Discursos en los registros algebraico y geométrico de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Nahina Dehesa de Gyves

Resumen: En años recientes han surgido formas alternativas de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) como una medida para contrarrestar el auge que han tenido los métodos analíticos en las décadas pasadas. Las razones por las que han prevalecido los métodos analíticos es tema de estudio de este artículo, así como sus repercusiones en el ámbito académico. Aunque el éxito de los métodos analíticos se analiza principalmente desde una perspectiva académica, no se puede dejar de mencionar que las formas alternativas involucran principalmente presentaciones geométricas y virtuales. Más allá de la inminente repercusión de los adelantos computacionales, en las siguientes líneas se realiza un análisis más bien teórico y se cuestiona si el auge de los métodos analíticos obedece a una manera natural de comunicarnos en contraposición con los métodos geométricos que requieren aprender nuevas formas de comunicación, y eso es lo que se cuestiona en las siguientes líneas.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, campo de direcciones, prácticas discursivas en el aula, didáctica de las EDO, análisis del discurso.

Abstract: In the past few years, several alternative learning techniques related to Ordinary Differential Equations (ODE) have emerged as an effort to counteract the popularity of analytical methods in the last decades. In this article we study the reasons that explain the dominant role of analytical methods, as well as its consequences at the collegiate mathematics level. Even though the success of analytical methods is analyzed from academic point of view, it has to be mentioned that the alternative learning techniques involve mainly geometric and virtual presentations. Besides the evident influence of computational tools, this paper focuses on a theoretical analysis and discusses if the preeminence of analytical methods is due to a natural way of communication in opposition to geometric methods that require learning new communication skills, which is the main point that is discussed in this article.

Fecha de recepción: 9 de mayo de 2005.

Keywords: ordinary differential equations, direction field, classroom discourse, didactic of differential equations, critical discourse analysis.

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo es mostrar que las representaciones geométricas y analíticas se obtienen a partir de procesos de comunicación diferentes. Para ello será necesario delimitar primeramente qué se entiende por "registro analítico" y "registro geométrico". El análisis no sólo se hará desde su aspecto semiótico, sino también desde la práctica discursiva necesaria para comunicarlos. Al cuestionar diferencias de sus respectivos discursos, se propondrán nuevas posibilidades de comunicación de las representaciones matemáticas, específicamente de las geométricas.

EL REGISTRO ANALÍTICO

El registro analítico consiste en ver la ecuación como aquella que relaciona a las variables x, y y sus correspondientes diferenciales dx y dy de manera que la expresión dx/dy sea en realidad un cociente de diferenciales. El principal objetivo de este registro es transformar la EDO mediante la sustitución matemática, a fin de reducirla a una EDO con solución conocida. Esta transformación consiste en usar herramientas algebraicas y secuenciales para comprobar si las situaciones propuestas son apropiadas para el objetivo. Este registro surgió en el siglo XVII y sigue vigente hasta la fecha.

EL REGISTRO GEOMÉTRICO

El registro geométrico permite ver las variables x y y de la EDO como vinculadas por una relación funcional: la atención ya no se centra en las propiedades algebraicas de las variables, sino en la relación de cambio existente entre la variable dependiente respecto de la variable independiente. Las representaciones gráficas propias de este registro muestran de manera global las curvas solución de las EDO que pueden ser descritas a corto o largo plazo. Aunque el punto de vista geométrico ha existido desde los inicios de las ecuaciones diferenciales, es específicamente a partir del siglo XIX cuando cobra auge este enfoque. La idea iniciada por H. Poincaré (Artigue, 1992) de trabajar con métodos adicionales a los analíticos para abordar ecuaciones no lineales fue generalizada de tal manera (Brotesky, 1920) que dio origen a un tipo de acercamiento llamado cualitativo.

Los libros de texto y la enseñanza universitaria de las EDO en el siglo XX nos mostraron que tuvieron como principal escenario el registro analítico; sólo hasta las últimas dos décadas se incrementó de manera gradual el uso de métodos geométricos (con el auge de las computadoras y las investigaciones educativas). Una de las razones que explican este auge es la existencia de estudios a favor del uso múltiple de registros de representación (Hernández, 1994; Duval, 1999). Estos estudios explican que la pluralidad de sistemas semióticos –los cuales consisten en diversas representaciones de un mismo objeto– permite aumentar la capacidad cognitiva de los sujetos. La presentación de ellos ha sido tarea de diversas propuestas, las cuales han sido materializadas en libros de texto, investigaciones educativas, uso de programas de computación en el aula, etcétera.

Ahora veamos dos métodos de solución de las EDO que emplean el registro analítico y geométrico, respectivamente.

