Se cambian fichas por estampas

Un estudio didáctico sobre la noción de razón "múltiplo" y su vinculación con la multiplicación de números naturales[1]

David Block

A la memoria de Guillermina Waldegg

Resumen: Se fundamenta una secuencia didáctica para el aprendizaje de ciertos aspectos de la noción de razón y se presentan los resultados de su aplicación en un grupo de tercer grado de escuela primaria. Se argumenta el interés de vincular el estudio de la multiplicación de números naturales con el de las razones y se analizan algunos aspectos de la relación entre el "operador función" y la noción de razón constante.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria; razón, multiplicación.

Résumé: On justifie une séquence de situations didactiques pour l'apprentissage de certains aspects de la notion de rapport et on présente les résultats de son application dans une classe d'école primaire (CE). On argumente l'enrichissement que subi l'étude de la multiplication lorsqu'on considère au même temps l'étude des rapports. Finalement, on dégage quelques éléments relatifs aux liens que l'opérateur multiplicatif fonctionnel entretient avec la notion de rapport constant.

Mots clés: Enseignement des mathématiques à l'école primaire. Rapport; multiplication.

Abstract: A didactical sequence for the learning of some aspects of the ratio notion is justified and the results of its application in a third grade class of elementary school are presented. The benefits of relating the study of multiplication of natural numbers with the study of ratio are emphasized. Finally, some elements for the analysis of the links between constant ratio and multiplicative operator are proposed.

Keywords: Mathematical Education in the primary school; ratio; multiplication.

Fecha de recepción: 5 de mayo de 2006.

[1] Agradezco a Patricia Martínez, Margarita Ramírez, Laura Reséndiz y los árbitros por sus valiosos comentarios a la versión preliminar de este artículo.

INTRODUCCIÓN

La noción de razón geométrica –que en lo sucesivo llamaré simplemente *razón*– se define con frecuencia en los manuales escolares como un cociente o como una fracción. Se dice, por ejemplo, "la razón 2 a 3 es igual a 2/3 o a 0.66". Cabe preguntar ¿qué aporta esta noción a los conceptos de fracción y cociente? ¿Por qué usar otro término, el de razón, cuando ya tenemos otros que aparentemente expresan lo mismo? La siguiente reflexión de Freudenthal (1983) sugiere una respuesta:

> El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, "**a** es a **b** como **c** es a **d**", sin anticipar que "**a** es a **b**" puede reducirse a un número o a un valor de magnitud **a/b**... La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas (o de valores de magnitud)... Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad, de bajar su estatuto lógico, a costa de la lucidez.[2]

Es decir, cuando la razón se expresa como una relación entre *dos* cantidades (2 es a 3) en el momento *anterior* a definirse con un solo número (2/3), es, sobre todo, cuando constituye un objeto distinto del cociente, del "número de veces" o de la fracción y cuando, como veremos, presenta un interés particular desde el punto de vista del aprendizaje.[3]

El funcionamiento de la razón, en cuanto relación entre dos cantidades aún no definida como un solo número, ha sido objeto de estudio desde dos perspectivas: la del desarrollo del pensamiento proporcional (*e.g.*, Noelting, 1980a y 1980b; Karplus, Pulos y Stage, 1983), y la del papel que desempeña en la construcción de otras nociones de matemáticas. Los trabajos de Brousseau (1998) sobre una génesis escolar de los números decimales y los estudios de Vergnaud (1988) sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas constituyen ejemplos, de distinta naturaleza, de esta última perspectiva.

El estudio que presentaré en este artículo se deriva de una investigación que se ubica también en la segunda perspectiva (Block, 2001, 2003, en prensa). Dicha

[2] La traducción es mía.

[3] En su tesis doctoral, Bosch (1994) plantea la pregunta anterior y analiza los capítulos de "Razones y proporciones" de los manuales escolares de aritmética del siglo XIX y principios del XX en busca de respuestas. "Pongamos la palabra función ahí donde dice razón", dice, para mostrar los posibles sentidos de la noción de razón.

investigación constó de varias fases: *1)* un análisis sobre la presencia, explícita e implícita, de la noción de razón en las matemáticas del currículo de la primaria; *2)* un estudio de los conocimientos sobre la noción de razón que 13 alumnos de cuarto a sexto grados de primaria pusieron en juego durante la resolución de un conjunto de problemas que les planteé en entrevistas individuales; *3)* el diseño de varias secuencias de situaciones didácticas sobre distintos aspectos de la razón, dirigidas a alumnos de tercero a sexto grados y basadas en los análisis anteriores, y finalmente *4)* el análisis de la aplicación de algunas de estas secuencias en distintos grados escolares. Estas cuatro fases se derivan de un acercamiento metodológico al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de una noción que se conoce como "ingeniería didáctica" (Artigue, 1995; Ramírez, 2003).[4]

En este artículo me centraré en la secuencia didáctica "Se cambian fichas por estampas", en la cual se abordan las razones "múltiplo", esto es, razones que son equivalentes a "números de veces" enteros, por ejemplo, "6 a 3" o "el doble". Intentaré mostrar el interés y la posibilidad de abordar problemas que implican un trabajo en el nivel de las razones, desde tercero o cuarto grados de la escuela primaria, cuando los alumnos están estudiando la multiplicación y la división con números naturales.

En el primer apartado del artículo, titulado "La problemática", presentaré algunos elementos teóricos sobre la noción de razón múltiplo y sus vínculos con la noción de multiplicación de números naturales. En el segundo, presentaré el diseño de la secuencia de situaciones "Se cambian fichas por estampas" y su justificación. En el tercer apartado, informaré los resultados de la aplicación de la secuencia con un grupo escolar de tercer grado. Estos resultados se basan en un análisis de los procedimientos de los alumnos observados a lo largo de la secuencia, su relación con las condiciones creadas intencionalmente a través de las situaciones y la inferencia de posibles aprendizajes. Cabe advertir que la secuencia didáctica fue de corta duración (cinco sesiones de clase de aproximadamente una hora, a lo largo de dos meses),[5] por lo que solamente es posible dar cuenta de aprendizajes que se manifiestan en el corto plazo y conjeturar, valorando las

[4] Algunas características de esta metodología son: la realización en el aula del proceso de enseñanza que se quiere estudiar; el desarrollo de estudios preliminares amplios que justifican las opciones que se toman en el diseño de las situaciones; los análisis previos de cada situación en los que se hacen explícitas sus características didácticas y los efectos que se esperan de éstas y, finalmente, la validación *interna* de los resultados, esto es, la validación mediante la confrontación de las hipótesis emanadas de los análisis previos con los datos recogidos durante la experiencia.

[5] En el anexo se presenta la secuencia de situaciones aplicadas.

condiciones particulares, la posibilidad de que otros aprendizajes se manifiesten más adelante.[6]

Por último, en las conclusiones sintetizaré y comentaré algunos de los resultados.

LA PROBLEMÁTICA

A continuación destacaré algunas características de las nociones de multiplicación de números naturales y de razón, así como de sus vínculos.

DESDE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

La multiplicación se suele introducir en segundo y tercer grado de la escuela primaria (alumnos de alrededor de 8 o 9 años) como una operación equivalente a la suma repetida, a partir de situaciones sencillas de proporcionalidad. A partir de problemas como *una caja tiene 5 canicas, ¿cuántas canicas hay en 3 cajas?*, los alumnos aprenden a establecer la equivalencia entre la suma 5 canicas + 5 canicas + 5 canicas y la multiplicación 3 veces 5 canicas.[7]

Vergnaud llama a esta clase de problemas "de isomorfismo de medidas"[8] e identifica en ellos dos tipos de relaciones multiplicativas, a las que denomina operador escalar y operador función (véase el cuadro 1).

La decisión de utilizar el operador función o el operador escalar para resolver un problema de este tipo, sobre todo cuando no se da el valor unitario (por ejemplo, en 2 cajas hay 10 canicas, ¿cuántas canicas hay en 3 cajas?), puede depender del tipo de números y de relaciones en juego (Vergnaud, 1988; Kuchemann, 1989). Por ejemplo, una relación no entera, como "2 cajas a 3 cajas", seguramente disuade la utilización del operador escalar 3/2.

