

# Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica

Ángel Gutiérrez Rodríguez

*Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia*

## **Resumen**

*En este texto describo, ejemplifico y analizo diferentes opciones metodológicas de las fases de recogida y análisis de datos en investigaciones diseñadas para estudiar los procesos de aprendizaje de la demostración matemática basado en software de geometría dinámica. En el contexto más específico de la resolución de problemas de conjetura y demostración de geometría, muestro cómo las principales herramientas típicas (a veces exclusivas) de estas investigaciones resultan útiles para poder conocer con profundidad la actuación de los estudiantes durante la resolución de estos problemas y su forma de pensar.*

## **Abstract**

*In this text I describe, exemplify, and analyze the main methodological options for gathering and analyzing data in research experiments aimed to study the processes of learning mathematical proof in dynamic geometry software environments. In the more specific context of solving geometry conjecture and proof problems, I show that the main tools typical (some exclusive) of this kind of research help to deeply understand students' thinking, behaviour and activity while solving conjecture and proof problems.*

## **Introducción**

Las herramientas informáticas se están usando en la enseñanza de todas las áreas de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, siendo su uso más frecuente en los niveles de Primaria y, sobre todo, Secundaria. En particular, una agenda de investigación muy activa es la dedicada a la enseñanza de la geometría con la ayuda del software de geometría dinámica. La principal ventaja de este software sobre los materiales didácticos tradicionales (tanto estáticos como dinámicos) es la facilidad y rapidez con que los estudiantes pueden transformar las construcciones hechas en la pantalla, realizar mediciones y disponer de un gran número de ejemplos tan variados como quieran. Esto da a los estudiantes la posibilidad de realizar experimentaciones que les permitan plantear y verificar conjeturas o encontrar propiedades matemáticas no evidentes con las que abordar la resolución del problema planteado.

El uso de software para la enseñanza de la geometría se generalizó a comienzos de los años 80 con la aparición del Logo. La segunda revolución se produjo unos años después, con la aparición del software de geometría dinámica (la primera presentación internacional de Cabri tuvo lugar en 1988, durante ICME-6). Desde entonces, numerosos investigadores de todo el mundo nos hemos dedicado a

explorar las posibilidades del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría y a experimentar las más variadas formas de enseñanza. Dentro de esta agenda de investigación, una línea especialmente importante, tanto por el número de investigaciones como por su importancia en el contexto del aprendizaje de las matemáticas, es la dedicada a analizar los procesos de aprendizaje de la demostración matemática en contextos de software de geometría dinámica.

Paralela al incremento de las experimentaciones didácticas con software de geometría dinámica es la necesidad de desarrollar metodologías de investigación para la recogida y el análisis de datos en estas experimentaciones. En algunos casos se adaptan metodologías existentes. En otros casos surgen nuevos métodos de investigación basados en las peculiaridades del nuevo contexto.

Mi objetivo en este texto es describir, ejemplificar y analizar las principales herramientas metodológicas de recogida y de análisis de información típicas (a veces exclusivas) de las investigaciones sobre procesos de aprendizaje de la demostración basadas en el uso de software de geometría dinámica, en el contexto más específico de la resolución de problemas de demostración.

Existen varios programas de geometría dinámica de uso frecuente (Cabri, Sketchpad, Cinderella y otros). Cada programa tiene sus peculiaridades pero, para lo que nos interesa ahora, el comportamiento de los de uso más frecuente es bastante similar. Los ejemplos que presentaré a continuación están hechos con el programa Cabri, el programa de geometría dinámica de mayor implantación en España.

En las páginas siguientes utilizaré los términos “figura” y “dibujo” con los significados habituales en el contexto del software de geometría dinámica (Parzysz, 1988; Laborde, Capponi, 1994): Una figura es un objeto geométrico abstracto caracterizado por las propiedades matemáticas derivadas de los elementos y las herramientas usadas para su creación. Un dibujo es una representación particular en la pantalla de una figura. Cada figura se puede mostrar mediante una infinidad de dibujos, resultantes de cambiar en la pantalla las posiciones o tamaños de los elementos de la figura. Por otra parte, no es posible saber qué figura hay detrás de un dibujo concreto que vemos en la pantalla, pues es necesario conocer las herramientas usadas para su construcción y las propiedades matemáticas derivadas de las mismas.

### **Múltiples puntos de vista para analizar el aprendizaje de la demostración con software de geometría dinámica**

Las partes críticas en cualquier investigación experimental en didáctica de las matemáticas son la recogida de información sobre la actividad de los estudiantes durante los experimentos y el análisis de la información recopilada. En ambos casos, la principal dificultad está en la necesidad que tenemos de conocer qué pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuándo y cómo toman decisiones, etc., todo ello para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Cuando la investigación es sobre el aprendizaje de matemáticas en entornos de software de geometría dinámica, además de las metodologías generales usadas en otros tipos de investigaciones, disponemos de algunas herramientas específicas.

### **Recogida de información**

La manera más usual de resolver un problema de conjetura y demostración, o sólo de demostración, con la ayuda del software de geometría dinámica es empezar construyendo una figura basada en las hipótesis del problema, después hacer experimentaciones mediante arrastre de elementos de la figura, buscando regularidades que nos permitan identificar una conjetura o, si ya la tenemos, comprobar su validez en una variedad adecuada de ejemplos y, por último, identificar propiedades matemáticas observables en la pantalla que permitan descubrir un camino de demostración de la conjetura validada por la experimentación. Para poder hacer un análisis detallado del proceso de resolución de un problema con software de geometría dinámica, el investigador debe tener información lo más completa posible sobre la interacción de los estudiantes con el ordenador, pues las claves para entender qué han hecho los estudiantes y por qué lo han hecho, en qué estaban pensando, cuándo y por

qué han tomado una decisión, etc. casi nunca están en el resultado (archivo o texto en papel), sino en el proceso.

Es conocido que hay varios métodos de recogida de datos de uso frecuente como son la recogida de la producción escrita de los estudiantes (respuestas de cuestionarios o soluciones de problemas), la grabación en video cuando los estudiantes trabajan en grupo, o las entrevistas clínicas. Cuando la investigación se basa en el uso de software de geometría dinámica, estos métodos son también útiles pero, además, tenemos otros específicos, propios de este contexto de experimentación:

\*Archivos creados por estudiantes, con figuras construidas y revisión de la construcción hecha.

Los programas de geometría dinámica incluyen un comando que permite revisar la construcción hecha en un archivo, mostrando en la pantalla la sucesión de pasos dados por los estudiantes de principio a fin de la construcción y el comando usado en cada paso. De esta manera podemos ver el orden en que han sido añadidos los elementos de la figura y saber qué herramienta han usado para crear cada elemento. Así, en el ejemplo de la figura 1 podemos darnos cuenta de que un estudiante ha usado el comando “mediatriz” y el otro el comando “recta perpendicular”. Al analizar la resolución completa del problema por ambos estudiantes, se ve que esta diferencia (la recta perpendicular no está ligada al punto medio del lado) resulta crucial para entender por qué el segundo estudiante no fue capaz de llegar a una solución correcta.

