La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía el modelo concreto de bloques

Abraham Hernández y Aurora Gallardo

Resumen: Vía un modelo de enseñanza llamado *modelo de bloques* (MB), utilizado como recurso de investigación, analizamos la sustracción de enteros en dos estudiantes de secundaria. El análisis sistemático de sus acciones en el modelo, durante entrevista clínica individual, ha permitido reconocer las condiciones en las que podría alcanzarse la extensión numérica. Estas condiciones son las siguientes: reconocimiento de los distintos niveles de conceptualización de los números negativos; dualidad del signo menos; aceptación de la sustracción en todos los casos; la igualdad algebraica como equivalencia; extrapolación correcta de reglas aprendidas de la semántica del MB a la sintaxis del lenguaje algebraico.

Palabras clave: números negativos, modelo de enseñanza, modelos de los procesos cognitivos.

Abstract: By means of a teaching model called the *Algebraic Blocks Model* (MB) used as a research resource, we analyzed the subtraction of integers by two secondary students. The systematic analysis of the students' actions in Algebraic Blocks Model during the clinical interview has allowed the recognition of conditions under which the numerical extension could be achieved. Such conditions are as follows: acknowledgement of the different conceptualization levels of negative numbers; duality of the minus sign; acceptance of the subtraction in all of the cases; the algebraic equality as equivalence; the correct extrapolation of rules learned from the MB semantics to the syntax of the algebraic language.

Keywords: negative numbers, teaching model, models of cognitive processes.

Fecha de recepción: 25 de mayo de 2005.

LITERATURA Y MARCO TEÓRICO

Investigadores como H. Freudenthal (1973); G. Glaeser (1981); A. Bell (1982); C. Janvier (1985); E. Fischbein (1987); G. Vergnaud (1989); A. Bruno y A. Martinón (1994); A. Gallardo (2002), y J. Vlassis (2001 y 2002), entre otros, han propuesto y utilizado modelos de enseñanza para la introducción de los números negativos en el aula. Algunos de ellos han preferido los modelos puramente sintácticos y otros han recurrido primero a los modelos concretos.

Las investigaciones mencionadas nos permiten afirmar que, en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los enteros de nivel escolar elemental, es necesario recurrir a modelos. La enseñanza prosigue la búsqueda del buen modelo, ya que los autores de libros de texto continúan introduciendo nuevas versiones, pues se ha visto que el dominio del tema en un nivel sintáctico no asegura necesariamente que el maestro podrá diseñar una introducción a una problemática que sea comprensible para los estudiantes; la explicación formal no es suficiente para ellos. De la misma manera que les encontraron sentido a los números naturales, los estudiantes desearían vincular cosas de la realidad al nuevo concepto de número signado y modelar las nuevas operaciones de algún modo concreto. No se satisfacen con un símbolo, desean relacionarlo con una imagen real.

Ahora bien, en el presente artículo nos alejamos del modelo cuyo fin principal es enseñar y nos enfocamos en una problemática distinta, la del uso de un modelo concreto como herramienta de análisis teórico para identificar los procesos cognitivos que muestran los estudiantes mediante sus acciones. Para ello nos apoyamos en los siguientes investigadores.

Jean Piaget (1933), quien manifestó que, al mostrarle al niño representaciones del mundo descubre en él "un sistema de tendencias" de las que el niño no ha tenido conciencia y, por consiguiente, no ha podido manifestar de manera explícita. En esta misma dirección, E. Filloy (1999) explicó que existen tendencias causadas por las estructuras cognitivas del sujeto que aparecen en cada estadio del desarrollo individual y que dan preferencia a distintos mecanismos para proceder, así como a diferentes maneras de codificar y descodificar mensajes matemáticos. Las "tendencias cognitivas" se pueden observar en situaciones de enseñanza en el aula y durante las entrevistas clínicas individuales a estudiantes. Además, estas tendencias aparecen en particular cuando uno está intentando moverse de un estrato más concreto del lenguaje matemático a uno más abstracto; en ese momento es cuando tienen lugar varios sucesos. Dichas tendencias, que denominaremos como TC, son las siguientes: TC1, la presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas; TC2, la dotación de sentidos intermedios; TC3, el retorno a situaciones más concretas cuando se presenta una situación de análisis; TC4, la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes; TC5, lecturas hechas en estratos de lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática; TC6, la articulación de generalizaciones erróneas; TC7, la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución; TC8, la presencia de mecanismos inhibitorios; TC9, la presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa; TC10, la generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentido a las acciones concretas intermedias, y TC11, la necesidad de dotar de sentido a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirse en operaciones.

En lo que se informa en este artículo, surgieron nítidamente las tres tendencias cognitivas[1] que se describen a continuación:

> TC2, *la dotación de sentidos intermedios*: en la resolución de adiciones y sustracciones de enteros, se confieren múltiples sentidos a los números negativos que corresponden a los niveles de aceptación reportados por Gallardo (2002).
>
> TC6, *la articulación de generalizaciones erróneas*: aparece la extrapolación de una regla del dominio multiplicativo al dominio aditivo que causa la pérdida de sentido de la situación.
>
> TC8, *la presencia de mecanismos inhibitorios*: en adiciones y sustracciones se centran en el signo binario e inhiben el signo unario o viceversa. Surgió, además, el no reconocimiento de sustraer un número mayor de un número menor. Este evitamiento obstruyó el concepto de número general[2] en expresiones algebraicas. Asimismo, la presencia de soluciones negativas provocó la inhibición de reglas sintácticas que ya se habían dominado anteriormente.