[6] No obstante, debe tenerse en cuenta, como señala Ramírez (2003), que "la pertinencia de una experiencia didáctica no se valora únicamente a través de los aciertos visibles de los alumnos al realizar determinada tarea, sino también por la calidad de las confrontaciones entre sus conocimientos previos y el medio con el que interactúan y por las maneras en las que los niños, en la interacción, logran construir formulaciones explícitas de determinadas ideas, aunque éstas sean todavía precarias o formalmente incorrectas".

[7] Según Steeffe (1988), este paso no es trivial, supone concebir los grupos que se iteran (5 canicas) como nuevas unidades compuestas.

[8] Para distinguirla de otras clases, en particular, del producto de medidas.

Cuadro 1

× 5 canicas/caja ⟵ Operador función

	Número de cajas	Número de canicas
	1	5
Operador escalar ⟶ × 3	3	15

No obstante, se ha documentado que, en igualdad de circunstancias, los aprendices suelen usar más los operadores escalares que el operador función (*e.g.* Soto, 1995; Hart, 1988).[9] Algunos factores que podrían explicar el mayor nivel de dificultad conceptual del operador función son: *a)* el operador que se desprende de la suma repetida con la que los alumnos identifican la multiplicación es el escalar (retomando el ejemplo anterior, pasan de la expresión "5 canicas + 5 canicas + 5 canicas" a la expresión "3 veces 5 canicas" y no a "5 veces 3 cajas"); *b)* cuando las magnitudes son distintas, como en el ejemplo de cajas y canicas, el operador función conlleva un cambio de magnitud, por lo cual tiene dimensión (en el ejemplo es "5 canicas por caja" y no simplemente "5 veces").[10]

Pero, cuando se ponen en juego más de dos parejas de datos, es cuando surge la diferencia más importante entre ambos tipos de operadores: el operador función pone de manifiesto su carácter de constante ("×5 canicas/caja", en el ejemplo), mientras que los operadores escalares cambian con cada par de valores (de 3 a 4 es ×4/3, de 3 a 6 es ×2, etcétera).

Cuadro 2

× 5 canicas/caja

Número de cajas	Número de canicas
3	15
4	20
5	25
6	30

[9] En la literatura sobre el tema, a veces se confunden la noción de "valor unitario" y la de "operador función" (la primera se ve como el significado de la segunda). Sin embargo, desde la perspectiva de mi trabajo, es necesario distinguir la idea de "valor unitario", entendido como una relación entre dos cantidades $1 \rightarrow a$ de la idea de operador multiplicativo a, que interpreto como un factor constante.

[10] Cuando las magnitudes que se relacionan son de la misma naturaleza, por ejemplo longitudes en una situación de escala o dinero en una situación de impuestos, resulta que el

La identificación y el uso de esta constante (×5 canicas/caja) podría suponer una complejidad conceptual mayor que la que está implícita en el uso de los escalares, como parece manifestarlo el hecho de que los niños, y también los adultos no escolarizados, suelan no utilizar el operador función en sus cálculos, aun en los casos en que éste implicaría cálculos más simples que los requeridos al usar los operadores escalares (Soto, 1995).

El aprendizaje de la noción de multiplicación por un número natural a lo largo de la educación básica, visto en el marco amplio de las relaciones de proporcionalidad, supone entonces aprender a identificar, y a usar, los dos tipos de operadores.

A continuación veremos cómo estos operadores entran en juego desde la perspectiva más amplia de las situaciones de la noción de razón.

Desde el desarrollo de la noción de razón

Trabajar con razones implica, en primer lugar, pasar del estudio de las cantidades al estudio de las *relaciones* entre las cantidades. Este hecho explica, en buena medida, la complejidad inherente al trabajo con razones y también da cuenta de su importancia. Una de las metas de la enseñanza de las matemáticas en la educación básica, tanto en nuestro país como en otros, es que los alumnos sean capaces de coordinar dos variables para dar cuenta de la relación entre ellas, distinguir relaciones multiplicativas de las aditivas y poner en juego herramientas aritméticas adecuadas para manejar las relaciones.

La noción de razón se pone en juego, principalmente, en situaciones en las que hay cantidades que varían e interesa que la razón entre ellas se conserve, así como también en las situaciones en las que se compara el tamaño de dos o más razones distintas.[11]

Al primer tipo de situación, cantidades variables con razón constante, corresponden los problemas de proporcionalidad en los que se busca un valor faltante,

operador "función", al igual que el llamado "escalar", no tiene dimensión, es también un "número de veces".

[11] Cierto nivel de manejo *implícito* de la noción de razón subyace en diversas nociones matemáticas que los alumnos desarrollan desde temprana edad en la escuela y fuera de ella. Esto puede verse, por ejemplo, en la capacidad que los niños manifiestan precozmente de reconocer un dibujo que está "desproporcionado" o en los inicios de la construcción de la noción de medida –recordemos que una medida es la razón que guarda una magnitud con respecto a otra de su misma especie, llamada unidad.

como los que vimos anteriormente: la resolución del problema 3 cajas, 15 canicas, 6 cajas ¿cuánto?, supone comprender la idea de que, aun cuando las cantidades de cajas y de canicas varíen, la razón "x canicas por caja" es constante, así como la idea de que la razón entre las dos cantidades de cajas debe ser la misma que entre las cantidades de canicas correspondientes (a dos veces más cajas corresponden dos veces más canicas). Sin embargo, en este tipo de problemas la noción de razón suele permanecer implícita, excepto en los casos de error.[12] La igualdad de las razones, por su parte, se da por sentada, no se problematiza.

Un conocido ejemplo del segundo tipo de situaciones, la comparación de razones, es el siguiente: se preparan dos naranjadas *A* y *B* con las cantidades de agua y de jugo que se indican a continuación, ¿cuál sabe más a naranja?

Naranjada *A*		**Naranjada *B***	
Agua	Jugo	Agua	Jugo
1 vaso	2 vasos	2 vasos	3 vasos

En este caso, no se presupone que las razones sean iguales, como en el anterior. La razón es el objeto mismo de la pregunta mediante la propiedad de la "intensidad del sabor a naranja": la naranjada con más sabor no es ni la que se prepara con más vasos de jugo, ni la que se prepara con menos vasos de agua, sino la que lleva más vasos de jugo en relación con los de agua. Esta situación fue elegida por Noelting (1980a, 1980b) para llevar a cabo un amplio estudio sobre el desarrollo del pensamiento proporcional.[13]

La situación didáctica que diseñé para el estudio que aquí informo es una situación de comparación de razones. Para mostrar cómo entran en juego las razones en la resolución de los problemas de comparación, retomaré el análisis que Noelting realizó sobre su experiencia. Enseguida, precisaré la relación que guardan las razones con los operadores multiplicativos de los que hablé antes.

[12] No es infrecuente que, cuando estas razones no son múltiplo, por ejemplo de 3 cajas a 5 cajas, ante la dificultad de concebir un operador escalar que no es entero, alumnos de primaria y de secundaria regresen a una estrategia aditiva.

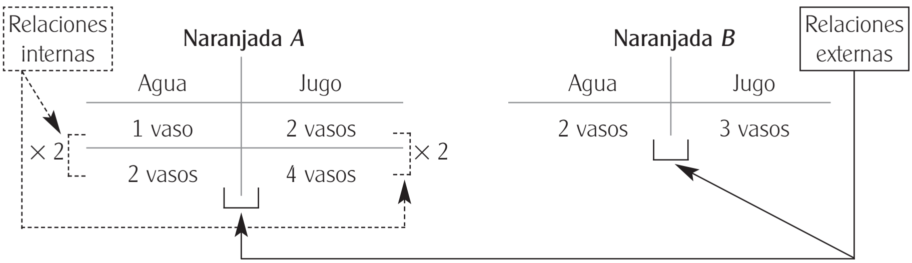
[13] Después de Noelting, otros autores han utilizado también este tipo de situación para fines similares, por ejemplo, Karplus, Pulos y Stage, 1983.