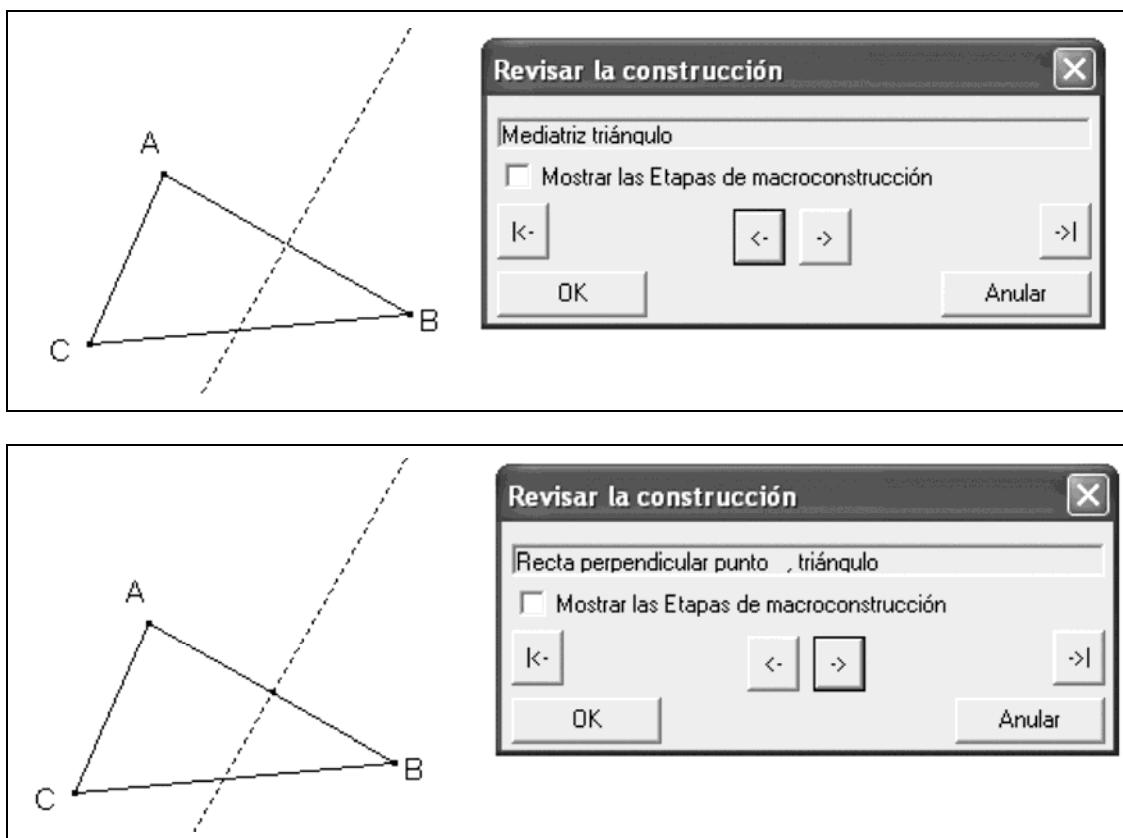


Figura 1. Comando “revisar la construcción”.

Un inconveniente del comando revisión de la construcción es que no muestra los objetos borrados durante el proceso de construcción, por lo que no podemos, por ejemplo, ver las soluciones erróneas intermedias que los estudiantes han descartado. Esto es análogo a lo que ocurre en las investigaciones con papel y lápiz cuando los estudiantes usan hojas “de sucio” que no entregan o cuando hacen operaciones o dibujos que después borran. Un procedimiento que puede paliar parcialmente este inconveniente es pedir a los estudiantes que guarden periódicamente archivos con nombres diferentes.

\* Registro automático de la actividad de los estudiantes.

Esta opción (registro de sesión) es exclusiva de Cabri<sup>1</sup>. Cuando está activada, el programa guarda de manera automática un archivo cada vez que se hace un cambio en la pantalla, tanto si se ha añadido o borrado un elemento de la figura, como si se ha modificado la posición o tamaño de algún objeto en la pantalla (punto, recta, polígono, etc.). El resultado es una secuencia de archivos que muestran los sucesivos dibujos manejados por los estudiantes durante su interacción con el ordenador. Como complemento, las versiones de Cabri que pueden hacer el registro de la sesión disponen de un comando que muestra, como una serie de diapositivas, la secuencia de archivos guardados durante la sesión.

El registro automático de una sesión de trabajo de los estudiantes es una herramienta de investigación muy valiosa, pues gracias a ella sí podemos ver los objetos borrados por los estudiantes durante la resolución del problema y también, aún más importante, podemos ver las manipulaciones de arrastre que han hecho y cuándo y dónde surgen las ideas que les permiten avanzar hacia la solución del problema, o que les llevan a un bloqueo.

La figura 2 muestra una secuencia de archivos (no siempre consecutivos) del registro de una sesión en la que los estudiantes resuelven el problema “Dados un triángulo ABC y tres rectas paralelas, construir otro triángulo DEF semejante a ABC que tenga un vértice sobre cada recta.” El contexto es un proyecto de investigación que está desarrollando el estudiante de doctorado Félix Rodríguez en la Universidad de Valencia. El experimento se ha llevado a cabo con los 8 estudiantes matriculados en la asignatura “Métodos Geométricos”, optativa de 2º ciclo de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de las Islas Baleares, en la que los estudiantes trabajaron por parejas con Cabri<sup>2</sup>.

En la primera parte de la resolución (no mostrada aquí), los estudiantes han dibujado el triángulo ABC, las rectas  $r$ ,  $s$  y  $t$ , el triángulo  $A'B'C'$  (congruente a ABC y fijo) y el otro triángulo (semejante a ABC, con el vértice  $A'$  fijo y con el vértice correspondiente al B perteneciente a la recta  $t$ ). Las imágenes 1 a 4 resumen una serie de tanteos (arrastres del tercer triángulo desplazando el vértice sobre la recta  $t$ ) que llevan a los estudiantes a descubrir la solución del problema: Trazan la recta que pasa por los vértices  $C'$  y su correspondiente en el tercer triángulo (imagen 5), comprueban que el punto de corte de esta recta y la recta  $s$  es un vértice del triángulo solución (imagen 6) y construyen el triángulo DEF pedido (imagen 7).

---

<sup>1</sup> El registro de sesión está implementado sólo en dos versiones del programa, la más antigua (Cabri 1) y la más reciente (Cabri II+). Este es el motivo por el que numerosas investigaciones han usado Cabri 1 a pesar de las ventajas de Cabri II en otros aspectos. La opción de registro de sesión no está disponible en la versión actual de Cabri II+ para Macintosh.

<sup>2</sup> En cualquier investigación sobre enseñanza apoyada en software de geometría dinámica (como caso particular de enseñanza apoyada en las TIC) hay dos componentes importantes: El tipo de interacción de profesor y estudiantes con la tecnología y el tipo de interacción entre profesor y alumnos junto a los roles de cada uno. En estas mismas actas, el texto de la ponencia de Olimpia Figueras profundiza en el primer componente y el texto de la ponencia de Pedro Cobo profundiza en el segundo componente. Mi objetivo en este texto es utilitario, pues reflexiono sobre metodologías de investigación.