Gallardo (2002) mostró que, durante el proceso de transición de la aritmética al álgebra, es cuando se vuelve significativo el análisis de la construcción de los números negativos. En esta etapa los estudiantes se enfrentan con ecuaciones y problemas que contienen números negativos como coeficientes, constantes o soluciones. Esta autora encontró cinco niveles de aceptación de números negativos

[1] Se retoma la terminología de Filloy (1999).

[2] "Número general es un símbolo que representa una entidad indeterminada que puede asumir cualquier valor" (Ursini y Trigueros, 2001).

en un estudio empírico realizado con 35 alumnos de 12 a 13 años de edad, precedido por un análisis histórico-epistemológico del cual se abstrajeron estos niveles (Gallardo, 1994).

Los niveles son los siguientes: *Sustraendo,* donde la noción de número se subordina a la magnitud (en $a - b$, a siempre es mayor que b, donde a y b son números naturales); *Número signado,* donde los signos más o menos se asocian a la cantidad sin que sea necesario agregarle significado alguno. *Número relativo,* donde en el dominio discreto surge la idea de cantidades opuestas en relación con una cualidad y, en el dominio continuo, la idea de simetría; *Número aislado,* donde se advierten dos niveles, el resultado de una operación o como la solución a un problema o ecuación, y por último *Número negativo formal,* como la noción matemática del número negativo dentro de un concepto de número más amplio que contiene a los números positivos y negativos (los enteros de hoy). Este nivel por lo general no es alcanzado por los estudiantes de 12 y 13 años de edad. Conviene subrayar que, al considerar este acercamiento teórico, cobran mucha importancia las actuaciones de los estudiantes frente a las situaciones planteadas, ya que permiten realizar una indagación más a fondo e identificar las tendencias cognitivas en un proceso de construcción del conocimiento numérico y algebraico.

EL ESTUDIO

En este artículo se dan a conocer los resultados obtenidos en la investigación realizada con un grupo de estudiantes de segundo grado de secundaria que utilizaron el modelo concreto denominado “modelo de bloques” para el desarrollo de contenidos relacionados con los números enteros. Para el docente, el modelo fue utilizado como recurso de investigación para la introducción de las operaciones con números con signo en aritmética y álgebra elemental.

La secuencia metodológica utilizada durante la realización del estudio (A. Hernández, 2004) fue:

a) Observaciones a cinco grupos de segundo de secundaria, aproximadamente 85 alumnos, de una escuela secundaria de la delegación Coyoacán en la Ciudad de México, mediante una guía de observación cuyo objetivo fue conocer las formas de enseñanza del profesor y la dinámica de trabajo del grupo, así como identificar las estrategias desarrolladas por los alumnos en el momento de resolver las situaciones problemáticas que se les planteaban.

b) Elaboración y aplicación del cuestionario de diagnóstico a cinco grupos, con tareas que involucran a los números signados, con la finalidad de seleccionar el grupo con el desempeño académico más bajo.

c) Desarrollo de una fase de enseñanza con el grupo que resultó con bajo desempeño académico, a fin de utilizar el modelo de bloques como un recurso que mostró las diversas tendencias cognitivas de los sujetos manifestadas ante la presencia de nuevos conceptos y operaciones.

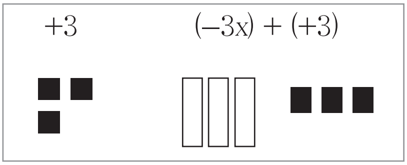
d) Diseño y aplicación del cuestionario final al grupo de desempeño más bajo integrado por 16 alumnos. Su objetivo fue detectar tres tipos de alumnos: los que tenían mucha dificultad en el dominio de las operaciones, los que mostraban una comprensión media y tenían la habilidad del uso del modelo, y los que habían avanzado en la comprensión de los contenidos y eran capaces de resolver situaciones problemáticas aun sin el modelo concreto de bloques.

e) Realización de 16 entrevistas individuales videograbadas, cuyo objetivo fue conocer las voces de los actores en relación con la actividad desarrollada durante la fase de enseñanza y verificar así la información a partir de los sujetos de estudio.

Descripción del modelo de enseñanza

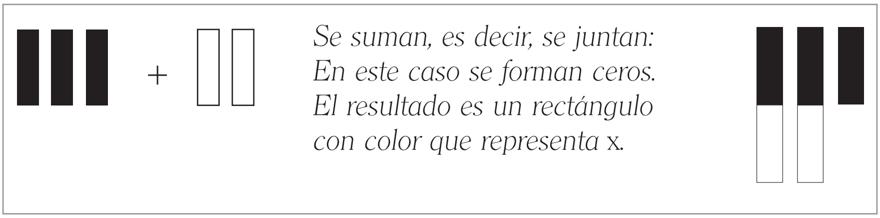
El modelo de bloques es un modelo de los llamados concretos; estos modelos han sido fundamentados por estudios histórico-epistemológicos (Glaeser, 1981; Freudenthal, 1983; Fischbein, 1987; Sfard, Henfendehl-Hebeker, 1991; Gallardo, 1994 y 2002). El modelo de bloques es una representación de los números enteros; su fundamento se basa en su similitud con objetos (bloques) que son familiares para los alumnos o que les pueden resultar más llamativos. A partir de su experiencia con el modelo es como pueden conjeturar, justificar o "dar sentido" a sus reglas de funcionamiento y, posteriormente, extenderlas por analogía al conjunto de los números enteros. Éste es un modelo de neutralización o de equilibrio denominado así por Janvier (1985), porque existen entidades opuestas que se neutralizan entre sí.

