unificarlos. Destacan los trabajos de Gustafsson (1985, 1988), donde se recogen los resultados de cinco estudios empíricos con una muestra de 2 096 sujetos con edades comprendidas entre 11 y 15 años y que confirmaron el modelo propuesto por Cattell y Horn.

Sin embargo, el modelo de los tres estratos de Carroll (1988, 1993, 1994) es el que se considera como la síntesis final de muchas investigaciones realizadas en la literatura científica desde Spearman. Con 461 conjuntos de datos manejados y utilizando las matrices de correlaciones iniciales, el análisis factorial siguiente pone en evidencia una jerarquía en tres niveles o estratos, donde la cúspide o tercer estrato está ocupado por un factor general (3G) de inteligencia (el factor “g” de Spearman), el cual se considera como un rasgo fuente que también fue incorporado por Vernon en su modelo:

Inteligencia general (3G) (factor “g” de Spearman): se denomina así porque es una aptitud general no conectada con ningún hábito intelectual específico ni área sensorial, motriz o de memoria. Refleja la eficiencia y la velocidad con la que pueden ser ejecutados coordinadamente procesos cognitivos elementales. Requiere tareas complejas de razonamiento no verbal como las matrices progresivas de Raven.

El segundo estrato está formado por factores amplios relacionados con los grandes campos cognitivos como la percepción visual, la memoria, el razonamiento, el lenguaje, etcétera.

Inteligencia fluida (2F): abarca capacidades para realizar tareas intelectuales que apenas requieren conocimiento cultural. Las principales aptitudes primarias implicadas son: razonamiento inductivo, deductivo, secuencial.

Inteligencia cristalizada (2C): capacidad para utilizar la inteligencia general en la adquisición de conocimientos culturales. Implica comprensión y desarrollo del lenguaje.

Capacidad de memoria (2V): capacidad para consignar material en la memoria. Implica amplitud de memoria, memoria asociativa y memoria significativa.

Capacidad de percepción visual (2V): aptitudes relacionadas con el rastreo del campo visual, la aprehensión de formas, configuraciones y posiciones

de objetos percibidos visualmente, formando representaciones y la manipulación mental de tales representaciones. Implica visualización, relaciones espaciales, velocidad y flexibilidad de clausura y velocidad perceptiva.

Capacidad de recuerdo (2R): aptitud para recuperar rápidamente material almacenado en la memoria. Implica creatividad y fluidez en la producción de ideas.

Capacidad de percepción auditiva (2U): capacidad para captar, reconocer o discriminar estímulos auditivos. Implica discriminación de sonidos, umbrales de habla y escucha y percepción musical.

Velocidad cognitiva (2S): capacidad para resolver rápidamente tareas, independientemente de la modalidad de presentación del estímulo. Implica facilidad numérica.

Velocidad de procesamiento de decisión (2T): capacidad para codificar información, manipularla mentalmente y tomar decisiones. Implica rapidez de reacción a un estímulo (visual o auditivo) o elección entre varios.

El primer estrato está formado por aptitudes específicas elementales que configuran cada uno de los campos cognitivos citados y que, en el caso del campo de la percepción visual, está constituido por las aptitudes de visualización, las relaciones espaciales, la flexibilidad y las velocidades de clausura y perceptiva.

Los resultados, en lo que se refiere a estructura jerárquica y su distribución de pesos, son análogos a los de Gustafsson, a excepción de la inteligencia fluida que aquí aparece como aptitud amplia en el segundo estrato y no como general en el tercer estrato. Las aptitudes primarias de Thurstone se confirman en el primer estrato, aunque aquí aparecen más (se han podido replicar 40) y abarcan buena parte de los propuestos por Guilford. En el segundo estrato, la propuesta de Cattell y Horn obtiene suficiente apoyo.

HACIA UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS FACTORES DE LA CAPACIDAD ESPACIAL

La capacidad de percepción visual ($2v$), planteada por Carroll en su modelo, viene a ser la capacidad espacial (Gv) planteada por Cattell y abarca términos como capacidad visoespacial, pensamiento espacial, etc. Atendiendo al mayor uso que se ha hecho de este término en las investigaciones en educación matemática, se propone el término de *capacidad espacial* para futuras investigaciones.

Factor amplio del segundo estrato

Capacidad espacial (2v): capacidad para formar, reconocer y manipular imágenes, figuras y objetos mentalmente. Comprende cinco factores específicos independientes: visualización (vz), relaciones espaciales (sr), velocidad de clausura (cs), flexibilidad de clausura (cf) y velocidad perceptiva (p).

Los factores del primer estrato obtenidos por Carroll coinciden prácticamente con los propuestos por Lohman (1979), tal como lo reconoce el propio Carroll. La única diferencia radica en que, en el modelo de los tres estratos, no figura la orientación espacial, ya que según Carroll no se obtiene como factor independiente (Carroll, 1993, p. 323).

Factores específicos del primer estrato

Visualización (vz): capacidad para reestructurar (componer, descomponer, plegar, desarrollar, etc.) mentalmente patrones visuales en 2D o 3D. Las tareas más específicas se refieren a tareas complejas que requieren ensamblaje, plegado de papel o desarrollo mental de sólidos. Las pruebas más representativas son *Form Board Test* (composición de figuras planas) de Ekstrom, French y Harman (1976), *Differential Aptitude Test (DAT-SR)* (desarrollo de sólidos) de Bennet, Seashore y Wesman (1973) y *Paper Folding Test* (plegado de papel) de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976).

Relaciones espaciales (sr): capacidad para rotar mentalmente patrones visuales relativamente simples en 2D o 3D. La tarea típica consiste en pedir que se comparen dos estímulos en 2D para determinar si uno es una visión rotada o en espejo del otro. En otras tareas se trata de reconocer figuras rotadas en 3D. Las pruebas más utilizados son: *Card Rotation Test* (rotación plana de figuras planas) y *Cube Comparison Test* (rotación de sólidos) de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976).

Cuando se incrementa la dificultad variando el ángulo de rotación o añadiendo una rotación compleja a una visión en espejo del estímulo, se incrementa su relación con el factor de visualización (vz) de tal manera que deja de evaluar fundamentalmente sr. En este caso están las tareas de rotación propuestas por Cooper y Shepard (1973), Metzler y Shepard (1974) y Shepard (1975).

Velocidad de clausura (cs): es la rapidez para unificar en una única percepción un campo perceptual aparentemente dispar. La tarea típica consiste en identificar o captar un patrón visual que ha sido presentado de manera incompleta, distorsionada, difuminada u oscurecida. El patrón ha de ser fa-

miliar y se tiene que reconocer nombrándolo, ya que la elección de alternativas proporciona pistas excesivas.

Las pruebas más utilizadas son: *Gelstat Completion Test* (identificación de figuras incompletas), *Snowy Pictures* (identificación de figuras camufladas) y *Concealed Word Test* (identificación de palabras incompletas) de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976).