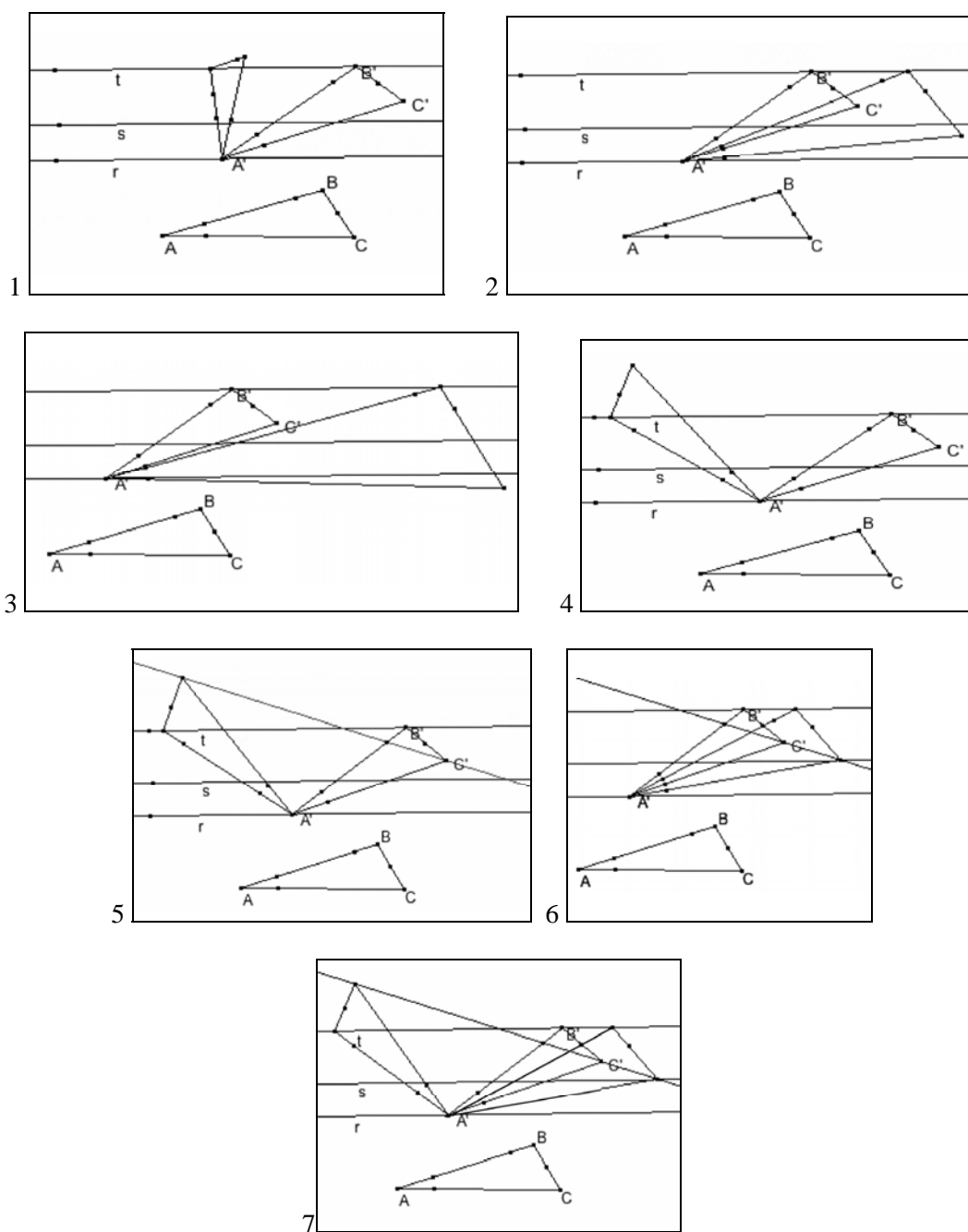


Figura 2. Fragmentos de un registro de sesión.

En el ejemplo anterior, al revisar la construcción del archivo de Cabri con la solución del problema, al investigador le quedan varias preguntas sin contestar. Observar el registro de la sesión resuelve algunas de estas cuestiones, pero no todas. La principal pregunta sin respuesta es ¿por qué se les ocurre trazar la recta por los dos vértices en la imagen 5? ¿Cómo han descubierto o intuido que el punto de corte de esa recta y la recta  $s$  es la solución del problema? En este ejemplo podemos ver cómo cada herramienta ayuda, pero la combinación de ambas (observar el registro de la sesión y analizar la construcción de uno de los archivos previos a la imagen 5) resulta más potente que cada una por separado (figura 3): Al modificar el tercer triángulo en un archivo previo a la imagen 5 observamos que está activado el comando “traza”, por lo que los estudiantes ven que el vértice del tercer triángulo correspondiente a  $C'$  recorre una recta que pasa por  $C'$ .

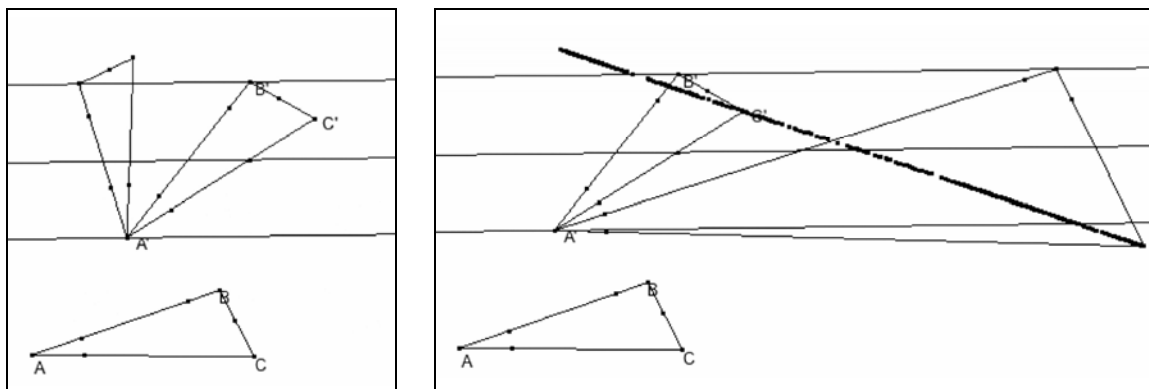


Figura 3. Recorrido de un punto con la traza activada.

Cuando se utiliza un programa de geometría dinámica que no dispone de la opción de registro de sesión, existen en el mercado varios programas de monitorización automática de la pantalla que pueden hacer un trabajo parecido. Estos programas guardan cada cierto tiempo (especificado en las preferencias) un archivo gráfico con una copia de la pantalla<sup>3</sup>.

\* Auto-protocolo escrito por los estudiantes.

Una de las metodologías típicas de la investigación sobre resolución de problemas es la de pedir a los resolutores “pensar en voz alta”. Existen publicaciones en las que se discuten las ventajas e inconvenientes de esta metodología. El principal inconveniente alegado es que, al tener que verbalizar los pensamientos, decisiones, observaciones, etc. durante la resolución, el resolutor se ve obligado a interrumpir su flujo de pensamiento, lo cual puede distorsionar el proceso de resolución e incluso llevar a un resultado diferente del que se habría obtenido sin la verbalización. Otro inconveniente evidente de esta metodología es que sólo se puede utilizar en entrevistas clínicas.

En el proyecto de investigación que mencionaba en los párrafos anteriores, hemos experimentado una variante de pensar en voz alta, que denominamos “auto-protocolo”, para tratar de usar esta metodología en el contexto de clases ordinarias. Los estudiantes, al mismo tiempo que avanzan en la resolución de un problema, van escribiendo notas comentando su actividad, los motivos de sus decisiones, etc. La directriz dada a los estudiantes es que, paralelamente a la resolución del problema, escriban comentarios sobre sus procesos meta-cognitivos de toma de decisiones, ideas o acciones, motivo por el que han decidido actuar así, etc. Al usar el auto-protocolo en situaciones de trabajo con papel y lápiz o con ordenador, la interferencia que puede producir la escritura del auto-protocolo en los estudiantes es menor que al pensar en voz alta, pues éstos de todas formas deben detener su flujo de pensamiento para escribir o manipular el ordenador.

Como los estudiantes trabajaban por parejas, una estrategia que utilizaban frecuentemente es que, mientras uno hacía en el ordenador lo que habían decidido, el otro escribía el auto-protocolo. Veamos a continuación (figura 4) el fragmento del auto-protocolo correspondiente al ejemplo de las figuras 2 y 3.

<sup>3</sup> En el mercado hay programas tanto para Macintosh (por ejemplo Screen Movie Recorder) como para Pc (por ejemplo FlashCam).

10. Nos hemos equivocado.
11. Decidimos borrar todo, pero antes pensamos.
12. Recordamos un ejercicio hecho en clase, que había que construir un  $\Delta$  equilátero con un pto cualquiera y un vértice en una recta  $r$  y  $s$  que son  $\parallel$ .
13. La idea de este ejercicio era construir dos  $\Delta$  equiláteros. Los vértices  $B$  y  $B'$  (en un ejercicio de ese día) estaban alineados.
14. Por tanto, no borramos lo hecho. Haremos otros  $\Delta$  semejantes a  $ABC$  y vemos que  $C', C''$  y  $C'''$  están sobre  $s$  recta,  $\forall$   $A$  en  $r$  de esta recta con  $s$  sea  $m$  (C).
15. Pensamos que estamos trabajando con  $C$  así y que moviendo  $B'$  se verá. Pero según nuestra construcción  $B'$  no lo podemos mover.
16. Ent. construimos otro  $\Delta$  semejante a  $ABC$  con vértices sobre  $r$  ( $A'$ ) y otro sobre  $t$ .
17. Movemos el triángulo cogiendo como pto el pto sobre  $t$ .
18. Aplicamos la opción TRAZA al 3º pto del triángulo y dibuja una recta.  $\Rightarrow$  Todos los pto  $C$ 's están alineados.
19. ~~Así~~ trazamos la recta ~~que pasa por~~  $C'$  de los pto que hemos visto que están alineados y esta recta con  $s$  es  $C''$ .

Figura 4. Fragmento de auto-protocolo.