Para el caso de esta investigación, el *modelo de bloques algebraicos* (R. Dreyfous, 1996) se utiliza para representar los números, operaciones numéricas y expresiones algebraicas; los bloques con color representan las cantidades positivas y los bloques sin color representan cantidades negativas, por ejemplo:



En este modelo, la acción de sumar se representa al unir o juntar los bloques correspondientes, esto es, bloques sin color y con color. Si en este enlace aparecen simultáneamente bloques de ambos tipos, éstos se aparean convirtiéndose en elementos nulos (principio fundamental del modelo).

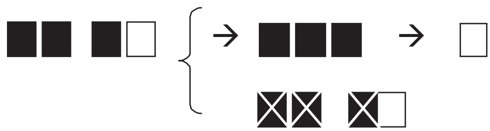
A manera de ejemplo, considérese la adición $3x + (-2x) = x$



La acción de restar significa quitar los elementos que constituyen el sustraendo del minuendo, tachando con una cruz los bloques eliminados. La sustracción entendida como *completar a* no aparece. La representación alternativa del número ($3 = 3 + 1 - 1$) cobra relevancia para la resta cuando el sustraendo es mayor que el minuendo. Esta representación alternativa del número exige tener siempre en mente que $a = a + 0 = a + 0 + 0 = ...$ El cero juega un papel dual, como elemento nulo y como elemento compuesto por opuestos. Esta *dualidad del cero,* de ser nada o ser totalidad, lo convierte en un elemento privilegiado que ayuda o dificulta el proceso de compresión de los términos y números negativos. Como ejemplo, se elige un caso en que el sustraendo es mayor que el minuendo: $2 - 3 =$. Se representan los números en el modelo: ■■ – ■■■.

Se observa que a 2 no se le puede quitar 3. Por lo que se recurre a sumar un cero al 2. Se obtiene la representación alternativa: $2 + 0$ ■■ ■□

A continuación, ya puede efectuarse la sustracción: quitando 3 cuadros con color o tachando los cuadros que se deben quitar. Se obtiene un cuadro sin color, que representa el -1.



Nótese que, en el caso de la sustracción, se puede prescindir de la representación del sustraendo.

Tópicos de adición y sustracción de números signados del protocolo de la entrevista

Después de haber concluido hasta el inciso *d* de la secuencia metodológica anteriormente mencionada, se procedió a entrevistar de manera individual a los 16 estudiantes del grupo (inciso *e*). Los tópicos trabajados durante los diálogos de la entrevista fueron los siguientes:

1. Identificar números positivos y negativos representados con el modelo de bloques (MB).
2. Resolver vía el lenguaje aritmético-algebraico operaciones de adición y sustracción representadas en el MB.
3. Resolver adiciones y sustracciones expresadas en lenguaje aritmético-algebraico.
4. Simplificación de expresiones algebraicas [$ax \pm bx \pm c =$; *a, b, c enteros*].
5. Sustitución de valores numéricos cualesquiera en expresiones algebraicas.
6. Resolución de ecuaciones lineales [$ax \pm b = c$; $ax \pm b = cx \pm d$; *a, b, c enteros*].

Análisis de los hechos presentados con el uso del modelo

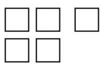
Como ya se dijo, en este artículo se informan únicamente los resultados obtenidos de las entrevistas con los estudiantes del llamado nivel bajo (o de bajo rendimiento escolar) que tuvieron los mayores logros en toda la secuencia metodológica del estudio, y se destaca un hecho relevante: los sujetos de este nivel proporcionan una versión amplificada de los hechos observados con los niños de los niveles más altos. Esta versión nos brinda nuevos elementos de análisis respecto a los cambios conceptuales que median entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

A continuación se muestran, a través de los diálogos más representativos de las entrevistas, los ítems donde los dos alumnos seleccionados (Daniel y Pamela) manifiestan dificultades. Lo expresado por Daniel, a quien en adelante denominaremos como D, y por Pamela, a quien en delante denominaremos como P, aparece entre comillas "...". Las interpretaciones del entrevistador, a quien en adelante denominaremos como E, están contenidas dentro de los paréntesis (...).

En la simbolización de números representados con el MB (tópico 1), ambos estudiantes verbalizan +3 y −12 como: "tres positivo" y "doce negativo". Se dio la transferencia del MB al lenguaje simbólico. Reconocimiento de los números signados vía la característica cualitativa del modelo al verbalizar: "cuando los bloques tienen color son positivos; y cuando no tienen color son negativos".

En operaciones de adición y sustracción representadas en el MB (tópico 2), surge una ambigüedad[3] entre el número negativo y la operación de sustracción. A continuación se muestran cinco situaciones donde se presenta la ambigüedad mencionada:

Situación 1 Daniel

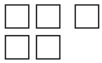
 Agregar  La escribe como: $(-5) + (+7) =$

D: "Pero también se puede... siete menos cinco... es igual a dos, es lo mismo."

(Lee la expresión de derecha a izquierda y transforma la adición en una sustracción. Así el número signado (–5) se confunde con el sustraendo (5) de 7 – 5 (TC2).)

[3] Se entiende por ambigüedad aquello que admite varios significados o distintas interpretaciones y que, por consiguiente, constituye un motivo de duda o confusión.

Situación 1 Pamela

Ante la adición:  agregar , ella escribe: $-5 + 7 =$

P: "Es como si tuviera siete menos cinco igual a dos."