Flexibilidad de clausura (CF): aptitud para mantener una percepción o configuración visual en la mente con la finalidad de distinguirla de otras percepciones bien definidas. Rapidez para encontrar, captar e identificar un patrón visual conocido cuando se enmascara u oculta. Las tareas más habituales son las que tratan de identificar figuras o patrones visuales encubiertos u ocultos. Coincide con las tareas propuestas por Witkin para analizar la dependencia-independencia de campo.

Las pruebas más utilizadas son: *Embedded Figures Test* (identificación de figuras en configuraciones complejas) de Oltman, Raskin y Witkin (1981), o *Hidden Figures Test* y *Hidden Patterns Test* (identificación de modelos en configuraciones complejas) de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976).

Velocidad perceptiva (P): rapidez para encontrar un patrón visual conocido o para comparar con precisión uno o más patrones en un campo visual donde los patrones no se deterioran o enmascaran. Hay dos tipos: pruebas de rapidez en localización de letras, números idénticos y pruebas de rapidez para comparar caras, formas, nombres, etcétera.

Las pruebas más utilizadas son: *Finding A's Test*, *Number Comparison Test* o *Identical Pictures Test* de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976).

Las aptitudes expuestas hasta aquí han sido contrastadas ampliamente, además muestran independencia lineal, con la posible excepción de flexibilidad de clausura que presenta algunas dudas. También existen indicios de otros factores, aunque se necesita más investigación sobre ellos:

Integración perceptiva serial (PI): capacidad para captar e identificar un patrón visual cuando las partes de dicho patrón se presentan secuencialmente con gran rapidez. Es muy difícil identificarlo al margen de velocidad de clausura.

Rastreo o seguimiento espacial (SS): rapidez con la que se sigue una determinada ruta a través de un patrón visual. "Laberintos", "Sendas", etc. Es de difícil identificación al margen de visualización o velocidad perceptiva.

LUCES Y SOMBRAS DEL MODELO DE LOS TRES ESTRATOS DE CARROLL

APOYO EMPÍRICO Y OTROS APOYOS

El primer estrato del modelo de Carroll hace referencia a factores específicos, el segundo a factores amplios y el tercero a un factor general. El modelo propuesto se ha creado a partir de los resultados obtenidos en un gran número de investigaciones, por lo que tiene un apoyo empírico importante. El factor general 3G (factor “g” de Spearman) ha sido replicado 36 veces como factor del tercer estrato, lo que da idea del apoyo empírico del que goza el modelo de Carroll. Para un análisis factorial completo, que permita replicar el modelo, se necesitan al menos dos pruebas para cada factor del primer estrato.

Los correlatos biológicos nos ofrecen también la plausibilidad de las distintas aptitudes. Según Sperry (1951, 1963), las redes neuronales se establecen durante el desarrollo y se construyen bajo estricto control de mecanismos, aunque una mielinización (sustancia que envuelve a las neuronas en forma de vaina y permite la transmisión de impulsos bioeléctricos de manera más eficaz) diferenciada podría dar lugar a un desarrollo psicológico diferencial de las aptitudes (Miller, 1994). También se han encontrado relaciones entre el CI verbal, el CI manipulativo y el CI total con el volumen de materia gris, volumen de materia blanca o fluido cerebroespinal, respectivamente. Asimismo, se han identificado los mecanismos neurales y su caracterización anatómica. Así, el mecanismo visoespacial atencional está presentado por el córtex parietal y el mecanismo de discriminación visual está representado por el córtex occipitotemporal y el hipotálamo posterolateral, aunque el factor “g” no parece corresponder estrictamente al mecanismo neural inespecífico.

PESOS FACTORIALES

La capacidad espacial (2v) ocupa el cuarto lugar después de la inteligencia fluida (2F), la inteligencia cristalizada (2C) y la capacidad de memoria (2Y) en función del peso de cada factor del segundo estrato en la configuración del único factor del tercer estrato, la inteligencia general (3G), aunque en el libro de Carroll (1993) no figuran los pesos relativos.

Los pesos de visualización (vz), relaciones espaciales (sr), flexibilidad de clau-

sura (CF) y velocidad perceptiva (P) en la configuración de la capacidad espacial son 0.67, 0.60, 0.47 y 0.47, respectivamente, aunque no figura el peso de velocidad de clausura (CS) (Carroll, 1993, p. 609).

DIFERENCIA DE NIVEL ENTRE LOS FACTORES

Por otro lado, el análisis de los factores arroja otra constatación preocupante, ya que en su descripción cuesta entender que los cinco factores citados aparezcan en el modelo ocupando el mismo nivel (primer estrato), sin que se proponga ninguna jerarquía entre ellos, cuando un análisis de las pruebas en las que se basan los tests que hacen referencia a esos cinco factores parecen corresponderse con factores de muy diferente complejidad.

Al analizar las pruebas correspondientes a visualización, flexibilidad de clausura y relaciones espaciales y ver su dificultad, se entiende que sean pruebas apropiadas para sujetos con edad superior a 11-12 años, lo que hace pensar que el modelo funciona bien a partir de esa edad, aunque los estudios de Bickley, Keith y Wolfe (1995), que utilizaron dos pruebas por cada factor de segundo orden, confirman la estructura de los tres estratos desde los 6 años.

ORIENTACIÓN ESPACIAL

Si comparamos el modelo de los tres estratos de Carroll con las investigaciones realizadas desde la educación matemática en relación con la capacidad espacial, llama la atención la no inclusión de la orientación espacial en dicho modelo, cuando McGee (1979), Lohman (1979), Bishop (1983), Clements (1983) y Tarter (1990) la han considerado como una componente de la capacidad espacial, distinguiéndola explícitamente de la visualización.

En este sentido, y si bien ya Lohman *et al.* (1987) plantearon serias dudas sobre la posibilidad de identificar claramente la orientación espacial como una aptitud distinta de la visualización y las relaciones espaciales, Carroll (1993, p. 323) señala explícitamente que la orientación espacial no se puede discernir de las anteriores y que su peso en la configuración de la percepción visual queda anulada por éstas.

MODELO DIPT DE WATTANAWAHA

Tampoco la propuesta DIPT de Wattanawaha (1977) encaja en el modelo de los tres estratos, pues la clasificación de tareas no corresponde a las tareas asociadas a cada uno de los factores del primer estrato. Por ejemplo, una de las categorías del DIPT hace referencia a la dimensión del patrón visual y hay factores como la visualización o las relaciones espaciales que comprenden tareas tanto en 2D como en 3D.

EL MODELO A LO LARGO DEL CICLO VITAL

El equipo de trabajo de Horn (1985) ha estudiado la estructura de la inteligencia entre los 4-5 años y los 7 años. Para Horn, aunque a estas edades aparecen vestigios de la capacidad visoespacial como aptitud diferenciada, apenas puede diferenciarse de la inteligencia fluida. A partir de los 6 años, la estructura de las aptitudes suele consolidarse en términos generales tal y como la conocemos a través del modelo de los tres estratos. Para evaluar dicho modelo, Bickeley, Keith y Wolfe (1995) tomaron una muestra de 2 201 sujetos subdividida en grupos de edad: 6, 8, 10, 13, 30-39, 50-59 y 70-79 y se aplicaron 16 pruebas que cubrían las aptitudes primarias. Los resultados indican que no aparecen cambios en la organización de la inteligencia a lo largo del ciclo vital (de los 6 a los 79 años).