MÉTODO DE SOLUCIÓN EN EL REGISTRO ANALÍTICO

El método de variables separables emplea el registro analítico, como lo explica Edwards (2001, pp. 31) en el cuadro 1.

El registro analítico –descrito en la columna izquierda– permite dejar huellas de los pasos realizados y las declaraciones de la columna derecha pueden apoyar dicha descripción.

MÉTODO DE SOLUCIÓN EN EL REGISTRO GEOMÉTRICO

El campo de pendientes es un método de solución que emplea el registro geométrico. Edwards (2001, p. 19) nos señala y define el campo de pendientes:

> En diversos puntos (x, y) del plano coordenado bidimensional, el valor de $f(x, y)$ determina una pendiente $m = y'(x) = f(x, y)$. Una solución de esta ecuación diferencial es una función diferenciable cuya gráfica tenga la pendiente $y'(x)$ en cada punto (x, y) por donde pase la gráfica. En algunas ocasiones, la

Cuadro 1 Método de separación de variables

Representaciones matemáticas	Declaraciones en forma secuencial
$\frac{dy}{dx} = -6xy$ (1)	Dada la ecuación diferencial 1, dividimos ambos miembros de la ecuación diferencial entre *y* y multiplicamos cada lado por *dx* para obtener...
$\frac{dy}{y} = -6xdx$	...integrando...
$\int \frac{dy}{y} = \int (-6x)dx$	....de la condición inicial *y* (0) = 7, vemos que es positiva cerca de *x* = 0, de esta manera podemos quitar los símbolos de valor absoluto...
$\ln\lvert y \rvert = -3x^2 + C$	
$\ln y = -3x^2 + C$	...así, encontramos la solución deseada.
$y(x) = e^{-3x^2+C} = Ae^{-3x^2}$	
$y(0) = 7 \Rightarrow A = 7$	
$y(x) = 7e^{-3x^2}$	

gráfica de una solución de una ecuación diferencial se denomina curva solución de la ecuación. Desde este punto de vista geométrico, una curva solución de la ecuación diferencial es una curva en el plano cuya recta tangente en cada punto (x, y) tiene una pendiente igual a $m = f(x, y)$.

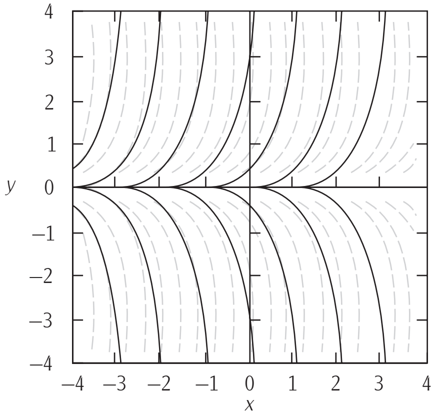
Y resume el método:

Por cada punto (x, y) de una colección representativa, se dibuja un segmento corto de recta que tenga la pendiente $m = f(x, y)$. El conjunto de todos esos segmentos se llama campo de direcciones o campo de pendientes para la ecuación $dy/dx = f(x, y)$.

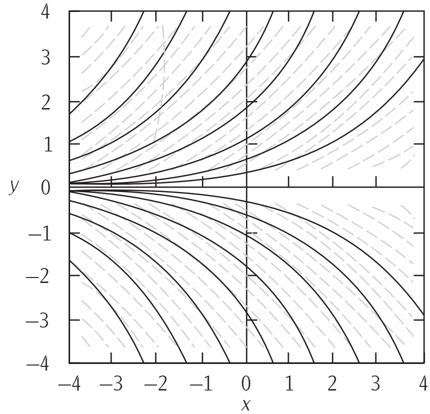
Esta descripción se resume en una imagen, éste es un ejemplo de registro geométrico. Veamos la forma en que Edwards (2001, p. 19) llega a ella.

Las gráficas 1a-1d, muestran los campos de direcciones y las curvas solución para la ecuación diferencial.

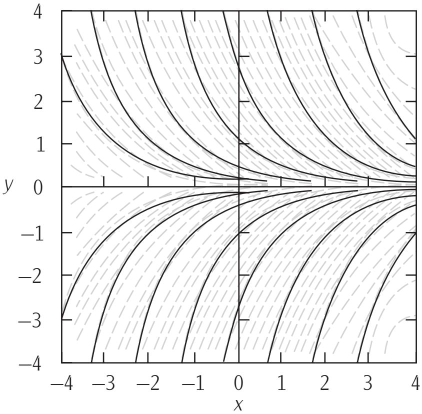
Gráficas 1a-1d Campo de direcciones de $dy/dx = ky$



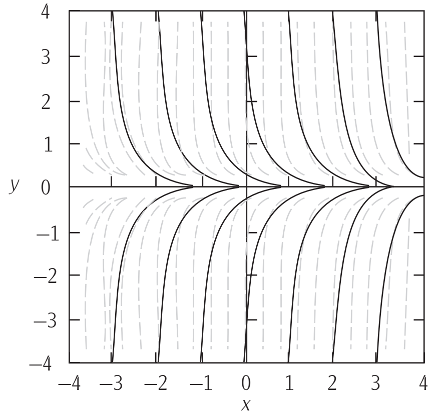
Gráfica 1a. Campo de direcciones y curvas solución para $y' = 2y$.