Las razones internas, las razones externas y el concepto de proporción

Retomando el ejemplo anterior, para decidir cuál naranjada, *A* (1*a*, 2*j*) o *B* (2*a*, 3*j*), sabe más a naranja, pueden considerarse las razones "agua-jugo" en cada naranjada: la *A* tiene el doble de jugo que de agua mientras que la *B* tiene menos de lo doble, por lo tanto la *A* sabe más a naranja. Llamaré razones *externas* a estas relaciones.[14]

Otro procedimiento consiste en comparar la razón *interna*[15] entre las dos cantidades de agua con la razón *interna* entre las dos de jugo: la naranjada *B* tiene el doble de agua que la naranjada *A* y tiene menos del doble de jugo que *A*, por lo tanto, *B* sabe menos a naranja.

Un procedimiento más para comparar, el cual también se basa en el uso de las razones internas, consiste en generar una o más parejas de cantidades equivalentes a las dadas para igualar un término, por ejemplo:



La nueva pareja (2*a*, 4*j*) se compara fácilmente con la pareja (2*a*, 3*j*), pues en las dos existe la misma cantidad de agua. La nueva pareja se generó duplicando los dos términos de la pareja original (1*a*, 2*j*), poniendo en juego, implícitamente, la propiedad según la cual, si se conservan las razones *internas*, la razón *externa* permanece constante (las razones externas son equivalentes), es decir, se obtienen naranjadas del mismo sabor.

En su estudio, Noelting destaca que cada una de las dos relaciones en jue-

[14] Noelting llama a estas razones *within* (intra), porque se establecen entre los dos componentes, agua y jugo, de una misma naranjada. En la literatura sobre el tema, se mencionan también como "razones *externas*", ya que se establecen entre dos magnitudes distintas, en este caso, agua y jugo. Yo utilizo esta última nomenclatura (externa, interna), porque la consideré mejor adaptada a la diversidad de razones que estudié.

[15] En el trabajo de Noelting, estas razones reciben el nombre de *between* (inter), pues se establecen entre dos "estados" de un mismo tipo de magnitud.

go, externa e interna, implican un proceso cognitivo distinto: las razones internas conllevan una asimilación de elementos similares, en cuanto incrementos o decrementos de un mismo elemento. Las razones externas implican una relación entre diferentes elementos con la construcción de un nuevo concepto (la intensidad del sabor a naranja). Una aportación de este trabajo fue mostrar que el concepto de proporción se construye a partir de la integración de ambos tipos de razón.

Las razones y los operadores

Cabe observar que los números pueden pasar con mucha facilidad y de manera casi imperceptible del papel de razones al de operadores multiplicativos: "lo doble", por ejemplo, a la vez que expresa la razón entre un vaso de agua y dos de jugo de la naranjada *A*, es un operador que se puede aplicar a distintas cantidades de agua para obtener las cantidades correspondientes de jugo, dando nuevas cantidades de naranjada con el mismo sabor que la naranjada *A*.

Estas razones *externas* corresponden, en la esquematización de Vergnaud que vimos antes, al operador función, mientras que las *internas* corresponden a los operadores escalares. El operador función, cuya complejidad específica ya se comentó, deja ver aquí otras facetas: aparece como un elemento de la noción de proporción, como expresión de aquello que es constante cuando las cantidades varían, como la expresión de una cualidad nueva –en la situación de la naranjada, la intensidad del sabor a naranja– y, finalmente, como un recurso que permite comparar razones.

La situación didáctica que analizaremos aquí busca favorecer, en el marco de la comparación de razones, un conocimiento de la multiplicación en sus dos papeles, como operador escalar vinculado a las razones internas y como operador función (o "constante de proporcionalidad") vinculado a la razón externa constante.

Por otra parte, hemos visto que una razón puede expresarse mediante dos cantidades ("6 es a 3") o mediante el número de veces que una cantidad es la otra ("dos veces"). El paso de la primera representación a la segunda, el cual no es trivial, constituye uno de los propósitos de la secuencia didáctica que aquí se presentará. Para referirnos a él hablaremos también de "la determinación del operador multiplicativo que subyace a una razón".

LA SECUENCIA DIDÁCTICA "SE CAMBIAN FICHAS POR ESTAMPAS"

Presentaré a continuación algunas características de la secuencia que consideré relevantes al diseñarla, así como su justificación. Estos elementos son producto de lo que suele llamarse *análisis previo* de la secuencia.

PROPÓSITOS DIDÁCTICOS

El propósito general de la secuencia que se presenta a continuación fue propiciar el desarrollo de procedimientos para comparar razones de manera integrada al estudio de la multiplicación y la división de números naturales, en tercero o cuarto grados de la escuela primaria. Los propósitos específicos fueron:

- Propiciar el paso de la comparación de cantidades a la comparación de razones entre cantidades, expresadas como reglas de cambio.
- Propiciar el desarrollo de dos procedimientos para comparar razones: *1)* la obtención de razones equivalentes con un término común mediante la conservación de las razones internas, y *2)* la expresión de la razón externa mediante un operador o "número de veces".

Partimos de la hipótesis de que la comprensión de la noción de razón puede progresar a la par con el desarrollo de los procedimientos numéricos que permiten manipular las razones: la suma iterada, la multiplicación (y la división) para generar razones equivalentes y la multiplicación en el papel de operador, como expresión de una razón constante.

LA SITUACIÓN BÁSICA

Se diseñó una situación en el contexto del intercambio o trueque[16] que pudiera funcionar con alumnos de tercero y cuarto grados como situación adidáctica[17] relativa a la noción de razón, es decir, la situación debía tener al menos las si-

[16] La situación se incluyó en el libro de texto de matemáticas de sexto grado (SEP, 2001).

[17] "Una situación relativa a un conocimiento es 'adidáctica' cuando por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permite o provoca un cambio de estrategia en el jugador" (Chevallard *et al.*, 1998, p. 215).

guientes características: implicar la comparación de razones, poder ser abordada por quienes no dispusieran aún del conocimiento en juego y permitir la retroalimentación de las decisiones de los alumnos mediante la validación empírica. La situación es la siguiente:

> *Se dice a los alumnos que se entregará a cada pareja una cantidad de fichas, a todos la misma cantidad, la cual podrán cambiar por estampas de acuerdo con una regla de cambio que ellos elegirán de entre cuatro posibles (por ejemplo, "cada 2 fichas se cambian por 6 estampas", "cada ficha se cambia por cuatro estampas", etc.). Ganarán quienes logren tener la mayor cantidad de estampas.*

La situación se desarrolla en los siguientes pasos:

1. *Se anotan en el pizarrón las reglas de cambio.*
2. Los alumnos, organizados en parejas o en equipos, escogen la regla con la que piensan que ganarán más estampas y la anotan en un papel que entregan a la maestra.
3. Una vez escogida una regla, se les dice cuántas fichas van a recibir.
4. Los equipos calculan cuántas estampas les corresponderán de acuerdo con la regla que escogieron.
5. En el pizarrón, se anotan la regla que escogió cada equipo y la cantidad de estampas que espera recibir. Si hay discrepancias (por ejemplo, dos equipos que, habiendo escogido la misma regla, esperan recibir cantidades de estampas diferentes), se discute. Éste constituye un primer momento de verificación empírica en el nivel numérico.
6. Se entregan las fichas a cada equipo y se efectúan los intercambios de fichas por estampas de acuerdo con la regla escogida (pueden nombrarse encargados de entregar las estampas a cambio de las fichas). Éste constituye un segundo momento de verificación empírica con apoyo del material concreto.

Notemos que la situación se organiza de manera que, en el momento de escoger la regla de cambio, los alumnos todavía no saben cuál es la cantidad de fichas que van a recibir, por lo que tienen que comparar las reglas de cambio antes de comparar las cantidades de estampas que éstas arrojan.

Los momentos de la verificación empírica son fundamentales, se espera que ayuden a comprender la situación y que sean la ocasión para poner en evidencia hipótesis erróneas, por ejemplo, aquella según la cual la mejor regla es la que se formula con más estampas, así como para esbozar estrategias para la siguiente vez que jueguen. Además, la realización física de los intercambios brinda una motivación adicional a los alumnos. La existencia de estos momentos de verificación constituye la principal diferencia con una situación como la de Noelting, la cual no fue diseñada con fines didácticos. Veremos otras diferencias más adelante.

Por último, lo más importante: la mejor regla no es necesariamente aquella en la que aparece el mayor número de estampas, ni aquella en la que aparece el menor número de fichas, sino aquella en la que se dan más estampas en relación con el número de fichas, es decir, la situación implica la tarea que interesa, la comparación de razones. Además, implica la realización de la tarea de calcular un valor faltante cada vez que se aplica una regla a una cantidad de fichas para obtener la cantidad correspondiente de estampas.