(Ella lee la expresión de derecha a izquierda y transforma la adición en una sustracción. Obsérvese que la equivalencia: $(-5) + (+7) = 7 - 5$ es correcta. Sin embargo, el primer miembro representa una adición de números signados y el segundo una sustracción de números naturales. De hecho, P da sentido de sustraendo al número signado -5 (TC2).)

Situación 2 Daniel

Ante la sustracción:  – 

D: (Escribe): $8 - 4 = 4$
E: ¿Estás seguro?
D: (Agrega signos y paréntesis): "$+ 8 - (+4) = 4$ ... es lo mismo que acá ($8 - 4 = 4$)... ocho menos cuatro igual a cuatro."

(Identifica como equivalentes las expresiones: $+ 8 - (+ 4) = 4$ y $8 - 4 = 4$. El número signado $(+4)$ ocupa el lugar del sustraendo (4) en $8 - 4 = 4$ (TC2). Este hecho lo conduce a una sustracción de números naturales y no a una sustracción extendida a los números signados.)

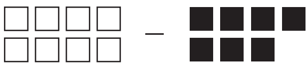
Situación 2 Pamela

Ante la sustracción: 

P: (Escribe): + 8 – + 4 = 4
E: ¿Estás segura?
P: "Es lo mismo que ocho menos cuatro, porque este signo [+8 – + 4] es siempre menos, porque menos por más es menos."

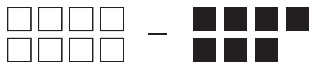
(Considera los signos – + como un solo signo: –, pues recurre a la regla de los signos (–) (+) = –. Esta regla perteneciente al dominio multiplicativo la aprendió sin comprenderla y la aplica mecánicamente en el dominio aditivo. El número signado (+4) se convierte en el sustraendo verbalizado "menos cuatro" vía la extrapolación de una regla escolar (TC2 y TC6). Regresa a una sustracción de naturales. No extiende el dominio numérico.)

Situación 3 Daniel

Ante la representación: 

D: (Escribe): –8 – (+7) = –1.
E: ¿Seguro?
D: "¡Ah! me equivoqué..." (recurre al MB) ... (escribe): – 8 – 7 = –15...

Situación 3 Pamela

Ante la representación: 

P: (Escribe): $-8 - (+7) = -1$
E: ¿Segura?
P: "Sí, es como si tuviera menos 8 más 7, es igual a menos 1."
E: ¿Qué operación escribiste?
P: "Una sustracción."
E: ¿Por qué no hiciste la sustracción?
P: "No puedo restar, porque el 7 es mayor que el negativo 8, por eso hice una suma." (escribe): $-8 + 7 = -1$.
E: ¿Por qué $-8 + 7$ es igual a -1?
P: "Porque -8 es igual a -1 y -7 los dos forman el menos 8" (escribe):
$-8 + 7 = -1$ $-7 + 7 = -1$...

(De hecho, ella aprendió, vía el MB, a descomponer los números y a "hacer ceros". En este caso, transfiere lo aprendido a la sintaxis y forma el cero: $-7 + 7 = 0$.)

A partir del MB, los estudiantes escriben: $-8 - (+7) = -1$. D en un principio escribe el mismo resultado incorrecto que P. Da la impresión de que, independientemente de que el signo "más" ocupe el lugar del signo unario o signo binario, al menos visualmente tiene mayor fuerza o significado para los estudiantes, por ello recurren a él para realizar la operación. Al respecto, Kirshner (1989) señala que lo visual se aprende más fácilmente con un reconocimiento superficial, sin tener que comprender su verdadero significado.

Otro hecho sobresaliente de la tercera situación es que la expresión escrita: $-8+7=$, considerada erróneamente por P como igual a: $-8-(+7)=$, nos ha permitido descubrir que ella acepta la adición de números signados en el caso de: $-8+7=-1$. Esta aceptación fue posible gracias a que introdujo el cero como la pareja de opuestos: $-7+7=0$. En este caso, la dualidad del cero ha contribuido a extender la adición más allá de los números naturales. Lo anterior lleva a afirmar que reconoce números signados, pues verbaliza: "negativo ocho"; números relativos, ya que escribe: "$-7+7$" y también el número aislado: "-1", todos ellos sentidos intermedios del número negativo y, por consiguiente, manifestaciones de la tendencia TC2.

Situación 4 Daniel

Ante la representación: 

D: (Escribe): 10 + ... 10 – 4 = 6.
E: ¿Estás seguro?
D: (Escribe): 10 – (–4) = 6 ... “no...” (escribe): 10 – (–4) = 14
E: ¿Cómo hiciste para obtener ese resultado?
D: Cuando están dos signos – y –, se convierten en un “más”, entonces es 10 + 4 = 14.

(Se observa que distingue el signo del número (unario) y el signo de operación (binario), recuperado del MB. Una vez que se ha desprendido del MB, y se encuentra ante la expresión sintáctica: 10 – (–4) =, aplica la ley de los signos (–) (–) = +, y desaparece la sustracción (TC6).)