Los autores sólo consideraron dos factores de primer orden para cada uno de los factores de segundo orden (velocidad de clausura y velocidad perceptiva en el caso de la capacidad espacial), ya que el resto de las pruebas (visualización, relaciones espaciales y flexibilidad de clausura) son excesivamente complicadas para alumnos menores de 12 años.

A pesar de esta limitación en el número de factores de primer orden, estos resultados corroboraron los dos aspectos más importantes del modelo de Carroll: la estructura de la inteligencia en tres niveles o estratos, donde la capacidad espacial ocupa un lugar importante, y la perdurabilidad de dicha estructura a lo largo de todo el ciclo vital.

METODOLOGÍA

INSTRUMENTOS

Interesa una prueba que mida la capacidad espacial de los alumnos a lo largo de la escolaridad obligatoria, y que pueda aplicarse en una sesión de clase, sea común para los distintos niveles de escolaridad y recoja los cinco factores del modelo de Carroll.

Se han elaborado versiones de pruebas que tienen gran tradición en la investigación en educación matemática y el aval del análisis factorial del modelo propuesto por Carroll (véase anexo):

Visualización (vz): prueba relativa al desarrollo de sólidos basada en la prueba *Spatial Relation del Differential Aptitude Test* (DAT) de Bennet, Seashore y Wesman (1973, 2000). Número de ítems: 20; tiempo de aplicación: 8 minutos.

Relaciones espaciales (sr): prueba relativa a la rotación de figuras planas basada en la prueba *Card Rotation Test* de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976). Número de ítems: 160; tiempo de aplicación: 6 minutos.

Flexibilidad de clausura (cf): prueba relativa a la identificación de figuras en configuraciones complejas basada en la prueba *Hidden Figures Test* de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976). Número de ítems: 12; tiempo de aplicación: 9 minutos.

Velocidad de clausura (cs): prueba relativa a la identificación de figuras incompletas basada en la prueba *Gestalt Completion Test* de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976). Número de ítems: 20; tiempo de aplicación: 4 minutos.

Velocidad perceptiva (p): prueba relativa a la identificación de figuras idénticas entre otras que no lo son, basada en la prueba *Identical Pictures Test* de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976). Número de ítems: 48; tiempo de aplicación: 2 minutos.

Se requieren 29 minutos para las cinco pruebas que componen la capacidad espacial, los cuales, junto con el tiempo necesario para las explicaciones, la resolución de ejemplos, etc., suman un total de 45 a 50 minutos, tiempo adecuado para una sesión de clase. Debido a su dificultad, tres de estas cinco pruebas (vz, sr y cf) sólo son aplicables a partir de los 11/12 años, por lo que a los alumnos de menor edad se les han aplicado las pruebas de velocidad de clausura (cs) y

Cuadro 1 Coeficientes de fiabilidad de cada una de las pruebas por grupos de edad

α de Cronbach	2º Educ. primaria (7/8 años)	4º Educ. primaria (9/10 años)	6º Educ. primaria (11/12 años)	2º Ens. sec. oblig. (13/14 años)	4º Ens. sec. oblig. (15/16 años)
VZ	–	–	0.75	0.76	0.78
SR	–	–	0.98	0.98	0.98
CF	–	–	0.71	0.73	0.74
CS	0.72	0.71	0.72	0.76	0.73
P	0.91	0.92	0.88	0.91	0.91

velocidad perceptiva (P), las cuales, junto con las explicaciones y la resolución de ejemplos, requieren un total de 20 a 25 minutos.

La fiabilidad de las pruebas por grupos de edad, medida por el α de Cronbach y obtenida con el paquete estadístico SPSS, se muestra en el cuadro 1.

Los coeficientes obtenidos en las pruebas con mayor número de ítems contrastan con los obtenidos en pruebas de menor número de ítems, que presentan unos coeficientes más moderados. De cualquier manera, dichas pruebas discriminan suficientemente a los alumnos, incluidos los de más edad (15/16 años), y tienen la ventaja de que se pueden administrar en una única sesión de clase.

MUESTRA

Por lo general los artículos de investigación hacen referencia a los sujetos encuadrados en los cursos a los que pertenecen y que varían de un país a otro. Sería conveniente utilizar un sistema estándar para designarlos y aquí se propone denominar a los sujetos por la edad y el año en que se aplican las pruebas. Por ejemplo, en mi país, el 2º año de educación primaria de 2002/2003 lo cursaron los alumnos que cumplían 8 años en 2003. De ahí que ese año, entre los meses de marzo y mayo, que fue cuando se aplicaron las pruebas, todos los alumnos tenían 7/8 años.

Con este criterio de designación, los sujetos que fueron objeto de este estudio en 2003 pertenecían a los grupos de edad: 7/8, 9/10, 11/12, 13/14 y 15/16, que en mi país corresponden al final de cada ciclo de la enseñanza obligatoria: 2º, 4º y 6º de educación primaria; 2º y 4º de enseñanza secundaria obligatoria, respectivamente.

La población de referencia comprende a los alumnos de Ikastolas (enseñanza

Cuadro 2 Número de alumnos, número de aulas, promedio de alumnos por grupo y número de alumnos de la muestra del curso 2002/2003

Curso 2002-2003	Núm. de alumnos	Núm. de aulas	Promedio de alumnos por grupo	Núm. de alumnos de la muestra
2º de educación primaria (7/8)	3 746	198	18.92	353
4º de educación primaria (9/10)	3 595	196	18.34	343
6º de educación primaria (11/12)	3 466	183	18.94	355
2º de ens. secundaria obligatoria (13/14)	3 715	174	21.35	359
4º de ens. secundaria obligatoria (15/16)	3 469	185	18.75	316

en euskera) de la provincia de Gipuzkoa (Comunidad Autónoma Vasca), pues se pretende que sea un colectivo lo más uniforme posible, aprendizaje en idioma materno, menor dispersión metodológica, etc., para que influyan lo menos posible características que pudieran alterar significativamente dicho rendimiento.

Según el Instituto Vasco de Estadística (EUSTAT: www.eustat.com), en el curso 2002-2003 los alumnos de las ikastolas de Gipuzkoa se distribuían según los datos del cuadro 2.

Se ha utilizado el método estratificado proporcional por conglomerados y bi-tápico (Azorín Poch y Sánchez Crespo, 1986; Díaz Godino, Batanero y Cañizares, 1989), atendiendo sucesivamente a los criterios de división en comarcas, ikastolas por comarca y número de aulas por ikastola y, en una segunda etapa, por tamaño de los centros.

Asumiendo un error muestral de 5%, se requerían 17 aulas de cada curso para completar la muestra. Los centros fueron elegidos al azar y, a petición de los directores de los centros, las pruebas se aplicaron a todos los grupos de un mismo curso. Las aulas objeto de la muestra fueron elegidas *a posteriori* por sorteo.