VARIABLES DIDÁCTICAS

A continuación se justifican algunas características de la situación y se indica cuáles de éstas se consideraron como variables didácticas.[18]

Las variables no numéricas

El tipo de magnitudes: las magnitudes en relación son discretas, lo cual facilitó la medición y la verificación empírica de las anticipaciones. Además, se escogieron cantidades de distinta naturaleza para diferenciar bien los dos términos de la relación: fichas y estampas. Esta última característica, sin embargo, probablemente dificultó la identificación del operador externo (el hecho de que una cantidad es *n veces* la otra), como veremos más adelante.

La formulación de las reglas de cambio: durante las primeras sesiones, todas las reglas se enunciaron en la forma explícita de una regla de correspondencia del tipo "por cada *n* fichas se dan *m* estampas". Durante estas sesiones, el reto fue que los niños superaran la comparación centrada en cantidades aisladas y pusieran en juego recursos para comparar las relaciones.[19]

[18] Las variables cuya manipulación puede tener efectos en los procedimientos de resolución se llaman "variables didácticas" en la Teoría de las Situaciones Didácticas.

[19] Cabe observar aquí otra característica que hace que la situación de la naranjada sea

En sesiones posteriores, se introdujo, junto con la formulación anterior, una formulación mediante un operador multiplicativo: "La cantidad de estampas que se da es *n* veces la cantidad de fichas". En este momento, el objetivo fue propiciar el estudio del operador multiplicativo, al mismo tiempo que se analizaba su equivalencia con la formulación anterior. Esto se hizo porque se consideró (y se confirmó) que, sin cierta ayuda, los alumnos no llegarían a destacar estos operadores.

El número de reglas por comparar: el conjunto de reglas entre las cuales se debe elegir la mejor puede estar compuesto por dos o más reglas. Al aumentar el número de reglas, aumenta la dificultad por el solo hecho de requerirse una organización que asegure que se hicieron las comparaciones pertinentes. En la secuencia, optamos por proponer grupos de cuatro reglas por las siguientes razones: *1)* para tener mayor diversidad de respuestas en el grupo sin que la tarea fuera todavía excesivamente difícil, *2)* con cuatro reglas es posible incluir reglas equivalentes y no equivalentes en un mismo conjunto, y *3)* la puesta en marcha de cada situación requiere un tiempo largo; teniendo cuatro reglas, se logra un mejor aprovechamiento del tiempo que teniendo dos. Se previó que, si la dificultad era excesiva, el número de reglas se reduciría a dos.

Las variables numéricas y los procedimientos

En las situaciones de comparación de razones, ciertos valores numéricos permiten comparar sin hacer cálculos numéricos. Por ejemplo, en los tratos "por cada 2 fichas se dan 3 estampas" y "por cada 2 fichas se dan 4 estampas" el término común "2 fichas" permite comparar las razones considerando únicamente las cantidades de estampas; asimismo, cualquiera de los dos tratos anteriores se puede comparar con el trato "por cada ficha te doy una estampa", el cual no altera las cantidades.

Al hacer el análisis preliminar de la secuencia, consideramos que los casos anteriores eran demasiado sencillos para la población de alumnos con la que trabajaríamos y que, por lo tanto, podían obviarse. Sin embargo, después de la experiencia, hemos puesto en duda esa consideración. Los casos de comparación sin cálculos pueden ser adecuados incluso para favorecer la comprensión de la tarea.

---

más compleja que la situación de los intercambios: en la primera se dice, por ejemplo, "La naranjada *A* se prepara con 2 vasos de jugo y 3 de agua" y no "La naranjada *A* se prepara con 2 vasos de jugo por cada 3 de agua". En la manera de formular la razón externa en la situación de las naranjadas, no hay indicios de que se trate de una constante, a diferencia de lo que pasa en la situación de los intercambios.

Las variantes que aplicamos requirieron siempre algún tipo de cálculo numérico. El grado de dificultad dependió del carácter múltiplo o no múltiplo de las razones.

Las razones externas[20] fueron siempre "razones múltiplo" de manera que los operadores subyacentes fueron naturales, por ejemplo, "por cada 2 fichas, se dan 6 estampas".[21] Algunas razones se expresaron de manera "canónica", es decir, proporcionando el número de estampas por ficha, por ejemplo, "por cada ficha se dan dos estampas". Esta manera de expresar una regla facilita tanto las comparaciones como el cálculo de la cantidad de estampas que corresponde a una cantidad de fichas. Además, el paso de la razón expresada con dos cantidades (por cada *n* fichas, te doy *m* estampas) a la expresión de la razón mediante el operador (la cantidad de estampas *m/n* veces la cantidad de fichas) puede ser más sencillo de dar si se pasa por la razón canónica (por cada ficha te doy *m/n* estampas). Consideramos que incluir algunas reglas expresadas de manera canónica podría sugerir a los alumnos el interés de expresar las demás reglas de esta manera.

Con respecto a las razones internas, la variable "razón múltiplo o no múltiplo" puede ser determinante de la dificultad de la comparación. La presencia de una razón interna múltiplo permite comparar generando solamente un nuevo par, por ejemplo, la comparación entre "por cada 2 fichas te doy 6 estampas" y "por 4 fichas te doy 8 estampas" (4 fichas es múltiplo de 2 fichas), se puede realizar obteniendo la nueva pareja (4 fichas, 12 estampas), equivalente a la primera pareja.

En cambio, la ausencia de razones internas múltiplo exige, si se quiere usar el procedimiento de igualar un término, generar dos pares nuevos, por ejemplo, para comparar (5 fichas, 10 estampas) contra (3 fichas, 9 estampas) se pueden comparar los pares (15 fichas, 30 estampas) y (15 fichas, 45 estampas). En las entrevistas que realizamos en el estudio preliminar, pudimos identificar dos dificultades para los niños en el uso de este procedimiento: comprender que los pa-

[20] Recuérdese que aquí llamamos *razón externa* a la que se establece entre los dos términos de una misma regla de cambio (número de estampas, número de fichas), ya que vincula cantidades de distinta naturaleza. *Razón interna* es la que se establece entre los términos homólogos de dos pares (número de fichas de una regla, número de fichas de la otra o bien número de estampas de una, número de estampas de la otra).

[21] El motivo para restringirse a razones múltiplo fue el interés de que los alumnos, a partir de cierto momento, identificaran el operador función *n veces*. Si no se identifica ese operador –como de hecho tendió a suceder– incluir razones no múltiplo, como "por cada 2 fichas se dan 3 estampas", no añade dificultad a la situación y, además, permite que los alumnos exploren esas relaciones desde los números naturales.

res pueden ser iterados diferentes números de veces[22] y encontrar un múltiplo común de los términos que se desea igualar.[23]

Por otra parte, la ausencia de razones internas múltiplo, al volver más complejo el recurso a las razones internas y puesto que las razones externas sí son múltiplo, puede favorecer el recurso a los operadores (doble, triple, cinco veces, etc.). A lo largo de la secuencia, se consideraron los dos casos: razones internas "múltiplo" y "no múltiplo".

Por último, las cantidades de fichas y estampas con las que se expresan las reglas de cambio se mantuvieron en un rango bajo, entre 1 y 20, para hacer posible la verificación empírica. Los operadores implícitos van de "el doble" a "10 veces". Las cantidades de fichas que se entregaron cada vez a los alumnos para el intercambio son de máximo 12. Las cantidades de estampas recibidas fueron siempre menos de 60, excepto en una situación en la que no se usó material.

Otras variantes de la situación básica

Señalamos a continuación algunas variantes de la situación básica que fueron incluidas en la experiencia.

Problemas de valor faltante. La situación básica puede dar lugar a una tarea más simple, que consiste en calcular el número de estampas que arroja una regla dada para una cantidad dada de fichas. Además de los momentos en los que esta situación apareció en el marco del mismo juego de "escoger la mejor regla", se planteó en otros momentos para propiciar el desarrollo de procedimientos más rápidos para calcular el número de estampas. La tarea de aplicar varias reglas a varias cantidades puede propiciar también el establecimiento de relaciones como las siguientes: una regla, que es mejor que otra para una cantidad de fichas, lo es también para cualquier otra cantidad de fichas; hay reglas que arrojan siempre la misma cantidad de estampas, son reglas equivalentes; cualquier regla da, para $2n$ fichas, lo doble de lo que da para n fichas; la regla 1 ficha → 4 estampas da el doble de estampas que la regla 2 fichas → 4 estampas.