El auto-protocolo confirma la conclusión extraída del análisis del registro de sesión y la revisión de una construcción vistos más arriba (figuras 2 y 3), de que la traza del punto permite a los estudiantes caracterizar la recta que lleva a la solución. Lo que no podía deducirse al analizar la información proporcionada por el ordenador, pero sí aparece explícitamente en el auto-protocolo (#10 a #14), es que los estudiantes decidieron seguir ese camino porque recordaron la forma de resolver otro problema planteado antes en el curso (con lápiz y papel): “*Dados un punto  $P$  y dos rectas paralelas  $r$  y  $s$ , construir un triángulo equilátero que tenga uno de sus vértices en el punto  $P$ , otro vértice sobre la recta  $r$  y el otro sobre la recta  $s$ .*”

### Análisis de información

Para el análisis de los datos recogidos en una investigación experimental, también hay algunas metodologías generales, como el análisis de protocolos, tratamientos estadísticos, clasificación de respuestas en categorías o tipos, etc. si bien abundan las específicas, propias de cada contexto concreto. En el contexto del aprendizaje de la demostración con la ayuda de software de geometría dinámica, una revisión de la literatura especializada muestra varios constructos que se están utilizando con éxito para entender los procesos mentales de los estudiantes cuando resuelven problemas de demostración, las dificultades que han sufrido, o los motivos por los que no han logrado completar con éxito una demostración. Podemos destacar los siguientes marcos de análisis de la información:

\* Análisis de los tipos de arrastre realizados en la pantalla del ordenador.

El arrastre de objetos en la pantalla del ordenador es la característica más peculiar del software de geometría dinámica. Esta acción permite modificar en tiempo real el dibujo de la pantalla para convertirlo en otro dibujo asociado a la misma figura (realmente lo convierte en una sucesión casi continua de dibujos). La modificación continua como elemento didáctico favorecedor del aprendizaje,

que supera las limitaciones del aprendizaje en contextos de lápiz/tiza y papel/pizarra, no es nuevo, pues siempre se han utilizado modelos articulados o deformables para representar determinados conceptos o propiedades matemáticas. Lo que sí es nuevo es la gran libertad de movimientos y transformación que permite el software de geometría dinámica.

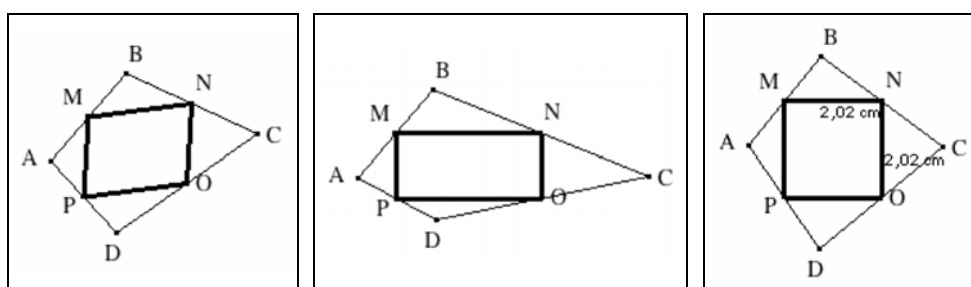
La segunda función del arrastre que descubren los estudiantes cuando empiezan a aprender a manejar un programa de geometría dinámica, después de la función inicial de modificar un dibujo, es la de verificar que la construcción que acaban de realizar es correcta. Aquí hay un contrato didáctico implícito según el cual si una construcción soporta cualquier arrastre sin perder ninguna de sus propiedades matemáticas características, el profesor y los estudiantes aceptan que la construcción es correcta.

No obstante, como señalan Arzarello y otros (1998 b, 2002) y Hölzl (1996), cuando un estudiante arrastra un objeto en la pantalla, puede hacerlo con varias finalidades diferentes, las cuales “cambian [durante la resolución de un problema] dependiendo de las modalidades cognitivas y epistemológicas según las cuales los estudiantes realizan el control (y en consecuencia realizan sus acciones) en Cabri” (Arzarello y otros, 1998 b, p. 33). En otras palabras, los estudiantes pueden realizar acciones de arrastre con distintas finalidades específicas en diferentes momentos. Entre los tipos de arrastre caracterizados por estos investigadores, cabe destacar como más útiles para analizar la actividad de los estudiantes los siguientes<sup>4</sup>:

- *Arrastre de test* (test): El arrastre se hace para comprobar si la construcción hecha conserva las condiciones matemáticas del problema, es decir si la figura creada se rompe o no. El ejemplo típico de este tipo de arrastre es cuando, al principio del curso, se pide a los estudiantes que construyan un rectángulo y éstos lo hacen utilizando segmentos verticales y horizontales; al mover un vértice de esta figura, los estudiantes ven cómo el rectángulo se convierte inmediatamente en un cuadrilátero general.

- *Arrastre errático* (wandering): El arrastre se hace sin un plan específico, de forma aleatoria, con la finalidad de modificar un dibujo pero sin que importe cómo es esa modificación. En este caso, no hay que confundir que el recorrido del cursor por la pantalla sea aleatorio, es decir que no está predeterminado por el estudiante, con que el estudiante haga el arrastre sin ninguna finalidad específica. Este tipo de arrastre es muy frecuente cuando, tras haber construido una figura que se ajusta al enunciado de un problema y haber verificado que la construcción es correcta (arrastre de test), los estudiantes empiezan a explorar la figura buscando invariantes matemáticos sin ninguna idea previa de qué invariantes buscar ni dónde o cómo encontrarlos.

- *Arrastre guiado* (guided): Se arrastra un punto u otro objeto con el fin de obtener un caso particular de la figura construida (particular por su forma, tamaño, posición, ...).



<sup>4</sup> Incluyo junto a las etiquetas de los tipos de arrastre su denominación en inglés para facilitar relacionar este texto con publicaciones en inglés.



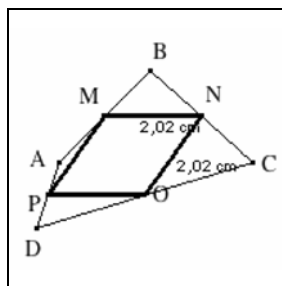


Figura 5. Arrastre guiado durante el descubrimiento del teorema de Varignon.

Una situación muy frecuente en la que está presente el arrastre guiado es la de haber construido una figura en la que interviene un cuadrilátero general y el estudiante modifica el dibujo de la pantalla para conseguir que ese cuadrilátero se transforme en diversos cuadriláteros específicos (paralelogramo, rombo, rectángulo, etc.). Por ejemplo, se pide resolver el problema: “Dado un cuadrilátero ABCD, sea MNOP el cuadrilátero formado al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de ABCD. ¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Cuándo es MNOP un cuadrado? ¿Y un rombo?” (teorema de Varignon). En la figura 5 vemos una secuencia de dibujos obtenidos mediante arrastres guiados durante la resolución de este problema con el objetivo de hacer que MNOP sea, sucesivamente, un rectángulo, un cuadrado y un rombo. En cada caso, los estudiantes trataban de encontrar alguna particularidad de ABCD que les permitiera caracterizar su relación con el correspondiente cuadrilátero MNOP.

- *Arrastre sobre un lugar geométrico oculto* (dummy locus o lieu muet): El arrastre se hace procurando que los sucesivos dibujos conserven cierta propiedad matemática que no es válida para la figura construida. En este caso, generalmente hay un punto de la figura cuyo recorrido coincide con un lugar geométrico oculto. La identificación y caracterización de ese lugar geométrico suele llevar a la solución del problema. El comando “traza” combinado con este tipo de arrastre es una eficaz herramienta para identificar el lugar geométrico oculto, que no está disponible en los entornos de papel y lápiz.

La figura 6 resume la actividad de una pareja de estudiantes de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia tratando de resolver el problema “Sean A, B y C tres puntos fijos no alineados y D un punto libre diferente. ¿Qué condiciones debe cumplir D para que las cuatro mediatrices del cuadrilátero ABCD se corten en un único punto?” El contexto es una asignatura de didáctica de las matemáticas de Secundaria, de libre elección, en la que los estudiantes trabajan por parejas con Cabri para resolver diversos problemas, resoluciones que después profesor y alumnos analizan desde las perspectivas matemática y didáctica.