RESULTADOS

Lo mismo que ocurre con la designación de los sujetos sucede con las puntuaciones obtenidas por los alumnos, ya que es habitual que pruebas equivalentes consten de diferente número de ítems. De ahí que el uso de puntuaciones direc-

Cuadro 3 Medias (M) (sobre 100) y desviaciones estándar (DS) de los alumnos por factor y nivel educativo

2003 Gipuzkoa Comunidad Autónoma Vasca		2º educ. primaria (7/8) N = 351	4º educ. primaria (9/10) N = 341	6º educ. primaria (11/12) N = 355	2º ens. sec. obligatoria (13/14) N = 359	4º ens. sec. obligatoria (15/16) N = 315
VZ	M	–	–	53.86	59.48	67.59
	DS	–	–	19.33	19.04	19.47
SR	M	–	–	37.00	46.59	49.29
	DS	–	–	19.49	20.45	23.33
CF	M	–	–	20.53	28.77	41.28
	DS	–	–	17.62	21.13	26.55
CS	M	30.44	47.32	54.18	64.99	67.56
	DS	15.56	16.65	16.55	14.37	13.33
P	M	28.96	40.72	43.33	51.39	56.90
	DS	8.70	8.70	9.06	11.24	11.18
2(2)	M	29.72	44.04	48.75	58.19	62.26
2 pruebas	DS	9.61	10.68	10.29	10.11	9.16
2(5)	M	–	–	41.78	50.24	56.61
5 pruebas	DS	–	–	10.77	11.02	12.74

tas dificulte la comparación de los resultados. En el cuadro 3 se muestran los resultados sobre 100 obtenidos por los alumnos en cada factor y nivel educativo.

En el manual de ETS-76 de Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976) no figuran baremos por edades de las pruebas de relaciones espaciales (SR), flexibilidad de clausura (CF), velocidad de clausura (CS) y velocidad perceptiva (P). Sólo figuran en un cuadro los resultados obtenidos por diferentes investigaciones en cursos puntuales y con un número indiscriminado de sujetos. Son referencias valiosas, aunque no se ajustan a los cursos analizados en nuestra investigación, ya que el mayor número de resultados corresponde a sujetos de 16/17 y 17/18 años. Sólo figuran algunos resultados que hacen referencia a 11/12 años y corresponden a puntuaciones de chicas (véase cuadro 4).

Cuadro 4 Número de sujetos (N), medias (M) y desviaciones estándar (DS) de chicas (11/12), del autor y de ETS-76 de la prueba de velocidad perceptiva (P)

Velocidad perceptiva (P) Chicas (11/12)	Arrieta-2003	Ekstrom, French, Harman y Dermen (1976)
N	177	294
M	45.35	49.60
DS	8.95	9.80

Las puntuaciones medias presentan el perfil que se muestra en la figura 1 y, aunque los datos son transversales, ya nos dan idea de la progresión de los alumnos con su programación habitual, sin intervención didáctica especial en su programa de geometría. La progresión es más acusada entre 2º y 4º de educación primaria y entre 6º de educación primaria y 2º de enseñanza secundaria obligatoria. Este perfil coincide con el obtenido con datos longitudinales en estudios realizados a lo largo del ciclo vital (De Juan-Espinosa, 1997, p. 427).

Seguiremos analizando a los sujetos que cursaban 2º de educación primaria en 2002/2003. A estos alumnos se les va a hacer el seguimiento cada dos años a lo largo de toda la escolaridad obligatoria. Este estudio longitudinal culminará el año 2011.

Figura 1 Perfil obtenido con las medias de las puntuaciones por factor y curso (datos transversales)

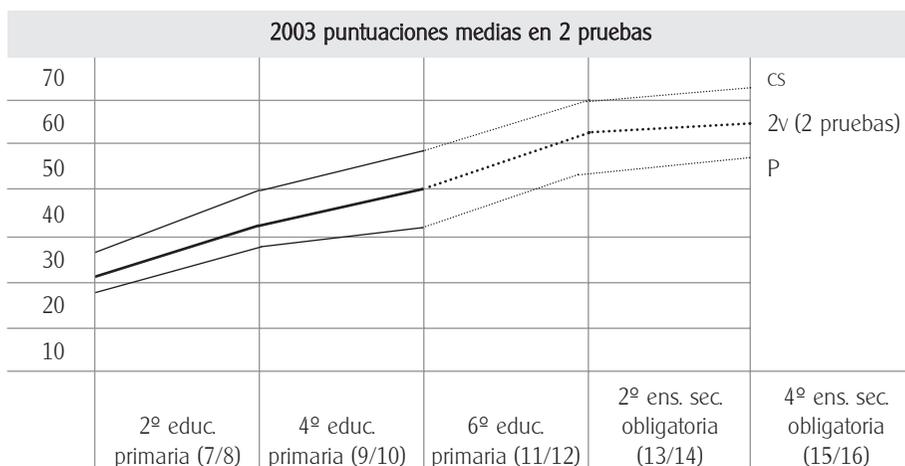
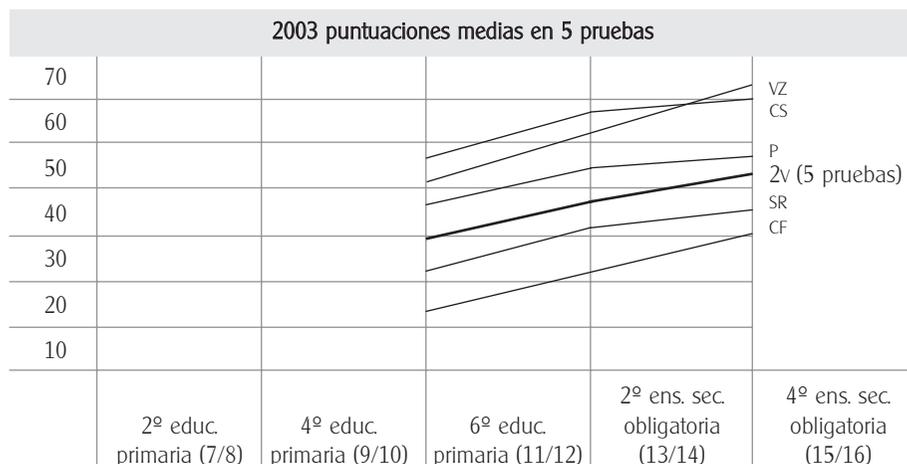


Figura 2 Perfil obtenido con las medias de las puntuaciones por factor y curso (datos transversales)



¿DIFERENCIAS DE SEXO?

Las diferencias de sexo en cada grupo de edad quedan reflejadas en el cuadro 5. Sorprenden estos resultados cuando hay abundante literatura que dice lo contrario, es decir, que los chicos aventajan a las chicas en algunas tareas espaciales (Maccoby y Jacklin, 1974; Linn y Pettersen, 1985; Feingold, 1988; Battista, 1990), aunque algunos estudios no confirmaban dichos resultados (Fennema y Sherman, 1977; Fennema, 1979; Tartre y Fennema, 1995; Burin, Delgado y Prieto, 2000).