Situación 4 Pamela

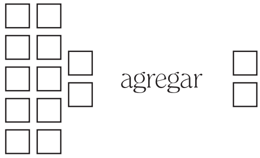
Ante la representación: 

P: (Escribe): 10 – 4 = 6
E: ¿Estás segura?
P: “No sé (escribe)... 10 – 4 = 6...”
E: ¿Por qué dudas? ¿No estás bien?
P: “Le faltan los paréntesis, ¿no?”
E: Escríbelos.
P: 10 – (–4) =, “Es que este signo [10 – (– 4) =] es de operación y el otro [10–(–4)=] es del número”... “Cuando hay dos signos como estos [10–(–4)=] es como si se sumara”.
E: Escribe eso que estás diciendo.
P: “10 – (–4) = 10 + 4 = 14 ... el resultado es catorce.”

(Comportamiento análogo a D (TC6).)

Situación 5 Daniel

En el caso de la adición:

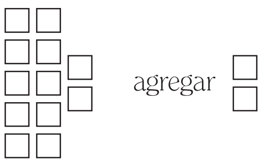


D: (Escribe): $-12 + (-2) = -14$
E: ¿Seguro?
D: "No, no es cierto, es... $-12 + (-2) = 10$"
E: ¿Seguro?
D: "No, está mal, es... $-12 + (-2) = -\ 10$
... $-12 - 2 = 10$"
E: ¿Ahora sí estás seguro?
D: "¡Ya sé! ¡Doce negativo y dos negativo son catorce negativo! (escribe): $-12 + (-2) = -14$... estaba bien, maestro" (se refiere a la primera expresión que escribió).

(El estudiante se olvidó del MB y partió de la expresión sintáctica para resolver la expresión dada. D puede estar seguro una vez que verbaliza los números en lenguaje natural. Antes de esto, realiza sustracciones erróneas. El número signado -2, lo convierte en sustraendo en $-12-12=10$ (TC2).)

Situación 5 Pamela

En el caso de la adición:



P: (Escribe): $-12 - 2 = -14$
E: ¿Segura?
P: "Sí, es doce negativo y dos negativo, se suman y da menos catorce... está bien, maestro."

(P inhibe el signo binario al escribir la expresión. Lo recupera al recurrir al MB (TC2).)

A continuación, se informa lo más relevante de la actuación de los dos estudiantes al resolver operaciones en el nivel sintáctico, es decir, sin la presencia explícita del MB (tópico 3); para ello, se presentan tres situaciones:

Situación 6 Daniel

Observa la expresión: (+8) + (–6) =

D: (Escribe): (+8) + (–6) = 14
... corrige: (+8) + (–6) = 2
E: ¿Por qué escribiste catorce?
D: "Es que me equivoqué, pensé que se estaba sumando, pero no, se están restando..."

(D prioriza en un principio la adición sobre la sustracción (TC2), en un segundo momento, D le da sentido de sustraendo al número signado –6, (TC2).)

Situación 6 Pamela

Observa la expresión: (+8) + (–6) =

P: (Verbaliza): "catorce..., menos catorce... ¡no! ... catorce."
E: ¿Segura?
P: "Sí, porque este número es negativo (señala el –6) y el más dice..., ¡ah, no! es positivo... no me acuerdo... ¿Puedo hacerlo con los cuadritos?"

(Para P predomina la operación de adición sobre la sustracción (TC2). A continuación P utiliza el MB y llega al resultado correcto +2.)

Situación 7 Daniel

Ante la expresión: (+8) – (+10) =

D: "Es ocho menos diez..." (escribe): –2
E: Explícame cómo lo hiciste.
D: "Bueno, es ocho y... menos por más es menos... ocho menos diez es dos negativo."

(D le da sentido de sustraendo al número (+10), vía la regla multiplicativa de los signos (–) (+) = – (TC2 y TC6).)

Situación 7 Pamela

Ante la expresión: (+8) – (+10) =.

P: (Escribe): +8 – 10 = 2... *"¡No!, es menos dos"* (corrige el resultado): +8 – 10 = –2.
E: ¿Estás segura?
P: "Sí, porque es como si tuviéramos una resta, diez menos ocho, el resultado es dos, pero como este número (–10) es negativo y es más grande que ocho, el resultado es negativo."

(Nótese que P consideró una sustracción de números naturales expresada verbalmente como: "diez menos ocho" y a la vez asoció el mismo signo menos al número diez en la oración escrita: +8 – 10 = –2. De hecho, llevó a cabo dos lecturas de la misma expresión, una de derecha a izquierda para la sustracción "diez menos ocho" y otra de izquierda a derecha en la que recupera el número 10 como número negativo, es decir, como –10 (TC2).)

Es importante señalar que P interpreta el único signo menos de (+8)–(+10) = considerando que tiene naturaleza dual, es decir, advierte que el signo está vinculado al número y también lo considera como signo de operación y cree que este hecho puede ocurrir simultáneamente.

Cuando se tienen expresiones sintácticas donde hay más de dos términos, aparecen problemáticas muy similares en ambos estudiantes (tópico 3):

Situación 8 Daniel

En la expresión: $(-7) - (+3) + (-14) - (-10)$

D: "Siete y menos tres son cuatro, más catorce son dieciocho, menos diez son ocho."

(Se dio una fuerte centración en los signos binarios y se inhibieron los signos unarios (TC8).)

Situación 8 Pamela

En la expresión: $(-7) - (+3) + (-14) - (-10)$

P: "Menos veintiocho" (escribe): -28
E: Explícame cómo lo hiciste.
P: "Porque menos siete más tres son menos cuatro, menos cuatro y menos catorce son dieciocho negativo y menos diez son veintiocho negativo."

(Se dio una fuerte centración en los signos unarios y se inhibieron los signos binarios (TC8).)

La centración de los estudiantes en el signo binario (D) o unario (P) representó un obstáculo para poder resolver las operaciones de manera correcta.