El orden en el conjunto de razones. Por ejemplo, dada la regla "por cada ficha se dan dos estampas", escribir una que convenga más, otra que convenga

[22] En el ejemplo anterior, los términos del par (3 fichas, 9 estampas) se iteran 5 veces mientras que los del par (5 fichas, 10 estampas) se iteran solamente 3 veces.

[23] El estudio preliminar se mencionó ya en la introducción. Los resultados de las entrevistas pueden verse en Block, 2001, 2003 y en prensa.

igual (equivalente) y otra que convenga menos. Un reto más difícil es el siguiente: proponer una regla que convenga más que “por cada ficha, dos estampas”, pero menos que “por cada ficha, tres estampas”.

Objetos de institucionalización. Sobre la marcha puede ser conveniente introducir algunos términos, pocos en realidad, por ejemplo: “regla de cambio”, “reglas equivalentes”; y ciertos procedimientos: las formas de calcular de manera rápida el número de estampas, así como las formas de generar reglas “equivalentes”. Además, se pueden institucionalizar ciertas propiedades en la medida en la que se van utilizando, por ejemplo, “si el número de fichas es el mismo, entre más estampas mejor es la regla”. En cambio, puede ser innecesario, e incluso prematuro, hablar de “razón” o de “razón constante” o distinguir “razón interna” de “razón externa”.

LA APLICACIÓN DE LA SECUENCIA EN TERCER GRADO

CONDICIONES DE LA APLICACIÓN

Los sujetos. Trabajamos con alumnos de tercer grado, esto es, con niños de entre ocho y diez años. Según el estudio de Noelting al que ya hemos hecho referencia (Noelting, 1980a, 1980b), los niños, cuya edad está en este rango, han logrado avances importantes en su capacidad de comparar las razones, en particular, ya pueden considerar la equivalencia, desde el punto de vista de la intensidad a sabor a naranja, de mezclas formadas con mismo número de vasos de jugo y de agua, por ejemplo A (1, 1) = B (2, 2), lo que implica que distinguen “estado” de “variación”. La relación externa entre los términos complementarios de una razón (agua, jugo), se estabiliza como invariante. La relación interna entre términos que se corresponden (agua, agua o jugo, jugo) se moviliza como variación, ya sea mediante multiplicación de ambos términos o mediante división. Se consideran las cuatro relaciones entre los términos.

Teniendo en cuenta que varias de las características de la situación de los intercambios que nosotros usamos representan un nivel de dificultad significativamente menor que las de la situación que utilizó Noelting, pensamos que los alumnos de tercer grado tendrían buenas posibilidades de abordar con éxito la situación. Las entrevistas realizadas en el estudio preliminar lo confirmaron.[24]

[24] En dos de los problemas de comparación de razones que apliqué a los estudiantes de primaria en forma de entrevista individual, las razones fueron “múltiplo”, es decir, les corres-

Con respecto al conocimiento de las operaciones de multiplicación y división, ateniéndonos a los programas escolares, era previsible que los conocimientos de los alumnos de tercer grado fueran precarios. Puesto que el problema de comparación de razones puede abordarse sin saber multiplicar ni dividir y que un propósito de este trabajo fue precisamente explorar la posibilidad de avanzar simultáneamente en el estudio de la multiplicación y la división y en el de las razones, esta posible precariedad en el conocimiento de los niños no fue considerada una desventaja.

Es importante recalcar, sin embargo, que la decisión de trabajar con alumnos de tercer grado respondió al interés de sondear los límites inferiores en los que pensamos que las situaciones podrían funcionar. Como veremos, es muy probable que alumnos de cuarto y quinto grados puedan avanzar de manera más segura en la secuencia y obtener un mayor provecho.

El grupo, la escuela y otras condiciones. La secuencia se aplicó en un grupo de 24 alumnos de tercer grado de una escuela pública vespertina. El nivel de desempeño del grupo es heterogéneo. La conducción de las sesiones estuvo a cargo de una maestra con amplia experiencia en la aplicación de situaciones con el enfoque didáctico que caracteriza a las de la secuencia.

En las sesiones participaron tres observadores. Cada uno estuvo a cargo del registro de un equipo de cuatro niños con apoyo de grabadora. Una de las observadoras registró, además, los momentos de interacción colectiva (consignas y confrontaciones). Con esta organización logramos tener información precisa del trabajo de alrededor de 10 niños e información más general de los demás.

La secuencia aplicada. La situación básica (el juego de escoger la mejor regla) se aplicó seis veces a lo largo de cinco sesiones de clase de aproximadamente una hora. En las últimas dos aplicaciones se incluyó, entre las reglas de cambio, una regla formulada mediante un operador explícito (*n veces*). Se incluyeron además dos variantes de la situación básica, una que consistió en aplicar varias reglas a varias cantidades y otra en proponer reglas que cumplieran con determinada condición (véase el esquema de secuencia en el anexo).

pondían operadores enteros. Casi todos los alumnos los pudieron resolver, después de uno o más ensayos.

Las resoluciones de los alumnos

A continuación, comentaré la evolución de las resoluciones de los alumnos en relación con tres aspectos: *1)* las estrategias para elegir la mejor regla, *2)* los procedimientos para calcular el número de estampas que corresponde a un número de fichas dado, y *3)* las dificultades para identificar reglas equivalentes e identificar operadores del tipo "*n veces*".

Estrategias para elegir la mejor regla

A lo largo de los seis juegos, los estudiantes fueron descartando poco a poco criterios erróneos para la selección de la mejor regla, a la vez que construyeron nuevos criterios. En este proceso, la posibilidad de verificar el resultado de sus anticipaciones desempeñó un papel importante.

Al principio, todos los alumnos consideraron que la mejor regla era la que se formulaba con la mayor cantidad de estampas:

> Beth: *Porque con la D ganamos muchas más estampas.*[25]

Después de la primera verificación, la mayoría desechó este criterio. A partir de la segunda aplicación apareció el criterio según el cual conviene más la regla en la que se expresa con menos fichas:

> Ismael: *La* A, *es la* A *(...) porque en la* A ***no se acaban rápido las fichas***.[26]

Con más dificultad, porque este criterio les funcionó una vez, los alumnos comprobaron que tampoco era seguro. A lo largo de las aplicaciones sucesivas, cada vez más alumnos intentaron considerar la relación entre los dos términos. Hacían una primera elección de una o dos reglas, basada en una estimación cualitativa, diciendo cosas como "me late ésta porque nos dan 6 y sólo tenemos que dar 2".

Ya sea porque "les latían" dos reglas o, sobre todo, por las diferencias de opinión dentro de los equipos, poco a poco empezaron a verificar sus corazonadas

[25] Las reglas eran: *A)* por cada 2 fichas se dan 8 estampas; *B)* por cada ficha se dan 3 estampas; *C)* por cada 3 fichas se dan 9 estampas; *D)* por cada 6 fichas se dan 12 estampas.

[26] Reglas: *A)* por cada ficha se dan 4 estampas; *B)* por cada 2 fichas se dan 6 estampas; *C)* por cada 4 fichas se dan 8 estampas; *D)* por cada 8 fichas se dan 24 estampas.

antes de escoger una regla. Las verificaciones consistieron siempre en aplicar las reglas que eran objeto de discusión, por lo general dos, a veces tres, a una cantidad hipotética de fichas.

En algunas ocasiones, el procedimiento anterior presentó dificultades, por ejemplo, en un equipo que comparaba las reglas A ($1f \to 4e$), B ($2f \to 6e$), C ($4f \to 8e$), D ($8f \to 24e$),[27] aplicándolas todas a la cantidad de *12 fichas*, descartaron la regla D, porque les permitía cambiar solamente 8 de las 12 fichas y les sobraban 4. La dificultad no fue grave, ya que tendieron a escoger las cantidades de fichas que se dieron en la aplicación anterior y éstas, casi siempre, les permitieron hacer la comparación.[28]

En la cuarta aplicación de la situación, prácticamente todos los equipos lograron ya escoger y verificar la mejor regla (aunque todavía no todos los alumnos), es decir, lograron desechar los primeros criterios centrados en una cantidad para considerar la relación entre las cantidades.