Más llamativo es el caso del *Differential Aptitude Test* (DAT) de Bennet, Seashore y Wesman (1973, 2000), donde figuran baremos diferentes para chicos y chicas cuando de sus resultados se desprende que no hay diferencias significativas entre ellos respecto a visualización (vz). Nuestros resultados de igualdad entre chicos y chicas de 15/16 años coinciden con los del DAT, pero no coinciden para el grupo de 13/14 años, ya que, según el DAT, no hay diferencias significativas en visualización a esa edad. En cambio, en nuestra investigación sí se obtienen diferencias significativas a la edad de 13/14 años en favor de las chicas ($p < 0.05$) (véase el cuadro 5).

Parecen más lógicos estos resultados de igualdad entre chicos y chicas, ya que en el periodo comprendido entre los 11 y los 14 años, las chicas aventajan significativamente en dos de las cinco pruebas. Esto podría ser porque, en ese pe-

Cuadro 5 Medias (M) y desviaciones estándar (DS) de chicos (H) y chicas (M) por cada prueba y nivel educativo

2003	2º educación primaria (7/8)			4º educación primaria (9/10)			6º educación primaria (11/12)			2º ens. sec. obligatoria (13/14)			4º ens. sec. obligatoria (15/16)		
	H	M	T	H	M	T	H	M	T	H	M	T	H	M	T
VZ	M	-	-	-	-	-	50.88	56.86	2.943**	57.01	62.10	2.550*	67.40	67.81	0.187
	DS	-	-	-	-	-	19.59	18.65		20.13	17.49		21.37	17.15	
	N	-	-	-	-	-	178	177		185	174		168	147	
SR	M	-	-	-	-	-	37.73	36.26	0.709	47.12	46.03	0.503	50.63	47.79	1.074
	DS	-	-	-	-	-	19.00	19.99		19.75	21.20		24.57	21.85	
	N	-	-	-	-	-	178	177		185	174		168	147	
CF	M	-	-	-	-	-	19.41	21.67	1.211	27.29	30.35	1.376	43.30	38.97	1.447
	DS	-	-	-	-	-	17.07	18.13		21.21	20.99		28.59	23.90	
	N	-	-	-	-	-	178	177		185	174		168	147	
CS	M	30.34	30.54	0.115	49.35	2.057*	53.57	54.80	0.702	64.81	65.17	0.238	67.65	67.45	0.133
	DS	15.76	15.41		16.22		17.24	15.86		14.66	14.11		13.10	13.64	
	N	174	177		154		178	177		185	174		168	147	
P	M	28.58	29.35	0.826	41.50	1.515	41.31	45.35	4.300**	48.39	54.58	5.420**	55.00	59.04	3.255**
	DS	9.29	8.08		8.73		8.74	8.95		11.49	10.05		12.19	9.49	
	N	174	177		154		178	177		185	174		168	147	

Cuadro 5 (continuación) Medias (M) y desviaciones estándar (DS) de chicos (H) y chicas (M) por cada prueba y nivel educativo

2003	2º educación primaria (7/8)			4º educación primaria (9/10)			6º educación primaria (11/12)			2º ens. sec. obligatoria (13/14)			4º ens. sec. obligatoria (15/16)			
	H	M	T	H	M	T	H	M	T	H	M	T	H	M	T	
2V (2)	M	29.49	29.94	0.436	42.89	45.43	2.195*	47.44	50.08	2.430*	56.60	59.88	3.106**	61.33	63.33	1.942
	DS	10.03	9.20		10.86	10.32		10.98	9.40		10.36	9.58		9.56	8.60	
	N	174	177		187	154		178	177		185	174		168	147	
2V (5)	M	-	-	-	-	-	-	40.58	42.99	2.118*	48.92	51.65	2.357*	56.86	56.31	0.380
	DS	-	-	-	-	-	-	11.25	10.15		11.22	10.65		13.80	11.46	
	N	-	-	-	-	-	-	178	177		185	174		168	147	

Niveles de significación: * $p < 0.05$ ** $p < 0.001$ en pruebas t.

riodo preadolescente, una maduración más rápida de las chicas haga que consigan mayores puntuaciones en visualización y velocidad de percepción, aunque con el paso del tiempo, a los 15-16 años, vuelvan a igualarse las puntuaciones en visualización.

Hay que hacer notar que la única diferencia significativa que se mantiene en 4º de enseñanza secundaria obligatoria (15/16) corresponde a la velocidad perceptiva (P), diferencia que no se da entre alumnos más pequeños de 2º y 4º de educación primaria. Al ser dicha prueba de velocidad pura, la razón de esta diferencia puede deberse al formato de administración de la propia prueba, ya que en 2º y 4º de educación primaria los sujetos responden en el mismo cuadernillo y, en cambio, en 6º de educación primaria y en 2º y 4º de enseñanza secundaria obligatoria los sujetos responden en una hoja de respuestas separada del cuadernillo donde figura la prueba. De ahí que estas diferencias puedan deberse más a una mayor capacidad de las chicas en la velocidad de transferencia de datos que a la velocidad de resolución propia de una tarea espacial.

CONCLUSIONES

La revisión de la bibliografía nos ha mostrado cómo la falta del uso de modelos teóricos en la investigación sobre la capacidad espacial ha acarreado tal dispersión de nombres, conceptos y pruebas que se dificulta enormemente la obtención de conclusiones válidas, imposibilitando además las comparaciones y réplicas de éstas. De ahí que la aportación más importante de la investigación recogida en este artículo sea precisamente ésta, la propuesta de un modelo, en nuestro caso el modelo de los tres estratos de Carroll (1993), que además de mostrarnos la estructura en factores de la capacidad espacial, nos permita su medición. Se han elaborado sendas pruebas asociadas a los cinco factores que el propio modelo define, lo que nos permite medir la capacidad espacial de cualquier sujeto al final de cada ciclo de la enseñanza obligatoria (desde 2º de educación primaria (7/8 años) hasta 4º de enseñanza secundaria obligatoria (15/16 años)).

Si una de las finalidades de la enseñanza de la matemática es el desarrollo de la capacidad intelectual de los alumnos, el uso de un modelo teórico nos permitirá evaluar externamente una propuesta didáctica de geometría y decir si con dicha propuesta se mejora o no la capacidad de los alumnos a los que va dirigida.

Evidentemente, necesitamos conocer el desarrollo de la capacidad espacial de los alumnos a lo largo de toda la escolaridad, la cual irá aumentando progresi-

vamente tal como lo indican los resultados transversales del año 2003. Dicho estudio longitudinal, que culminará en el año 2011, permitirá conocer el desarrollo de la capacidad espacial de los sujetos sobre los que no ha habido intervención específica, así como analizar la influencia que tiene un programa de intervención en la mejora o desarrollo de la capacidad espacial.