En la simplificación de expresiones algebraicas (tópico 4) D y P no manifestaron dificultad alguna para resolver las situaciones propuestas.

En la sustitución de valores numéricos en expresiones abiertas (tópico 5), aparece de nuevo una tendencia inhibitoria con respecto a la operación de sustracción, como se puede observar en el siguiente diálogo de los dos estudiantes.

Situación 9 Daniel

Llenar la tabla: con números cualesquiera

x	x − 8

D: "¿Pueden ser los números que yo quiera?"
E: Sí.
D: "10, 12, 9 y 15." Hace la sustitución: "10 − 8 = 2; 9 − 8 = 1; 12 − 8 = 4 y 15 − 8 =7."

(Suele elegir números que logran que el minuendo sea mayor que el sustraendo, cuando tiene que sustituir valores en tablas. Posiblemente evitó trabajar con negativos (TC8).)

Situación 9 Pamela

Llenar la tabla: con números cualesquiera

x	x − 8

P: "¿Le pongo los números que quiera?"
E: Sí, los que quieras.
D: "3, 9, 8 y 7." Hace la sustitución: "Aquí [x − 8 =] sería tres menos ocho... ¡no!... no se puede. Voy a cambiar por otro número, porque no se puede restar ocho de tres..."

(Inhibición de la operación de sustracción cuando el sustraendo es mayor que el minuendo (TC8).)

Es muy relevante mencionar que Pamela presenta un evitamiento, incluso con el positivo 3, por tratarse de un número menor que 8 que permitiría la operación $3-8=$ y exclama: "No se puede". Por lo que es posible afirmar que, durante el proceso de sustitución de valores en expresiones abiertas, Pamela no extiende la sustracción a pesar de que lo había logrado en el ámbito numérico en la situación 7: $(+8) - (+10) = -2$. Así, al no aceptar que x puede tomar cualquier valor, P manifiesta que no reconoce a la variable como número general en $x - 8 =$.

En la resolución de ecuaciones (tópico 6), los dos estudiantes siempre usaron el mismo procedimiento de sumar o restar el inverso aditivo en ambos miembros de la ecuación. Éste fue el método que se les enseñó para resolver ecuaciones en el MB. Se mostró así que los estudiantes reconocieron la igualdad en su carácter dual, es decir, no solamente como igualdad aritmética, que significa realizar una operación y obtener un resultado, sino también como una relación de equivalencia entre ambos miembros de la igualdad (C. Kieran, 1980). Sin embargo, ante la ecuación: $6 - x = 12$, que posee un coeficiente negativo, se equivocaron, como se puede verificar a continuación:

Situación 10 Daniel

Ante la expresión: $6 - x = 12$

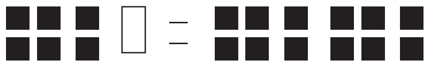
D: (Escribe): $6 - x = 12$... $6 + 6$... *"¡No!... debe ser negativo."*
E: ¿Negativo?
D: (Continúa): $6 - 6 - x = 12 - 6$
$x = 6.$
E: ¿Ése es tu resultado?
D: "No pongo el menos de la equis, porque se invierte para que no sea negativa."

(Se refiere a la resolución de esta ecuación vía el modelo concreto.)
(Inhibición de la solución negativa (TC8).)

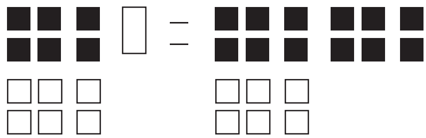
Situación 10 Pamela

Ante la expresión: $6 - x = 12$

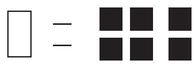
P: (Escribe): $6 - x = 12$...
$6 + 6 - x = 12 + 6$... "me queda... ¡Mejor lo resuelvo con los cuadritos!"
E: Adelante.
P: (Representa la expresión con el MB)



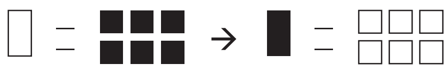
"...tengo que quitarle seis positivos... le agrego seis negativos en los dos lados para quitarle los seis positivos..."



"Si los junto, me quedan..."
...(escribe): $x = 6$... "ya, maestro."



E: ¿Entonces $x = 6$?
P: "Sí... pero queda... menos x."
E: ¿Por qué dudas?
P: "Es que le falta el signo a la x..." (escribe): $-x = 6$...
E: ¿Ésa es la solución?
P: "Sí... pero... ¿queda menos x?
E: ¿Tú qué crees?
P: "Sí, ya me acordé... se voltean los cuadritos... (el MB)
... queda... $x = -6$..."



E: ¿Por qué dudas?
P: "Porque la x ahora es positiva, pero el seis sigue siendo negativo."

(Tiene dificultad para reconocer un negativo como solución de la ecuación, cuando en algunas situaciones (tópico 2, situación 3; tópico 3, situación 7) ya había reconocido números negativos aislados como resultados de operaciones, pero no como un posible valor para la incógnita.)

Es importante señalar que al resolver la ecuación: $-x = a$, donde a es un número natural, muchos estudiantes se confunden entre el signo menos delante de la x y el signo menos de la solución: $-a$. Las dificultades para resolver este tipo de ecuaciones ya han sido apuntadas por autores como Vergnaud (1989); Herscovics y Linchevski (1991); A. Cortés (1993); A. Gallardo (1994) y J. Vlassis (2001, 2002), entre otros. Vergnaud (1989) piensa que la dificultad proviene de la aparición de la solución negativa, Herscovics y Linchevski (1991) afirman que la alta incidencia de este error indica que la dificultad no es idiosincrásica, sino que refleja obstáculos cognitivos insospechados. Definen esta situación como una "tendencia a ignorar el signo que precede al número" y llegar a la solución $x = a$.