Los estudiantes empiezan haciendo un arrastre errático hasta comprobar que, en principio, no es fácil que las cuatro mediatrices se corten (en un sólo punto). Después inician un arrastre guiado hasta lograr que las cuatro mediatrices se corten (figura 6, 1ª fila). Tras algunas experimentaciones más en las que encuentran algunas soluciones, deciden mover el punto D muy despacio para que las mediatrices no dejen de cortarse en un solo punto (figura 6, 2ª fila). Uno de los estudiantes intuye que el movimiento del punto D podría ser circular. Entonces, activan la traza del punto D y repiten el arrastre anterior, comprobando que el recorrido del punto D es similar a la circunferencia que pasa por los otros tres vértices (figura 6, 3ª fila). Ahora los estudiantes construyen la circunferencia que pasa por A, B y C (figura 6, último dibujo) y comprueban, de nuevo mediante arrastre guiado, que cuando D se desplaza sobre esta circunferencia las mediatrices se cortan en su centro. A partir de aquí, los estudiantes ya tienen una conjetura y empiezan a trabajar para demostrarla basándose en la propiedad de las mediatrices de equidistancia a los vértices del cuadrilátero (que han usado para determinar el centro de la circunferencia).

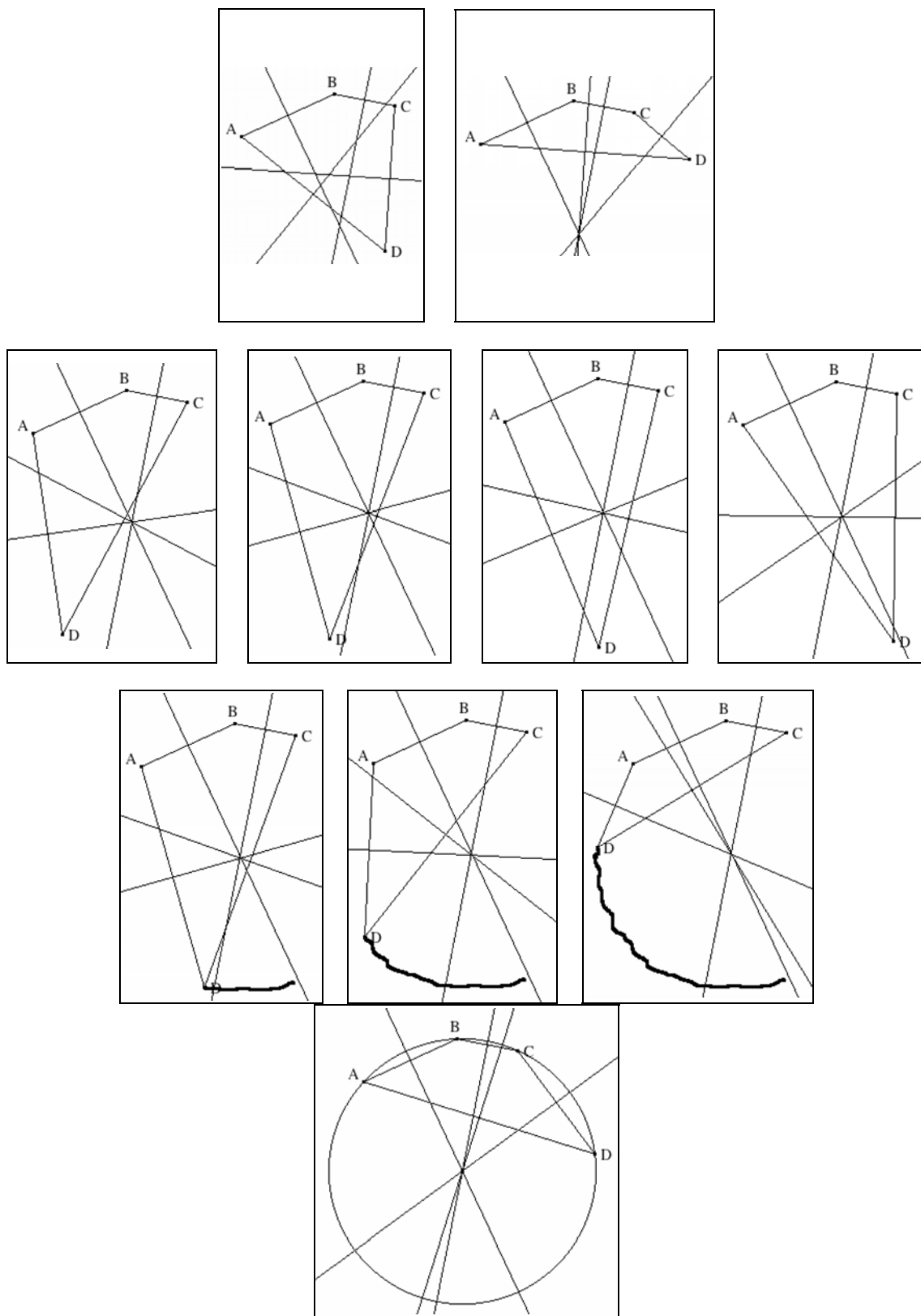


Figura 6.

Arzarello y otros (2002) hacen un análisis de las actuaciones de los estudiantes observados buscando identificar relaciones entre la fase de la resolución del problema en que se encontraban (ascendente o descendente; las describo en el apartado siguiente) y los tipos de arrastre que hacían. Por otra parte, también es posible relacionar los tipos de arrastre con las etapas de resolución de los problemas de

conjetura y demostración. La tabla siguiente resume estas relaciones para los tipos de arrastre que he descrito en los párrafos anteriores. De esta manera, a la vista del tipo de arrastre que están realizando los estudiantes, los investigadores pueden deducir información sobre los objetivos, razonamiento, etc. de los estudiantes.

<b>Etapas de resolución de un problema de conjetura y demostración</b>	<b>Tipos de arrastre</b>
Construcción inicial	Test Errático
Descubrimiento de propiedades	Errático Guiado
Elaboración de una conjetura	Sobre un l. g. oculto Guiado
Verificación de la conjetura	Test Guiado
Demostración de la conjetura	---

\* Análisis de las fases de la resolución de un problema de demostración.

Decía más arriba que, cuando se plantean problemas de demostración con software de geometría dinámica, un proceso ideal de resolución de estos problemas (figura 7) empieza construyendo una figura basada en las hipótesis del problema, sigue experimentando con esa figura mediante arrastre de sus elementos para identificar propiedades matemáticas o conjeturas y, después, para validarlas y, por último, concluye demostrando deductivamente la conjetura validada por la experimentación (la resolución descrita en la figura 6 es un ejemplo).

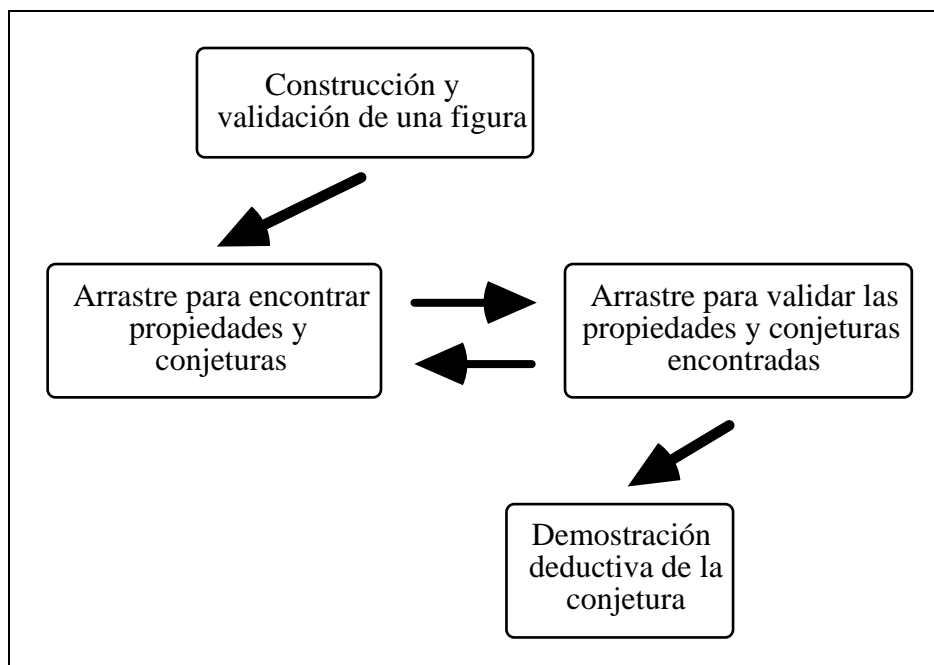


Figura 7. Proceso ideal de resolución de un problema de demostración con software de geometría dinámica.