Por otro lado, es evidente la aplicación práctica de los baremos en el trabajo de orientación que se desarrolla en la escuela obligatoria. Los alumnos con una puntuación mayor que la media más una desviación estándar son alumnos que tienen una buena capacidad espacial, la cual, unida a unas buenas calificaciones y a una buena actitud ante el estudio, les permitiría optar por estudios y carreras donde la capacidad espacial tiene gran influencia: arquitectura, ingeniería, diseño, decoración, escultura, topografía, etc. También se les puede sugerir que cursen asignaturas optativas, como diseño o dibujo técnico. En cambio, a los alumnos con una puntuación menor que la media menos una desviación estándar se les pueden proponer actividades de apoyo y ayuda para trabajar aspectos relacionados con la capacidad espacial, juegos tipo tetris, puzzles, rompecabezas, etc. y trabajos análogos de entrenamiento en tareas espaciales.

De cualquier manera, debemos encaminar nuestro esfuerzo a elaborar propuestas de geometría que, con una aplicación continuada, mejoren la capacidad espacial de los alumnos más desfavorecidos. Para ello todavía queda un largo camino por recorrer, pero creemos que ahora está bien trazado y los próximos años trataremos de recorrerlo.

ANEXO

Se muestran los dos o tres primeros ítems de cada una de las cinco pruebas de la capacidad espacial:

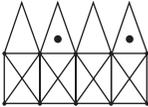
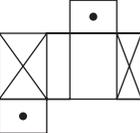
PRUEBA DE RELACIONES ESPACIALES (SR)

¿Cuáles de las siguientes figuras se obtienen girando el modelo en su mismo plano?

								
1	A	B	C	D	E	F	G	H
								
2	I	J	K	L	M	N	O	P

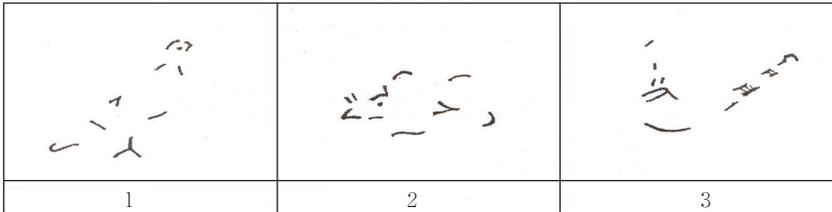
PRUEBA DE VISUALIZACIÓN (VZ)

¿Qué sólido corresponde al modelo desarrollado?

1					
		J	K	L	M
2					
		N	O	P	Q

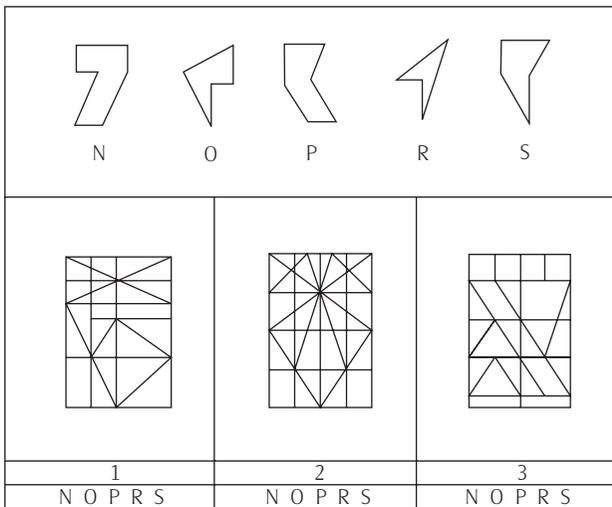
PRUEBA DE VELOCIDAD DE CLAUSURA (CS)

¿Qué representa cada dibujo incompleto?



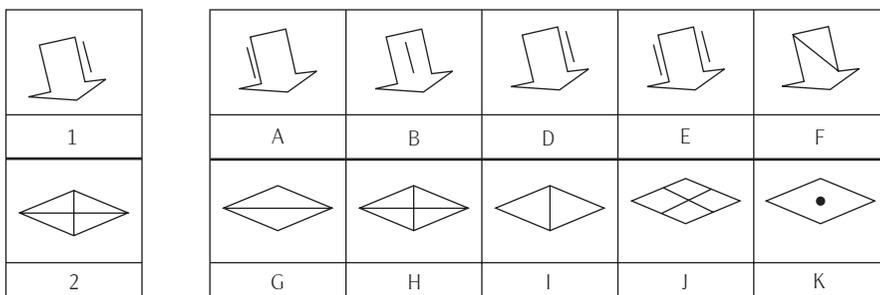
PRUEBA DE FLEXIBILIDAD DE CLAUSURA (CF)

¿Cuál de los cinco modelos está escondido en la figura?



PRUEBA DE VELOCIDAD PERCEPTIVA (P)

¿Cuál de las cinco figuras es igual al modelo?



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arrieta, M. (2003), "Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 3, pp. 57-76.
- Azorín Poch, F. y J.L. Sánchez Crespo (1986), *Métodos y aplicaciones del muestreo*, Madrid, Alianza.
- Barakat, M.K. (1951), "A Factorial Study of Mathematical Abilities", *British Journal of Psychology: Statistics Section*, vol. 4, pp. 137-156.
- Bartolini Bussi, M. (1996), "Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 31, pp. 1-2, 11-41.
- Battista, M.T. (1990), "Spatial Visualization and Gender Differences in High School Geometry", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 1, pp. 47-60.
- Battista, M.T., G.H. Wheatley y G. Talsma (1982), "The Importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in Preservice Elementary Teachers", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 13, núm. 5, pp. 332-340.
- Bennett, G.K., H.G. Seashore y A.G. Wesman (1973), *DAT. Tests de aptitudes diferenciales* (Versión 5-2000), Tests y manual, Madrid, TEA.
- Bickley, P.G., T.Z. Keith y L.M. Wolfle (1995), "The Three-Stratum Theory of Cognitive Abilities: Test of the Structure of Intelligence Across the Life Span", *Intelligence*, vol. 20, pp. 309-328.

- Binet, A. y T. Simon (1905), "Méthodes nouvelles pur le diagnostique du niveau intellectuel des anormaux", *L'Année Psychologique*, vol. 11, pp. 191-244.
- Bishop, A.J. (1977), "Visualising and Mathematics in a Pre-technological Culture", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10, pp. 135-146.
- Bishop, A.J. (1980), "Spatial Abilities and Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 11, pp. 257-269.
- (1983), "Space and Geometry", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, pp. 175-203.
- (1989), "Review of Research on Visualization in Mathematics Education", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 11, núm. 1, pp. 7-16.
- Burin, D.I., A.R. Delgado y G. Prieto (2000), "Solution Strategies and Gender Differences in Spatial Visualization Tasks", *Psicológica*, vol. 21, pp. 275-286.
- Burt, C. (1949), "The Structure of Mind: A Review of the Results of Factor Analysis", *British Journal of Educational Psychology*, vol. 19, pp. 100-111, 176-199.
- Carroll, J.B. (1980), *Individual Differences Relations in Psychometric and Experimental Cognitive Tasks*, Chapel Hill, LL, Thurstone Laboratory, University of North Carolina.
- (1988), "Cognitive Abilities, Factors and Processes", *Intelligence*, vol. 12, núm. 2, pp. 101-109.
- (1993), *Human Cognitive Abilities: A Survey of Factor Analytic Studies*, Cambridge, Cambridge University Press.
- (1994), "Constructing a Theory from Data", en D.K. Detterman (ed.), *Current Topics in Human Intelligence*, vol. 4, *Theories of Intelligence*, Norwood, NJ, Ablex.
- Cattell, J.M. (1890), "Mental Tests and Measurements", *Mind*, vol. 15, pp. 373-380.
- Cattell, R.B. (1971), *Intelligence: Its Structure, Growth and Action*, Boston, Houghton-Mifflin.
- Clements, D.H. (2003), *Teaching and Learning Geometry. A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Reston VA, NCTM.
- Clements, D.H. y M.E. Battista (1992), "Geometry and Spatial Reasoning", en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 420-464.
- Clements, M.A. (Ken) (1979), "Sex Differences in Mathematical Performance: An Historical Perspective", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10, pp. 305-322.
- (1983), "The Question of How Spatial Ability is Defined, and its Relevance to Mathematics Education", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 1, pp. 8-20.