Cortés (1993) señala que, en este tipo de ecuación, la incógnita considerada por el estudiante no es x, sino $-x$. Gallardo (1994) explica que, para algunos estudiantes, la solución no puede ser negativa, debería aparecer $- -a$ para que esto sucediera. Encontró en su investigación que un solo estudiante visualizó $-x = a$, como $-1 \bullet x = a$ y verbalizó: ¿Cuál es el número que multiplicado por -1 nos da a? Vlassis (2001) afirma que la verbalización anteriormente mencionada del estudiante conduce a expresar la ecuación como: "$-x$ significa la necesidad de tomar el opuesto del número x; así que hay que preguntarse ¿cuál es el número cuyo opuesto es a? Esta perspectiva posibilita pensar que x pueda ser un número negativo". En Vlassis (2002), la autora afirma que los obstáculos pueden deberse a que en la resolución de esta ecuación intervienen múltiples conceptos relacionados entre sí. Por ejemplo, explica que los estudiantes deben ser capaces de desprender el signo menos de la literal x, es decir, deben considerar el signo menos vinculado al valor numérico de la literal y no atado a la letra en sí. Para la mayoría de los estudiantes $-x$ es considerada como el prototipo del número signado, así como el número -18.

Volviendo a nuestro artículo, conviene resaltar que el hecho de considerar la igualdad como equivalencia de expresiones permitió anteriormente que D y P resolvieran ecuaciones cuyas soluciones fueron siempre positivas. Sin embargo, ante una solución negativa ($x = -6$), descodifican la x como positiva y al parecer olvidan la equivalencia de la igualdad, hecho reconocido en las tareas precedentes. El valor negativo desestabilizó un conocimiento que parecía consolidado en ellos y los condujo a eludir la solución negativa.

DISCUSIÓN FINAL

Es posible concluir que, a través del MB utilizado en las entrevistas clínicas individuales, se revelaron hechos que permiten confirmar que los modelos de enseñanza no son paradigmáticos, debido no sólo a las contradicciones intrínsecas surgidas de su propia construcción, sino también, ineludiblemente, a las tendencias cognitivas de los estudiantes. Reiteramos de nuevo que, en este estudio, el MB se utilizó como una herramienta de análisis teórico para identificar los procesos cognitivos que los estudiantes mostraban vía sus acciones en el modelo concreto y no para enseñar, que es como se ha utilizado muchas veces en otros momentos. También recurrimos en las entrevistas a la representación de tablas de valores en el caso de expresiones algebraicas abiertas (tópico 5) y a la contraparte sintáctica de un modelo con semántica explícita, es decir, al lenguaje aritmético-algebraico (tópicos 3, 4 y 6).

Llama la atención en este estudio que, en la mayoría de las adiciones y sustracciones representadas en el MB (tópico 2), Daniel y Pamela recurrieron únicamente al modelo para plantear la expresión sintáctica. Sólo en la situación 3 [(–8) + (+7) =] Daniel verificó su resultado vía el MB. En lo que respecta al lenguaje aritmético-algebraico (tópico 3), Pamela recurrió al MB para resolver la expresión sólo en la situación 6 [(+8) + (–6) =]. Por lo tanto, se puede afirmar que ambos estudiantes prefirieron en sus acciones el lenguaje simbólico al modelo concreto.

Del análisis sistemático de los diálogos de las entrevistas concluimos que la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía el modelo concreto de bloques puede lograrse cuando:

1. Se alcanzan los diferentes niveles de conceptualización de los números negativos propuestos por Gallardo (1994), para que los alumnos puedan dar sentido a operaciones, expresiones algebraicas y ecuaciones en el ámbito de los enteros (TC2).
2. La sustracción de enteros debe ser comprendida en todos los casos por los estudiantes antes de enseñar la multiplicación vía regla de signos. Ello evitará extrapolaciones erróneas (TC6).
3. La igualdad se entiende como equivalencia de expresiones (TC8).
4. Las reglas aprendidas de la semántica del MB se extrapolan a la sintaxis del lenguaje algebraico (TC2). Por el contrario, la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros no se alcanza cuando:
5. Existe la centración, en el signo binario y a su vez inhibición del signo

unario, estos hechos revelan el nivel más primitivo del número negativo: el sustraendo (TC2 y TC8).

6. Se presenta la no aceptación de la sustracción de enteros en todos los casos, lo que impide concebir el número general en expresiones abiertas (TC8).
7. Aparece la extrapolación incorrecta de reglas aprendidas de la semántica del MB a la sintaxis del lenguaje algebraico (TC2)

De lo anterior, se concluye que surgieron tendencias que favorecieron y tendencias que obstruyeron la extensión numérica.

Conviene resaltar por su importancia la actuación de Pamela en el caso 3, tópico 2, donde en una situación sintáctica ($-8 + 7 =$) acepta una adición de números signados gracias a que sustituye -8 por $-7 - 1$ y llega a $-8 + 7 = -7 - 1 + 7 = -1 - 7 + 7 = -1$. Esta descomposición del número -8 para lograr obtener el opuesto de 7 revela que posee una concepción dual del cero, generalizada a partir del MB. Por su parte, Daniel concibe adiciones y sustracciones con números signados, pero siempre atados a la representación del modelo; o bien recurre en la sintaxis a la regla multiplicativa de los signos que lo conduce fuera de la semántica del dominio aditivo.