En la práctica, los procesos seguidos por los estudiantes pueden ser bastante diferentes del descrito en la figura 7 por varios motivos: La acción de tutorización del profesor puede primar determinada forma

de proceder de los estudiantes<sup>5</sup>. Éstos pueden ignorar alguna de las etapas por falta de experiencia. Los estudiantes pueden quedarse bloqueados en el proceso de búsqueda de conjeturas, no ser capaces de encontrar la forma de realizar la demostración deductiva, etc. En las resoluciones que sí llegan a realizar demostraciones deductivas, Arzarello y otros (1998 a) definen dos fases que caracterizan las relaciones entre la actividad empírica de elaboración de conjeturas y la actividad deductiva de su demostración:

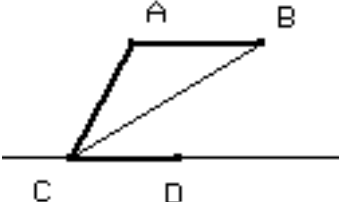
- Una *fase ascendente* caracterizada por la actividad empírica dirigida a la mejor comprensión del problema, la búsqueda de una conjetura y su posterior validación o rechazo.
- Una *fase descendente* caracterizada por la actividad argumentativa (deductiva o no) dirigida a la elaboración de una demostración de la conjetura planteada.

Según este modelo teórico, la resolución de un problema de demostración se caracteriza por la transición de la fase ascendente a la fase descendente. En la realidad, la resolución de un problema puede estar formada por varias transiciones en una u otra dirección entre ambas fases, correspondientes a unos momentos de trabajo empírico y otros momentos de trabajo deductivo, a avances por caminos que no llevan al resultado deseado seguidos de retrocesos para iniciar nuevas fases ascendentes de búsqueda o verificación empíricas que dan paso a nuevas fases descendentes de producción deductiva. En el siguiente ejemplo (Marrades, Gutiérrez, 2000) muestro la resolución por una pareja de estudiantes de Secundaria del siguiente problema:

Haz una construcción con las siguientes condiciones:

- El segmento CD sobre una recta.
- El segmento AB paralelo al CD.
- El segmento AB tiene la misma longitud que el AC.

Investiga si el segmento BC es la bisectriz de  $\triangle ACD$ .



La figura 8 muestra los pasos más significativos de la actividad de los estudiantes. Una vez hecha la construcción correctamente, los estudiantes empiezan la resolución haciendo algunas mediciones ( $AB$ ,  $AC$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle ACB$  y  $\angle BCD$ ; ver figura 8.1) y comprobando mediante arrastre que los tres ángulos son siempre iguales. Después demuestran la congruencia de  $\triangle ABC$  y  $\triangle BCD$ :

1.  $\angle BCD = \angle ABC$  porque son alternos internos.
2.  $AB = AC$ .
3.  $AB \parallel CD$ .

Después de hacer algunos cambios en la figura de la pantalla, los estudiantes creen que ya pueden escribir una demostración de la relación pedida en el enunciado. Entonces (figura 8.2) añaden la recta perpendicular a  $CB$  por el punto  $A$ , marcan el punto  $M$  de intersección de esta recta con  $CB$  y miden los ángulos  $\angle CAM$ ,  $\angle BAM$  y  $\angle AMB$ . Mediante arrastre, verifican que  $\angle CAM$  y  $\angle BAM$  miden siempre lo mismo. Por último, escriben en su libreta:

<sup>5</sup> Véase el texto de la ponencia de Pedro Cobo para profundizar en este aspecto.

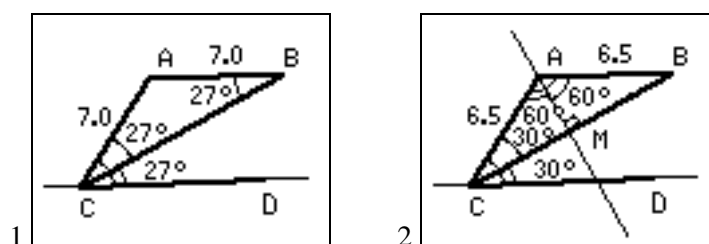


Figura 8.

4. Si  $AB = AC$  y  $AB$  es paralelo a  $CD$ , entonces  $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC$  por alternos internos y  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$  por el 2º criterio de igualdad [de triángulos] dos lados y un ángulo comprendido [iguales].
5.  $AB = AC$ , un lado.
6.  $AM$  [es un lado] común.
7.  $\sphericalangle CAM = \sphericalangle BAM$  un ángulo comprendido.
8. Por lo tanto, si  $\triangle ACM = \triangle ABM$  entonces  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$ .
9.  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ .
10.  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$ .
11.  $\rightarrow \sphericalangle BCD = \sphericalangle ACB$  ([luego  $CB$  es la] bisectriz de  $\sphericalangle ACD$ ).

En este resumen encontramos las dos fases de la demostración claramente diferenciadas: Los episodios 1 a 3 corresponden a la fase ascendente y los episodios 4 a 11 corresponden a la fase descendente. Sin embargo, un análisis más detallado muestra que hay varias transiciones entre fases ascendentes y descendentes. La primera se produce cuando los estudiantes, después de las mediciones y verificaciones iniciales (fase ascendente, figura 8.1) demuestran la congruencia de  $\triangle ABC$  y  $\triangle BCD$  (fase descendente, episodios 1 y 3). Aunque intentan seguir escribiendo la demostración, deben volver a una fase ascendente para añadir a la figura elementos auxiliares que necesitan y verificar mediante arrastre las relaciones de congruencia entre los ángulos (figura 8.2). Hecho esto, ya están en condiciones de terminar de escribir la demostración, pues han identificado las propiedades y relaciones que necesitan, y pasan a otra fase descendente (episodios 4 a 11).

En numerosas publicaciones relacionadas con el aprendizaje de la demostración matemática se dice que generalmente una parte de la actividad de los matemáticos profesionales cuando están investigando un nuevo teorema es de tipo empírico, y que éstos sólo proceden a escribir una demostración formal del nuevo resultado cuando están suficientemente convencidos de la veracidad del mismo. Por lo tanto, también ahí encontramos las fases ascendente y descendente.

\* Análisis de la unidad cognitiva de teoremas observable en la resolución con éxito de problemas de demostración.

Mariotti y otros (1997) dicen que el análisis de las formas de trabajar de geómetras antiguos y actuales pone de relieve que existe una continuidad entre los procesos de producción de una conjetura y de elaboración de una demostración de la misma. Esta misma continuidad puede verse en experimentos con estudiantes que resuelven con éxito problemas de conjetura y demostración. Esta continuidad, que estos investigadores llaman la unidad cognitiva del teorema, se basa en las relaciones cognitivas establecidas por el resolutor del problema entre los resultados de su actividad exploratoria de búsqueda de una conjetura y su actividad deductiva posterior de búsqueda de una demostración para las conjetura hallada, de forma que las ideas surgidas durante la actividad exploratoria son la base para la construcción de la demostración deductiva:

*“Durante la producción de la conjetura, el estudiante progresivamente trabaja en su enunciado mediante una actividad argumentativa progresiva funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones. Durante la posterior etapa de demostración del enunciado, el estudiante conecta con este proceso de forma coherente, organizando algunos de los argumentos previamente producidos en una cadena lógica.”* (Garuti, Boero, Lemut, 1998)

En el ejemplo de la figura 8 existe unidad cognitiva entre las experimentaciones empíricas en el ordenador y la escritura de una demostración de la conjetura, pues los estudiantes, a través de la actividad de manipulación empírica (medición, arrastre y observación de las medidas) descubren las propiedades que luego utilizan para escribir el argumento de la demostración. Esta demostración tiene partes de tipo deductivo aunque, globalmente, no podamos considerarla una demostración deductiva por la falta de justificación adecuada de algunas relaciones (principalmente de la igualdad de  $\square CAM$  y  $\square BAM$ ).

También en el ejemplo de la figura 6 podemos reconocer la presencia de la unidad cognitiva del teorema, pues los estudiantes, después de la experimentación inicial, construyen la circunferencia circunscrita (con centro en el punto de corte de dos mediatrices y que pasa por los puntos A, B y C) y, después de terminar las exploraciones y verificaciones empíricas, utilizan esta propiedad de las mediatrices para escribir la demostración de la conjetura que resuelve el problema.