En la sexta aplicación, empezaron a aparecer formas de verificación más independientes de las cantidades de fichas "que les podrían dar":

- escogen una cantidad *ad hoc* que facilite la comparación, por ejemplo, para comparar "por cada 2 fichas te doy 6 estampas" con "por cada 4 fichas te doy 8 estampas", aplican las dos reglas a 4 fichas, es decir, al menor múltiplo común de 4 y 2, o bien,
- igualan la cantidad de estampas, no de fichas: para comparar C ($2f \to 10e$) con D ($10f \to 20e$), una alumna obtiene C ($2f \to 10e$) = ($4f \to 20e$), y ($4f \to 20e$) mejor que $10f \to 20e$

Procedimientos para calcular el número de estampas a partir de un número de fichas

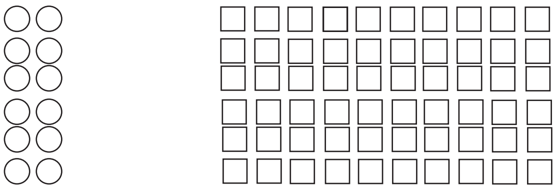
En varias ocasiones los alumnos tuvieron que calcular el número de estampas que resulta al aplicar una regla a una cantidad determinada de fichas, por ejemplo:

$$\begin{array}{c} 2 \text{ fichas} \to 10 \text{ estampas} \\ 12 \text{ fichas} \to x \text{ estampas} \end{array}$$

[27] La abreviación $af \to be$ representa la regla de cambio "por cada a fichas, te doy b estampas".

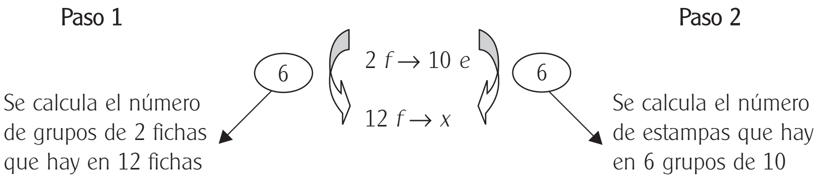
[28] En este momento podría ser adecuado abordar el problema de los múltiplos comunes.

El procedimiento más elemental para llevar a cabo esta tarea consistió en representar con objetos, o mediante dibujos, el cambio de fichas por estampas, paso por paso, hasta agotar las fichas disponibles. Por ejemplo, para aplicar la regla 2 fichas → 10 estampas a 12 fichas, se dibujan dos fichas y a un lado 10 estampas, después otras dos fichas y otras 10 estampas, y así sucesivamente hasta haber dibujado 12 fichas. Después, se cuentan las estampas: son 60.



Este procedimiento fue empleado por pocos niños y muy pronto fue sustituido por un procedimiento de dos pasos. Utilizando el mismo ejemplo, los pasos son:

1. Determinar primero el número de agrupamientos de 2 fichas que se forman con la cantidad de 12 fichas, esto es, 6 agrupamientos. En este paso está implicada una división "comparación".
2. Determinar el número de estampas que se obtienen al hacer 6 agrupamientos de 10 estampas, esto es, 60 estampas. En este paso está implicada una multiplicación.



Prácticamente ningún alumno utilizó desde el principio las técnicas canónicas para resolver las operaciones de división y multiplicación. En la mayoría de los casos, ni siquiera identificaron la pertinencia de estas operaciones.

A continuación se presentan algunos ejemplos tomados de la sesión 3, en la que cada alumno aplicó una regla a varias cantidades de fichas.

Manuel, para aplicar la regla $3f \rightarrow 9e$ a 12 fichas, sumó mentalmente las cantidades de fichas de 3 en 3 hasta 12, al tiempo que contó, con los dedos, el número de sumandos. Enseguida, sumó ese número de veces las 9 estampas:

Manuel: 3, 6, 9, 12 (va levantando un dedo), 4.
9 y 9, 18 y ya llevo 6 fichas, más 6 fichas... 18... son 36.

A *Ismael* le tocó la regla $2f \rightarrow 8e$. Él creó una técnica para realizar todos sus cálculos: dibujó fichas de dos en dos, las fue encerrando en una rueda (numeró las primeras 12 ruedas) y abajo anotó las cantidades de estampas que corresponden al último par:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	11	12...			
oo	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*	*oo*...
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120...

(Continuó hasta 240)

Para determinar cuántas estampas corresponden a una cantidad de fichas, cuenta sobre su representación esa cantidad de fichas y ve el número que está debajo de la última ficha contada, ese número le indica la cantidad correspondiente de estampas. De esta manera, Ismael separa los dos conteos implicados, se concentra primero en la suma sistemática de ochos, después solamente cuenta las fichas necesarias.

Miguel A. para aplicar la regla $6f \rightarrow 12e$ a 30 fichas, presenta en su hoja las siguientes operaciones:

$12 + 12 = 24$
$24 + 24 = 48$
$48 + 12 = 60$

Fichas	Estampas
6	12
+ 6	+ 12
= 12	= 24
+ 12	+ 24
= 24	= 48
+ 6	+ 12
= 30	= 60

Estas operaciones corresponden probablemente a las combinaciones lineales que se muestran en el cuadro.

Miguel B. utilizó la multiplicación para calcular todas las cantidades. Sus explicaciones son muy explícitas:

Regla $3f \rightarrow 9e$ para 12 fichas:

> *Obs:* ¿Cómo le hiciste?
> *Miguel:* (...) Sumé 9 por 4 y me dio 36 (*sic*)
> *Obs:* ¿Por qué por 4? ¿De dónde sacaste que era 9 por 4?
> *Miguel:* Porque me alcanzaba para 4 grupitos de estampas, porque 3,6, 9, 12 y son 12 fichas...

La repetición de la tarea, aunada a la introducción de cantidades más grandes (sobre todo de cocientes más grandes, por ejemplo, calcular cuántos grupos de 3 fichas se forman con 60 fichas) motivaron, en relativamente poco tiempo, un mejoramiento de las técnicas: la mayoría de los alumnos abandonó el dibujo a favor de las sumas y otras combinaciones lineales como las que hemos visto. Varios alumnos, al final de la experiencia, utilizaban ya de manera explícita la técnica canónica de la multiplicación en el segundo paso y algunos, pocos, la técnica de la división para el primer paso.

Únicamente dos alumnas no pudieron abandonar el dibujo y el conteo. En el otro extremo de la gama de procedimientos utilizados, un alumno propuso un algoritmo: *"se divide la cantidad total de fichas entre el número de fichas de la regla y se multiplica por el número de estampas"*.

Cabe señalar que la mayoría de los alumnos manifestó tener un conocimiento de la técnica para multiplicar, pero no fue sino poco a poco como lograron utilizar esta operación en cuanto razón interna.

Dos aspectos más complejos

La noción de equivalencia. A lo largo de las seis aplicaciones, los alumnos constataron, a veces sorprendidos, que dos reglas arrojaban la misma cantidad de estampas, por ejemplo, $1f \rightarrow 3e$ y $3f \rightarrow 9e$. No obstante, nunca pudieron explicarlo, se limitaron a constatar que "sale lo mismo".

Hacia el final, se plantearon dos situaciones sobre la equivalencia. En la primera tenían que identificar las reglas equivalentes. Sólo seis alumnos (de 24) lograron identificar equivalencias utilizando el mismo procedimiento que habían venido usando para compararlas: aplicar las reglas a cantidades de fichas.

En la otra situación, debían escribir tres reglas, una mejor, una menos buena y una equivalente a la regla $2f \to 10e$, usando números hasta 10. La mayoría pudo escribir reglas mejores y menos buenas; pero muy pocos lograron escribir una regla equivalente: $1f \to 5e$. Volveremos sobre esta dificultad en las conclusiones.