- (1998), *Visualisation and Mathematics Education*, Barcelona, TIEM.
- Cobb, P. (1995), “Cultural Tools and Mathematical Learning: A Case Study”, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, núm. 4, pp. 362-385.
- Connor, J.M. y L.A. Serbin (1980), *Mathematics, Visual-Spatial Ability and Sex Roles*, Washington, ERIC Reports.
- (1985), “Visual-Spatial Skill: Is it Important for Mathematics? Can it be Taught?”, en S.F. Chipman, L.R. Brush y D.M. Wilson (eds.), *Women and Mathematics*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 151-174.
- Cooper, L.A. y R.N. Shepard (1973), “Chronometric Studies of the Rotation of Mental Images”, en W.G. Chase (ed.), *Visual Information Processing*, Academic Press.
- Cossío, J. (1997), *Diagnosis de la habilidad de visualizar en el espacio 3D con estudiantes de Bachillerato (BUP) del Bilbao metropolitano*, tesis de doctorado, Leioa, Universidad del País Vasco.
- Cox, J.W. (1928), *Mechanical Aptitude*, Londres, Methue.
- De Juan-Espinosa, M. (1997), *Geografía de la inteligencia humana*, Madrid, Pirámide.
- Detterman, D.K. (1992), “Assessment of Basic Cognitive Abilities in Relation to Cognitive Deficits”, *American Journal of Mental Retardation*, vol. 97, núm. 3, pp. 251-286.
- Díaz Godino, J., M.C. Batanero y M.J. Cañizares (1989), *Estudio estadístico de la población escolar de la provincia de Jaen: aplicación al diseño de encuestas escolares*, Granada, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Granada.
- Eisenhart, M. (1988), “The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research”, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, núm. 2, pp. 99-114.
- Ekstrom, R.B., J.W. French, H.H. Harman y D. Dermen (1976), *Kit of Factor-Referenced Cognitive Tests*, Princeton, NJ, Educational Testing Service.
- Eliot, J. (1987), *Models of Psychological Space*, Nueva York, Springer-Verlag.
- Ethington, C.A. (1990), “Gender Differences in Mathematics: An International Perspective”, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, pp. 74-80.
- Eysenck, H.J. (1985), “Revolution in the Theory and Measurement of Intelligence”, *Evaluación Psicológica*, vol. 1, pp. 99-158.
- Feingold, A. (1988), “Cognitive Gender Differences Are Disappearing”, *American Psychologist*, vol. 43, núm. 2, pp. 95-103.
- Fennema, E. (1979), “Women and Girls in Mathematics-Equity in Mathematics Education”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10, pp. 389-401.

- Fennema, E. y L. Hart (1994), "Gender and the JRME", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, pp. 648-659.
- Fennema, E. y J. Sherman (1977), "Sex-related Differences in Mathematics Achievement, Spatial Visualization and Affective Factors", *American Educational Research Journal*, vol. 14, núm. 1, pp. 51-71.
- (1978), "Sex-related Differences in Mathematics Achievement and Related Factors: A Further Study", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 9, pp. 189-203.
- Fennema, E. y L.A. Tartre (1985), "The Use of Spatial Visualization in Mathematics by Girls and Boys", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 16, núm. 3, pp. 184-206.
- Ferrini-Mundy, J. (1987), "Spatial Training for Calculus Student: Sex Differences in Achievement and in Visualization Ability", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 18, núm. 2, pp. 126-140.
- Galton, F. (1869/1978), *Hereditary Genius*, Londres, Jualian Fiedmann.
- García Ganuza, J.M. (2000), *Intervención para mejorar aptitudes espaciales en alumnos de ambos sexos*, tesis de doctorado, Universidad del País Vasco.
- Gerdes, P. (1988), "On Culture, Geometrical Thinking and Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 19, núm. 2, pp. 137-162.
- Guay, R.B. y E.D. McDaniel (1977), "The Relationship between Mathematics Achievement and Spatial Abilities among Elementary School Children", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 8, pp. 211-215.
- Guilford, J.P. (1967), *The Nature of Human Intelligence*, Nueva York, McGraw-Hill.
- Gustafsson, J.E. (1985), "Measuring and Interpreting 'g'", *Behavioral and Brain Sciences*, vol. 8, pp. 231-232.
- (1988), "Hierarchical Models of Individual Differences", en R.J. Sternberg (ed.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence*, Hillsdale, New Jersey, Erlbaum, vol. 4.
- Gutierrez, A. (1998), *Tendencias actuales de investigación en Geometría y visualización*, Barcelona, TIEM.
- Guttman, L. (1954), "A New Approach to Factor Analysis: The Radix", en P.F. Lazarsfeld (ed.), *Mathematical Thinking in the Social Sciences*, Glencove, IL, Free Press.
- Herschkowitz, R. (1989), "Visualization in Geometry—Two Sides of the Coin", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 11, núm. 1, pp. 61-76.
- Herschkowitz, R., B. Parzysz y J. van Dormolen (1996), "Space and Shape", en A. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*.