Ello pone al descubierto la importancia que tiene el análisis a profundidad de las actuaciones de uno solo o de varios sujetos para lograr la comprensión de un tema matemático tratado en un nivel más grupal e incluso en la propia aula.

Una de las vertientes por las que continuará nuestra investigación será mostrar el uso de éste y otros modelos, teniendo como telón de fondo el marco teórico elegido. Autores como Glaeser (1981) ya han advertido que no es posible encontrar un modelo unificador para el ámbito aditivo y para el multiplicativo simultáneamente.

Quedan por resolver las siguientes preguntas abiertas: al cambiar el modelo de enseñanza, ¿cómo se transforman las tendencias cognitivas del estudiante? ¿Qué ocurre en el caso de tendencias cognitivas extremas? Confrontaremos, además, ¿qué sucederá al cambiar "los modelos concretos" por el uso de modelos de enseñanza en entornos tecnológicos de aprendizaje? y ¿qué cambios de índole cognitiva y epistemológica experimentarán los estudiantes?

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el Conacyt. Proyecto de Investigación: 44632. Procesos de abstracción y patrones de comunicación en aulas de matemáticas y ciencias con entornos tecnológicos de aprendizaje: estudio teórico-experimental con alumnos de 10 a 16 años de edad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bell, A. (1982), "Looking at Children at Directed Numbers", *Mathematics Teaching,* p. 100.

Bruno, A. y A. Martinón (1994), "La recta en el aprendizaje de los números negativos", *Suma,* vol. 18, pp. 39-48.

Cortés, A. (1993) "Analysis of Errors and a Cognitive Model in the Resolving of Equations", *Proceedings of XVII Annual Meeting of PME,* Tsukuba, Japón, Universidad de Tsukuba, vol. 1, pp. 146-153.

Dreyfous, R. (1996), "Manual de lecciones de algeblocks", First Books Publishing of PR.

Filloy, E. (1999), *Aspectos teóricos del álgebra educativa, Investigaciones en Matemática Educativa,* México, Iberoamérica.

Fischbein, E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach,* Holanda, Reidel.

Freudenthal, H. (1973), "Didactical Phenomenology of Mathematical Structures", Dordrecht/Boston/Lancaster, Reidel.

—— (1983), *Mathematics as an Educational Task,* Dordrecht, Reidel, capítulo XII.

Gallardo A. (1994), "Negative Numbers in Algebra. The Use of a Teaching Model", *Proceedings of the XIX PME,* Universidad de Lisboa, vol. II, pp. 376-383.

—— (2002), "The Extension of the Natural Number Domain to the Integers in the Transition from Arithmetic to Algebra", *Educational Studies in Mathematics,* Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, vol. 49, pp. 171-192.

Glaeser, A. (1981), "Épistémologie des nombres relatifs", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 2, núm. 3, pp. 303-346.

Hefendehl-Heberker, L. (1991), "Negative Numbers: Obstacles in their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs", *For the Learning in Mathematics,* vol. II, núm. 1, pp. 26-32.

Hernández, A. (2004), *El modelo concreto de bloques: un modelo de enseñan-*

za para alumnos de bajo desempeño académico en álgebra, tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional, México.

Herscovics, N. y L. Linchevski (1991), "Pre-algebraic Thinking: Range of Equations and Informal Solution Processes Used by Seventh Graders Prior to Any Instruction", en F. Furinghetti (ed.), *Proceedings of the XV Annual Meeting of PME,* Assissi, Italia, vol. 3, pp. 173-180.

Janvier, C. (1985), "Comparison of Models Aimed at Teaching Signed Integers", en *Proceedings of the Ninth Meeting of the PME,* Países Bajos, Universidad Estatal de Utrecht, pp. 135-140.

Kieran, C. (1980), "The Interpretation of the Equal Sign: Symbol for an Equivalence relation *vs.* an Operator Symbol", en R. Karplus (ed.), *Proceedings of the Fourth Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Berkeley, California, University of California, pp. 163-169.

Kirshner, D. (1989), "The Visual Syntax of Algebra", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 20, núm. 3, pp. 274-287.

Piaget, J. (1933), *La representación del mundo en el niño,* Madrid, Morata.

Sfard, A. (1991), "On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects, as Different Sides of the Same Coin", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, pp. 1-36.

Ursini, S. y M. Trigueros (2001), "A Model for the Uses of Variable in Elementary Algebra", en *Proceedings of the Twenty-five International Conference Psychology of Mathematics Education,* pp. 327-334.

Vergnaud, G. (1989), "L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction á l'algèbre. Construction des savoirs", Coloquio Internacional Obstacle Epistémologique et Conflict Socio-Cognitif, CIRADE, Montreal.

Vlassis, J. (2001), "Solving Equations with Negatives or Crossing the Formalizing Gap", en *Proceeding of the XXV International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Ultrech, Países Bajos, Freudenthal Institute, vol. 3, pp. 375-382.

—— (2002), "About the Flexibility of the Minus Sign in Solving Equations", en *Proceeding of the XXVI International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Norwich, vol. 4, pp. 321-328.

DATOS DE LOS AUTORES

Abraham Hernández
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav),
Instituto Politécnico Nacional, México
ahernandez@cinvestav.mx

Aurora Gallardo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav),
del Instituto Politécnico Nacional, México
agallardo@cinvestav.mx