El operador externo o "función".[29] Una manera notablemente más económica de comparar las reglas y aplicarlas a cantidades de estampas consiste en identificar los operadores externos que subyacen a las razones:

A la regla "se cambia cada ficha por 4 estampas", subyace el operador "se da 4 veces la cantidad"; a la regla "se cambian cada 2 fichas por 6 estampas" subyace el operador "se da 3 veces la cantidad".

Los operadores constituyen una expresión de las razones que ya es independiente de las cantidades. Por ello, una vez que se identifican los operadores, la idea de "reglas equivalentes" se vuelve transparente: las reglas "por cada 2, 6", "por cada 8, 24", "por 1, 3" son equivalentes en virtud de que todas triplican la cantidad.

En el breve lapso de la experimentación, los alumnos no lograron identificar estos operadores para compararlos. En las dos últimas aplicaciones de la situación "Elegir la mejor regla", se introdujo, entre las reglas de cambio, una regla en la que el operador está explícito, por ejemplo:

"Se da una cantidad de estampas igual a tres veces la cantidad de fichas."

Con cierta dificultad, la mayoría de los alumnos logró aplicar la regla a cantidades de fichas y consiguió comparar la regla con otras. Sin embargo, la introducción de este tipo de regla no desencadenó la identificación de los operadores en las otras reglas. Veamos algunos ejemplos de las dificultades mencionadas.

En la segunda parte de la quinta sesión se presentaron las siguientes reglas para que los alumnos identificaran las que fueran equivalentes:

e) Se da una cantidad de estampas igual a DOS VECES la cantidad de fichas.
f) Por cada ficha se dan 4 estampas.
g) Por cada 4 fichas se dan 8 estampas.
h) Por cada 2 fichas se dan 8 estampas.

[29] El término "externo" hace referencia a la razón externa, razón a la que está vinculado el operador del que aquí se habla. El término "función" pertenece a las categorías de Vergnaud (véase el apartado "Desde la multiplicación de números naturales").

En el siguiente cuadro aparecen las propuestas que hicieron los seis equipos:

Reglas equivalentes	Equipos
No hay equivalencias	1
G y *H*	5, 4
E y *F*	6
F y *H*	2
F y *H*, *E* y *G*	3

En un primer momento, por lo menos tres equipos (1, 4, 5) proponen la equivalencia G ($4f \rightarrow 8e$) = H ($2f \rightarrow 8e$), basándose en que ambas reglas dan 8 estampas. Con ello, muestran que se centran en una sola variable y pierden de vista el sentido de las reglas. Nos detendremos un momento en la discusión que se libró en el equipo 4.

Apenas iniciada la actividad, Marco propone la equivalencia G ($4f \rightarrow 8e$) = H ($2f \rightarrow 8e$), la cual justifica muy claramente a lo largo de la discusión: ambas dan lo mismo (8 estampas). Fernando la rechaza al principio, pero enseguida, como si dudara, agrega "ah, sí..." Sin embargo, él identifica la equivalencia de G ($4f \rightarrow 8e$) con E ($\times 2$) y concluye entonces que las reglas *G*, *E* y *H* deben ser equivalentes:

> *Fernando:* Dice en la *E*, se da una cantidad de estampas igual a dos veces la cantidad de fichas, y dice en la *G*... dice que por cada 4 fichas se dan 8 estampas y entonces 4 fichas... 4 por 2 dieron 8... (señala la regla *E*)... es igual a la *E*, la *G* y la *H*.

Pero Marco rechaza esta posibilidad. Un poco más adelante, Marco acepta que la regla E ($\times 2$) da 4 estampas por 2 fichas, pero encuentra en esto un argumento más para rechazar la regla *E*: da 4 estampas, mientras que la G ($4f \rightarrow 8e$) y la H ($2f \rightarrow 8e$) dan 8.

> *Marco:* Es que la *G* nos da 8 estampas, porque dice que por 4 fichas te da 8 estampas y la *H* dice que por 2 fichas te dan 8 estampas. Y la *E* dice que te dan una cantidad igual a dos veces la cantidad de fichas y nada más nos darían 4 y entonces perderíamos... Nos tienen que dar el mismo resultado las dos.

Fernando, cuestionando que la E dé necesariamente 4 estampas, argumenta: *"pero ahí no dice la cantidad de cuánto"*. Marco parece tener dificultad para comprender precisamente eso, que la comparación no porta sobre las cantidades absolutas con las que se formulan las reglas, porta sobre reglas de cambio, o *razones*.

Veamos un ejemplo de identificación exitosa de equivalencias. En un primer momento, Ismael y Alfonso, del equipo 3, proponen la equivalencia F $(1f \rightarrow 4e)$ y G $(4f \rightarrow 8e)$. Parece que la presencia de un número 4 en ambas reglas propició esta intuición (Ismael explica después: ...*estaba confundido con el 4 que dice estampas y fichas*).

Mientras Ismael se apresura a anotar su propuesta y a entregarla a la maestra, Alfonso aplica ambas reglas a 4 fichas. Mediante sumas iteradas, obtiene 16 estampas para la regla F y sabe que son 8 para la G. Se da cuenta entonces de que las reglas no son equivalentes y pide a Ismael que recupere la hoja de respuestas para poderla corregir.

Enseguida Alfonso encuentra la equivalencia: la F $(1f \rightarrow 4e)$ y la H $(2f \rightarrow 8e)$. Él ya sabía que para 4 fichas la F da 16 estampas y observa que la H daría dos veces 8 estampas. Unos segundos después, él mismo encuentra la segunda equivalencia: E $(\times 2) = G$ $(4f \rightarrow 8e)$. Lo explica así:

> *Alfonso:* Porque te da estampas igual a dos veces la cantidad de fichas, es que si me dieran 4 fichas y dos veces la cantidad de fichas, entonces serían 8 y por cada 4 fichas serían 8 estampas. (Vuelve a explicarles a sus compañeros.) Entonces las estampas se convertirían en fichas, serían 4 fichas y dos veces la cantidad de fichas, entonces dos veces la cantidad de fichas son 4, entonces 4 fichas, entonces serían 8 y por cada 4 fichas se dan 8 estampas.

Cabe observar que la explicación de Alfonso manifiesta una de las dificultades en juego: la necesidad de considerar el cambio cualitativo en el nivel de los objetos "las estampas se convertirían en fichas" (o, más bien, las fichas en estampas).

CONCLUSIONES

Partimos del supuesto de que, en la situación de los intercambios, los alumnos distinguirían la noción de razón de la noción de cantidad, primero al descartar las comparaciones centradas en una cantidad y considerar la necesidad de igualar un término (número de fichas o de estampas) para poder comparar; después, al empezar a comprender que reglas expresadas con cantidades distintas pueden ser equivalentes y, finalmente, al poder expresar la relación entre las cantidades con un solo número, un operador, momento en el cual la razón en juego asume una expresión propia, independiente de las cantidades. A continuación destacaré qué lograron hacer los alumnos de lo anterior y haré un comentario sobre los aspectos que se revelaron más complejos y frente a los cuales no se apreciaron avances.

Los logros: aprehender la relación entre cantidades y mejorar procedimientos de cálculo

La experiencia confirmó que, en la tarea de comparar "reglas de cambio", los alumnos de tercer grado de primaria pueden llegar a tomar en consideración la idea de *relación* entre dos cantidades como algo distinto de las propias cantidades, al mismo tiempo que realizan sus primeros aprendizajes sobre la multiplicación y la división. Más específicamente, la situación "Elegir la mejor regla" permitió a los alumnos:

- Desechar, en el contexto de las reglas de cambio, criterios centrados en una sola variable e intentar considerar la relación entre las dos variables.
- Desarrollar un procedimiento para comparar las reglas de cambio, el cual consiste en aplicar las reglas a una misma cantidad de estampas.
- Mejorar en poco tiempo la eficiencia de este procedimiento, sobre todo al incorporar el uso de la multiplicación en el papel de *operador interno*, para calcular un número de estampas.

Puede decirse que es viable la hipótesis según la cual ciertas situaciones de comparación de razones pueden constituir escenarios en los que los alumnos enriquecen sus nociones de multiplicación y división.