Veamos ahora un tercer ejemplo (Marrades, Gutiérrez, 2000), dos estudiantes de Secundaria resolviendo el problema del corte de las mediatrices de un cuadrilátero en un sólo punto, en el que los estudiantes encuentran la relación correcta que resuelve el problema, pero la falta de unidad cognitiva les impide demostrarla.

Los estudiantes comienzan realizando la construcción del cuadrilátero con las mediatrices y arrastrando el vértice D. Realizan diversos arrastres sin lograr ningún ejemplo con las cuatro mediatrices cortándose, añaden las medidas de los lados y los ángulos y siguen transformando la figura, hasta que obtienen un rectángulo y un cuadrilátero cruzado (figura 9.1). Los estudiantes siguen haciendo arrastres del punto D y obtienen algunos rectángulos y polígonos análogos al de la figura 9.2.

A continuación los estudiantes superponen los puntos B y C (figura 9.3) y, arrastrando el punto D, obtienen varios “triángulos”, observando en todos que las cuatro mediatrices se cortan<sup>6</sup>. Abandonan este tipo de dibujos y vuelven a manipular cuadriláteros convexos, obteniendo diversos casos en los que se cortan las cuatro mediatrices. Los estudiantes escriben una conjetura: *La suma de los ángulos A y C es igual a la suma de B y D si queremos que las mediatrices se corten. La suma de los ángulos [de cada par, A+C y B+D] es 180°.*

Los estudiantes deciden construir la circunferencia con centro en la intersección de las mediatrices de dos lados opuestos y que pasa por C (figura 9.4). Como los vértices A y B no están en la circunferencia, los mueven hasta situarlos encima de ella (figura 9.5). A continuación escriben: *Las mediatrices se cortan en un punto. Ese punto es el centro de la circunferencia circunscrita [al cuadrilátero ABCD]. Los vértices equidistan del centro de la circunferencia.*

---

<sup>6</sup> Al no haber puesto los puntos B y C exactamente uno encima del otro, Cabri sigue considerando que existe el segmento BC y, por lo tanto, dibujando su mediatriz.

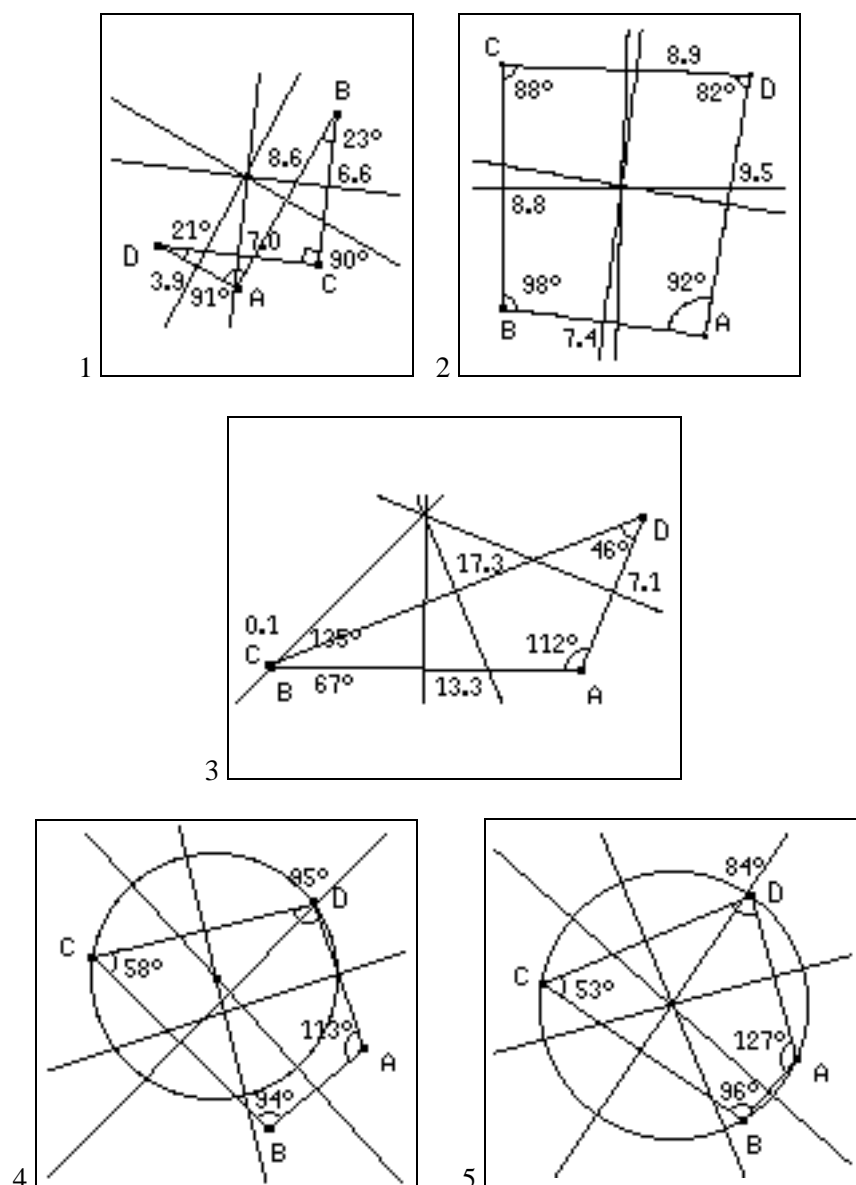


Figura 9.

Estos estudiantes han encontrado dos conjeturas correctas que resuelven el problema, pero no son capaces de demostrar ninguna de ellas porque durante sus experimentaciones en el ordenador no han encontrado propiedades que pudieran servirles para conectar las conjeturas con la propiedad de corte de las mediatrices. Por ejemplo, a diferencia de cómo construyen la circunferencia los estudiantes de la figura 6, éstos han usado las mediatrices de dos lados opuestos ( $AB$  y  $CD$ ), por lo que los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  no pertenecen todos a la circunferencia. En otras palabras, no han logrado crear la unidad cognitiva del teorema.

Hay una evidente relación entre los constructos de las fases ascendente y descendente y de la unidad cognitiva de un teorema como herramientas de análisis de la actividad de los estudiantes: El primero permite diseccionar el proceso de resolución de un problema de conjetura y demostración distinguiendo los momentos en los que el estudiante está buscando información (de manera empírica exploratoria) y aquéllos en los que está organizando la información (de manera deductiva). El segundo permite identificar las relaciones funcionales entre los hallazgos producidos en la fase ascendente y las definiciones, propiedades, etc. usadas para organizar la demostración en la fase descendente. Sin embargo, estos constructos no son equivalentes pues dan lugar a análisis complementarios de la

resolución del problema ya que las fases de resolución permiten observar la secuencia de momentos durante la resolución y la unidad cognitiva permite observar la coherencia entre las actividades de ambas fases (o la falta de ella).

La utilización de las fases de resolución de un problema de demostración y de la unidad cognitiva de un teorema como herramientas de análisis de datos no está restringida a las investigaciones de actividad en entornos de software de geometría dinámica, sino que también se pueden emplear cuando los estudiantes han trabajado en contextos de papel y lápiz. Sin embargo, en los contextos informáticos es donde dichas herramientas son más productivas, porque el uso de software de geometría dinámica hace explícita con mayor detalle la actividad empírica de los estudiantes que en contextos no informáticos transcurre en mayor medida en la mente de los estudiantes, sobre todo cuando éstos son más expertos o tienen un mayor nivel de razonamiento abstracto.

\* Análisis de los tipos de demostraciones realizadas por los estudiantes.

Diversos investigadores han observado las formas de resolver problemas de demostración de estudiantes de diferentes niveles educativos y han llegado a elaborar algunas clasificaciones de las mismas. Las clasificaciones más fructíferas y de uso más frecuente en la actualidad son las definidas en Balacheff (1988 a) (ver también Balacheff, 1988 b) y en Harel, Sowder (1998). Posteriormente, otras investigaciones realizadas en España han analizado la aplicabilidad de dichas clasificaciones y han elaborado clasificaciones que profundizan y desarrollan las anteriores (Ibáñez, 2001; Marrades, Gutiérrez, 2000; Martínez Recio, 1999; Martínez Recio, Díaz Godino, 2001). De manera muy resumida, los tipos de demostraciones descritos por Balacheff y por Harel y Sowder son:

- Demostraciones empíricas:

*Empirismo naïf*, demostración consistente en verificar la veracidad de la conjetura en uno o varios ejemplos elegidos generalmente de manera aleatoria.