- Horn, J.L. (1968), "Organisation of Abilities and the Development of Intelligence", *Psychological Review*, vol. 75, pp. 242-259.
- (1985), "Remodelling Old Models of Intelligence", en B.B. Wolman (ed.), *Handbook of Intelligence: Theories, Measurement and Applications*, Nueva York, John Wiley and Sons.
- (1988), "Thinking about Human Abilities", en J.R. Nesselroade y R.B. Cattell (eds.), *Handbook of Multivariate Experimental Psychology*, 2a. ed., Nueva York, Plenum Press.
- Hunt, E. (1985), "The Correlates of Intelligence", *Current Topics in Human Intelligence*, vol. 1, pp. 157-178.
- (1989), "Diferencias individuales y cognición: una nueva aproximación a la inteligencia", *Estudios de Psicología*, pp. 39-40, 103-131.
- Jensen, A.R. (1982), "Reaction Time and Psychometric g", en H.J. Eysenck (ed.), *A Model for Intelligence*. Berlín, Springer-Verlag
- Kelley, T.L. (1928), *Crossroads in the Mind of Man: A Study of Differentiable Mental Abilities*, Stanford, Stanford University Press.
- Kohs (1928), *Cubos de KOHS*, Madrid, MEPSA.
- Kosslyn, S.M. (1980), *Image and Mind*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.
- Lahrizi, H. (1984), *Étude de l'habilité a visualiser des relations géométriques dans trois dimensions chez les élèves et les élèves-professeur au Maroc*, tesis de maestría, Université de Laval, Quebec.
- Lean, G. y M.A. Clements (1981), "Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 267-299.
- Leder, G. (1985), "Sex-Related Differences in Mathematics: An Overview", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 16, núm. 3, pp. 304-319.
- Linn, M.C. y A.C. Petersen (1985), "Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-Analysis", *Child Development*, vol. 56, pp. 1479-1498.
- Lohman, D.F. (1979), *Spatial Ability: A Review and Reanalysis of the Correlation Literature*, Stanford, Stanford University Technical Report, núm. 9.
- Lohman, D.F. et al. (1987), "Dimensions and Components of Individual Differences in Spatial Abilities", en S.H. Irvine y S.E. Newstead (eds.), *Intelligence and Cognition: Contemporary Frames of Reference*, Dordrecht, Martinus Nijhoff.
- Maccoby, E.E. y C.N. Jacklin (1974), *The Psychology of Sex Differences*, Stanford, Stanford University Press.

- Mcfarlane, M. (1925), "A Study of Practical Ability", *British Journal of Psychology, Monograph Supplement*, núm. 8.
- Mcfarlane Smith, I. (1964), *Spatial Ability: Its Educational and Social Significance*, Londres, University of London Press.
- Marshlek, B., D.F. Lohman y R.E. Snow (1983), "The Complexity Continuum in the Radex and Hierarchical Models of Intelligence", *Intelligence*, vol. 7, pp. 107-128.
- McGee, M. G. (1979), "Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences", *Psychological Bulletin*, vol. 86, núm. 5, pp. 889-918.
- Metzer, J. y R.W. Shepard (1974), "Transformational Studies of the Internal Representation of Three-Dimensional Objects", en R.L. Solso (ed.), *Theorie in Cognitive Psychology: The Loyola Symposium*, Potomac, Lawrence.
- Miller, E.M. (1994), "Intelligence and Brain Myelinization: A hypothesis", *Personality and Individual Differences*, vol. 17, pp. 803-832.
- Mitchelmore, M.C. (1976), "Cross-Cultural Research on Concepts of Space and Geometry", en J.L. Martin y D.A. Bradbard (eds.), *Space and Geometry*, Washington, ERIC Reports.
- (1980), "Three-Dimensional Geometrical Drawing in Three Cultures", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 11, pp. 205-216.
- Murray, J.E. (1949), "Analysis of Geometric Ability", *Journal of Educational Psychology*, vol. 40, pp. 118-124.
- NCTM (1989, 2000), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM.
- Oltman, P.K., E. Ratskin y H.A. Witkin (1981), *GEFT. Test de figuras enmascaradas (forma colectiva)*, Madrid, TEA.
- Presmeg, N. (1989), "Visualization in Multicultural Mathematics Classrooms", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 11, núm. 1, p. 17.
- Rilea, S.L. (2002), *Sex Differences in Spatial Ability: A Lateralization of Function Approach*, UMI.
- Shar, A. y W. Geeslin (1980), "Children's Spatial-Perceptual Preferences: A Cross-Cultural Comparison", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 11, núm. 2, pp. 156-160.
- Shepard, R.N. (1975), "Form, Formation, and Transformation of Internal Representations", en R.L. Solso (ed.), *Information Processing and Cognition: The Loyola Symposium*, Hillsdale, Erlbaum.
- Spearman, C. (1904), "General Intelligence, Objectively Determined and Measured", *American Journal of Psychology*, vol. 15, pp. 72-101.

- Spearman, C. (1927), *The Abilities of Man*, Londres, Macmillan.
- Sperny, R.W. (1951), "Mechanisms of Neural Maturation", en S.S. Stevens (ed.), *Handbook of Experimental Psychology*, Nueva York, Wiley.
- (1963), "Chemoaffinity in the Orderly Growth of Nerve Fiber Patterns of Connections", *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 50, pp. 703-710.
- Stenquist, J.L. (1922), *Mechanical Aptitude Tests*, Nueva York, World Book.
- Sternberg, R.J. (1985), *Beyond IQ: A Triarchic Theory of Human Intelligence*, Cambridge, Cambridge University Press.
- (1988), *Las capacidades humanas*, Madrid, Labor.
- Suydam, M.N. (1985), "The Shape of Instruction in Geometry: Some Highlights from Research", *Mathematics Teacher*, vol. 78, pp. 481-486.
- Tartre, L.A. (1990), "Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 3, pp. 216-229.
- Tartre, L.A. y E. Fennema (1995), "Mathematics Achievement and Gender: A Longitudinal Study of Selected Cognitive and Affective Variables (grades 6-12)", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 28, pp. 199-217.
- Terman, L.M. (1916), *The Measurement of Intelligence*, Boston, Houghton-Mifflin.
- Terman, L.M. y M.A. Merrill (1937), *Measuring Intelligence*, Boston, Houghton-Mifflin.
- Thurstone, L.L. (1938), *Primary Mental Abilities*, Chicago, University of Chicago Press.
- Triadafillidis, T.A. (1995), "Circumventing Visual Limitations in Teaching the Geometry of Shapes", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 29, núm. 3, pp. 225-235.
- Usiskin, Z. (1987), "Resolving the Continuing Dilemmas in School Geometry", en M.M. Lindquist y A.P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 17-31.
- Vernon, P.E. (1950/1971), *The Structure of Human Abilities*, Nueva York, Wiley.
- (1955), "The Assessment of Children", *Studies in Education*, vol. 7, pp. 189-215.
- (1987), *Speed of Information Processing, Reaction Time and the Theory of Intelligence*, Norwood, NJ, Ablex.
- Voyer, D., S. Voyer y M.P. Bryden (1995), "Magnitude of Sex Differences In Spatial Abilities: A Meta-Analysis and Consideration of Critical Variables", *Psychological Bulletin*, vol. 117, núm. 2, pp. 250-270.
- Wattanawaha, W. (1977), *Spatial Ability and Sex Differences in Performance on Spatial Tasks*, tesis de maestría, Monash University, Melbourne.

Wheatley, G.H., R.L. Frankland, R. Mitchell y R. Kraft (1978), "Hemispheric Specialization and Cognitive Development: Implications for Mathematics Education", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 9, pp. 19-32.

Wrigley, J. (1958), "The Factorial Nature of Ability in Elementary Mathematics", *British Journal of Educational Psychology*, vol. 1, pp. 61-78.

DATOS DEL AUTOR

Modesto Arrieta

Departamento de Didáctica de la Matemática,

Universidad del País Vasco

modesto.arrieta@edu.es