La complejidad de la equivalencia de razones

Los alumnos pudieron constatar que algunas reglas arrojan la misma cantidad de estampas, pero no pudieron explicarlo ni anticiparlo. Este hecho sugiere distinguir dos momentos en el acercamiento a la noción de equivalencia de razones: uno que se manifiesta en la capacidad de generar, en la acción, parejas de "fichas-estampas" a partir de una regla dada, para ver, por ejemplo, cuántas estampas les tocarían si les dieran determinada cantidad de fichas, y otro que se manifiesta en la capacidad de *prever* que una misma regla puede expresarse mediante distintas parejas de cantidades. La comprensión de esta última característica, fundamental en la comprensión de la noción de razón, se reveló más difícil para los niños de tercer grado. En todo caso, cinco sesiones fue muy poco tiempo para la mayoría.

La complejidad del operador externo o función y su vinculación con la equivalencia de razones

Parece confirmarse que, aun cuando la razón externa es múltiplo, como fue el caso de todas las reglas de cambio con las que se trabajó, la determinación del operador externo presenta una dificultad conceptual muy superior a la que subyace al uso de los operadores internos (o escalares).

Resulta interesante observar que las nociones de "equivalencia de razones" y de "operador externo" guardan entre sí una relación dialéctica: por una parte, el operador externo, en cuanto expresión explícita de aquello que tienen en común diversas razones, tendría mayor sentido para los alumnos una vez que éstos se hubieran apropiado de la noción de equivalencia de razones. Pero también es probable que, a partir de cierto momento, la introducción de operadores ayude a comprender la idea de razones equivalentes al destacar con un solo número aquello que las distintas razones tienen en común.

Es posible que convenga propiciar un trabajo más prolongado en el nivel de los procedimientos internos, antes de asumir como objetivo la construcción del operador externo. Por ejemplo, se podría propiciar la obtención de razones canónicas del tipo $1 \rightarrow n$, antes de propiciar la identificación del operador . Esta última meta tendría mayores oportunidades de ser alcanzada en cuarto o quinto grados de la escuela primaria, cuando los alumnos tienen un mayor dominio de la multiplicación y mayores posibilidades para comprender la noción de equivalencia de razones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995), "Ingeniería didáctica", en P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 7-24.

Block, D. (2001), "La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico", Tesis de doctorado, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN.

—— (2003), "De la expresión '2 de cada 4' a la expresión '1/2 de'. La noción de razón, precursora de la noción de fracción", en *Memoria electrónica del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Guadalajara, Jalisco, 18 al 22 de noviembre, pp. 1-8.

—— (en prensa), "El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria", en R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano*, México, Díaz de Santos de México-/Clame.

Bosch, M. (1994), "La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad", Memoria para optar por el grado de doctor, Department de Matemàtiques, Facultat de Ciències, Univeristat Autònoma de Barcelona.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, París, Recherches en Didactique des Mathématiques, La pensée Sauvage.

Chevallard, Y., M. Bosch y J Gascón (1998), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, México, SEP/ICE Universitat de Barcelona.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Países Bajos, Reidel.

Hart, K.M. (1988), "Ratio and Proportion", en J. Hiebert y M. Beher (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics, vol. 2, pp. 198-219. [Virginia, USA]

Karplus, R., S. Pulos y E. Stage (1983), "Proportional Reasoning of Early Adolescents", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Nueva York, Academic, pp. 45-90.

Kieren, T. (1988), "Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and

Formal Development", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics, vol. 2, pp. 162-181. [Virginia, USA]

Küchemann, D. (1989), "The Effect of Setting and Numerical Content on the Difficulty of Ratio Tasks", en *Psychology of Mathematics Education. Actes de la 13ème Conférence Internationale*, 9-13 de julio, Francia, vol. 2.

Noelting, G. (1980a), "The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part I. Diferentiation of Stages", *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, Países Bajos, Reidel, pp. 217-253.

—— (1980b), "The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part II. Problem Structure at Successive Stages. Problem Solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring", *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, Países Bajos, Reidel, pp. 331-363.

Ramírez, L. (2003), "La enseñanza de los primeros números en preescolar. Exploración de una alternativa didáctica", Tesis de maestría, Departamento de Investigaciones Educativas Cinvestav-IPN.

Secretaría de Educación Pública (2001), *Matemáticas Sexto grado*, México, SEP.

Soto, C., y N. Rouche (1995), "Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos", *Educación Matemática*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 7, núm. 1, pp. 77-95.

Steffe, L.(1988), "Children's Construction of Number Sequences and Multiplying Schemes", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics, vol. 2, pp. 119-140. [Virginia, USA]

Vergnaud, G. (1988), "Multiplicative Structures", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics, vol. 2. pp. 141-161 [Virginia, USA].

ANEXO. SECUENCIA DE SITUACIONES

Sesión	Situación	Objetivos y comentarios
1	**Elegir la mejor regla (I)** *A)* por cada 2 fichas se dan 8 estampas; *B)* por cada ficha se dan 3 estampas; *C)* por cada 3 fichas se dan 9 estampas; *D)* por cada 6 fichas se dan 12 estampas. **Elegir la mejor regla (II)** Se repite, excluyendo la regla ganadora en la primera parte.	Comprobar que la comparación de cantidades aisladas no lleva a escoger la mejor regla. Desarrollar procedimientos que permitan comparar. Se presentó una confusión debido a la organización de la actividad; fue corregida en la siguiente.
2	**Elegir la mejor regla (III)** *A)* por cada ficha se dan 4 estampas; *B)* por cada 2 fichas se dan 6 estampas; *C)* por cada 4 fichas se dan 8 estampas; *D)* por cada 8 fichas se dan 24 estampas. Al final: confrontación de procedimientos **Elegir la mejor regla (IV)** *A)* por cada 5 fichas se dan 10 estampas; *B)* por cada ficha se dan 3 estampas; *C)* por cada 2 fichas se dan 10 estampas; *D)* por cada 10 fichas se dan 20 estampas.	Mismos objetivos Además: • empezar a difundir las estrategias de algunos niños. • identificar la existencia de reglas equivalentes.
3	**Cálculo del número de estampas** Se calcula el número de estampas que arrojan cuatro reglas, para varias cantidades de estampas.	Desarrollar procedimientos más eficientes para calcular el número de estampas.
4	Termina la actividad anterior: Se confrontan observaciones realizadas a partir de los resultados obtenidos.	Difundir en el grupo procedimientos eficientes utilizados por algunos. Propiciar la identificación de ciertas relaciones en el cuadro de resultados; por ejemplo, hay dos reglas que siempre producen los mismos resultados.

ANEXO. SECUENCIA DE SITUACIONES (CONCLUSIÓN)

Sesión	Situación	Objetivos y comentarios
	"Una nueva regla" PRIMERA PARTE: "Se da una cantidad de estampas igual a TRES VECES la cantidad de fichas" Se aplica la regla a varias cantidades de estampas.	Explicar el significado de la nueva formulación en donde un natural desempeña el papel de razón constante (número de veces).
	SEGUNDA PARTE: Selección de la mejor regla de cambio (V) *A)* Se da una cantidad de estampas igual a CINCO VECES la cantidad de fichas; *B)* se cambia cada ficha por 4 estampas; *C)* se cambian cada 2 fichas por 10 estampas; *D)* se cambian cada 10 fichas por 20 estampas,	Identificar la equivalencia entre las dos formulaciones de la razón: "por cada 2, 10" y "5 veces".
5	PRIMERA PARTE: Identificar reglas equivalentes (I) *E)* Se da una cantidad de estampas igual a CINCO VECES la cantidad de fichas; *F)* por cada ficha se dan 5 estampas; *G)* por cada 5 fichas se dan 10 estampas. Por 2 fichas se dan 6 estampas.	Mismo objetivo que el anterior.
	SEGUNDA PARTE: Identificar reglas equivalentes (II) *H)* Se da una cantidad de estampas igual a DOS VECES la cantidad de fichas; *I)* por cada ficha se dan 4 estampas; *J)* por cada 4 fichas se dan 8 estampas. Por 2 fichas se dan 8 estampas.	Mismo objetivo que el anterior.
	TERCERA PARTE: Proponer reglas mejores, equivalentes y menos buenas que: "Se cambian 2 fichas por 10 estampas". Sólo se pueden usar números hasta 10.	Propiciar una reflexión explícita sobre el orden.

DATOS DEL AUTOR

David Block
Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav,
Instituto Politécnico Nacional, México
dblock@cinvestav.mx