*Experimento crucial*, demostración consistente en verificar la veracidad de la conjetura en un ejemplo elegido cuidadosamente y pensando que si la conjetura es cierta en este ejemplo, será cierta siempre.

*Ejemplo genérico*, demostración consistente en verificar la veracidad de la conjetura en un ejemplo elegido con la intención de que sea representante de la familia de todos los ejemplos y que las manipulaciones realizadas con el ejemplo sean manipulaciones con toda la familia. Los estudiantes intentan que las propiedades matemáticas que usan en la demostración aparezcan desvinculadas del ejemplo específico que están usando, por lo que esta forma de proceder supone un primer paso hacia las demostraciones deductivas.

- Demostraciones deductivas:

*Experimento mental*, demostración consistente en utilizar un ejemplo para identificar propiedades pertinentes que a continuación se disocian del ejemplo concreto, se interiorizan de manera abstracta y se organizan en una cadena deductiva.

*Analítica* o teórica, demostración deductiva abstracta, generalmente formal, basada en el uso de argumentos y operaciones mentales que no tienen ninguna relación con la manipulación de ejemplos concretos. Las demostraciones analíticas pueden ser transformativas o axiomáticas.

### **Síntesis final, implicaciones didácticas y sugerencias**

Resumo mediante un diagrama (figura 10) las estrechas relaciones que hay entre los instrumentos o procedimientos de recogida de datos y los tipos de análisis que podremos hacer de esos datos que he presentado en las páginas anteriores. Este diagrama se podría ampliar añadiendo las metodologías generales de recogida y análisis de datos, pero eso queda fuera del objetivo de este texto.



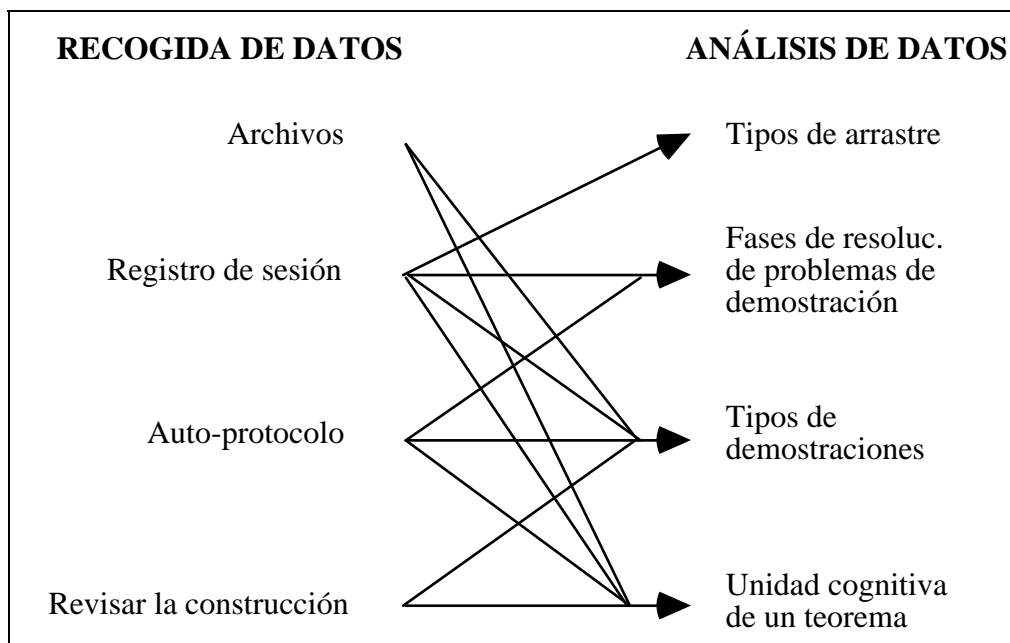


Figura 10. Relación entre formas de recogida y de análisis de datos.

Es fácil observar en las publicaciones que informan sobre investigaciones experimentales que el uso del software de geometría dinámica influye en la mayor o menor frecuencia con la que encontramos cada tipo de demostración. La forma de construcción de una figura en el ordenador y el uso del arrastre hacen que los ejemplos que manipulan los estudiantes adquieran con más facilidad el carácter de ejemplo genérico o experimento mental que el de ejemplo naïf o experimento crucial. Una cuestión que no está investigada, y sobre la cual estamos trabajando en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, es la de observar las posibles diferencias de comportamiento de estudiantes cuando resuelven problemas de geometría sintética en los entornos de papel y lápiz o de software de geometría dinámica.

Por otra parte, al analizar demostraciones deductivas elaboradas usando software de geometría dinámica se pone en cuestión la diferencia entre las demostraciones deductivas del tipo experimento mental y de los tipos analíticos definidos por Harel y Sowder, pues lo normal es que las demostraciones formales sean el resultado de una fase ascendente de experimentación con arrastres, mediciones, etc. Esta es una cuestión que merece la pena investigar.

Se ha alegado en ocasiones que el software de geometría dinámica es un obstáculo para que los estudiantes (generalmente de Secundaria) entiendan la necesidad de la demostración deductiva y aprendan a hacer este tipo de demostraciones, porque su dinamismo y la facilidad para observar ejemplos diversos hace que los estudiantes adquieran un grado de convicción de la veracidad de las conjeturas tan alto que no consideran necesaria la demostración abstracta deductiva. En estos casos el bloqueo se produce porque los profesores sólo ofrecen a sus alumnos la función de la demostración como forma de asegurar la veracidad de las conjeturas. Sin embargo, en otras investigaciones, al llegar a este punto de bloqueo, los profesores han presentado a los estudiantes la función de la demostración como forma de comprender por qué las conjeturas son verdaderas. De esta manera el profesor, aún asumiendo con sus alumnos que la conjetura es verdadera, tiene el recurso de plantear la conveniencia de entender por qué es verdadera.

En cuanto a los estudiantes (de Secundaria o universitarios) que ya han comprendido la necesidad de pasar de las demostraciones empíricas a las deductivas abstractas, el uso de software de geometría dinámica no supone el obstáculo señalado en el párrafo anterior, si bien no hay investigaciones que presenten información concluyente sobre la utilidad de este tipo de software para ayudar a estos estudiantes a mejorar su habilidad de razonamiento deductivo abstracto y la calidad de sus demostraciones.

## Referencias

- Arzarello, F. y otros (1998 a). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, en *Proceedings of the 22nd PME Conference 2*, 24-31.
- Arzarello, F. y otros (1998 b). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, en *Proceedings of the 22nd PME Conference 2*, 32-39.
- Arzarello, F. y otros (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* 34.3, 66-72.
- Balacheff, N. (1988 a). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (tesis doctoral), 2 vols. Grenoble, Francia: Univ. J. Fourier – Grenoble.
- Balacheff, N. (1988 b). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, en Pimm, D. (ed.) *Mathematics, teachers and children*. 216-235. Londres: Hodder & Stoughton
- Garuti, R.; Boero, P.; Lemut, E. (1998): Cognitive unity of theorems and difficulty of proof, *Proceedings of the 22th PME Conference 2*, 345-352.
- Harel, G.; Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Results from exploratory studies, en Schoenfeld, A.H.; Kaput, J.; Dubinsky, E. (eds.), *Research in collegiate mathematics education, III*, 234-283. Providence, EE.UU: American Mathematical Society.
- Hölzl, R. (1996): How does 'dragging' affect the learning of geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 1.2, 169-187.
- Ibáñez, M. (2001): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato* (tesis doctoral). Valladolid.: Universidad de Valladolid:
- Laborde, C.; Capponi, B. (1994): Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14.1/2, 165-209.
- Mariotti, M.A. y otros (1997): Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th PME Conference 1*, pp. 180-195.
- Marrades, R.; Gutiérrez, A. (2000): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* 44.1/2, 87-125.
- Martínez Recio, A. (1999): *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* (tesis doctoral). Granada: U. de Granada.
- Martínez Recio, A.; Díaz Godino, J. (2001): Institutional and personal meanings of mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics* 48.1, pp. 83-99.
- Parzysz, B. (1988): "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics* 19, 79-92.