Gráfica 1b. Campo de direcciones y curvas solución para $y' = (0.5)y$.



Gráfica 1c. Campo de direcciones y curvas solución para $y' = 3y$.



Gráfica 1d. Campo de direcciones y curvas solución para $y' = -y$.

$$\frac{dy}{dx} = ky \tag{2}$$

con los valores $k = 2, 0.5, -1$ y -3 para el parámetro k de la ecuación 2. Observe que el campo de direcciones produce una importante información cualitativa acerca del conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial. Por ejemplo, las figuras 1a y 1b sugieren que cada una de las soluciones $y(x)$ tienden a $\pm \infty$ cuando $x \to + \infty$ si $k > 0$, mientras que las figuras 1c y 1d sugieren que cada $y(x) \to 0$ cuando $x \to + \infty$ si $k < 0$. Además, aunque el signo de k determina la dirección de aumento o disminución de $y(x)$, su valor absoluto $|k|$ parece que determina la tasa de cambio de $y(x)$.Todo esto es aparente a partir de los campos de direcciones como los de la figura 1, aun sin conocer que la solución general de la ecuación 2 está dada de manera explícita por $y(x) = Ce^{kx}$.

A diferencia del registro analítico, el registro geométrico (gráficas 1a-1d) no proporciona una serie de pasos y ello tiene algunas implicaciones. Puede repercutir en una menor evidencia del proceso de su obtención y en una dificultad mayor (comparada con el registro analítico) para reconstruir el proceso. Tal y como lo hicimos para el registro analítico, veamos el desarrollo en torno a una EDO específica. Nagle (2001, p. 16) expone lo que se aprecia en el cuadro 2.

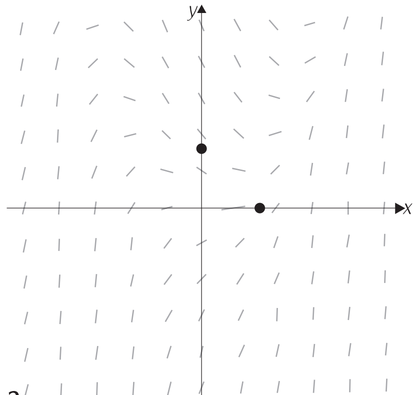
En su carácter de material escrito, el lector puede leer la práctica discursiva (columna derecha) asociada al registro geométrico (columna izquierda) las veces necesarias para lograr su comprensión (el cuadro 2 permite ser manipulado de la columna izquierda a derecha y viceversa). Esto no sucede con el discurso utilizado en el aula. En el ámbito escolar generalmente lo que se escribe en el pizarrón es el registro sin la práctica discursiva (por ejemplo, columnas izquierda de los cuadros 1 y 2); al no quedar huella de lo dicho, es factible que el estudiante no pueda recordar las partes del método ya transmitido.

Al intentar reproducir los métodos de solución de EDO a partir de los registros analítico y geométrico, existe mayor dependencia de prácticas discursivas en el registro geométrico. Veamos ejemplos adicionales en torno a los cuales podamos reflexionar sobre el mismo punto.

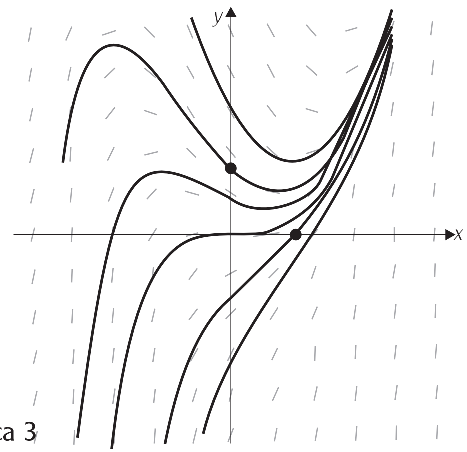
El campo de pendientes origina otros conceptos propios de la teoría cualitativa de las EDO, como se describe a continuación:

En el campo de la gráfica 4, hay una línea trazada sobre puntos que tienen una misma pendiente:

Cuadro 2 Método de campo de pendientes



Gráfica 2



Gráfica 3

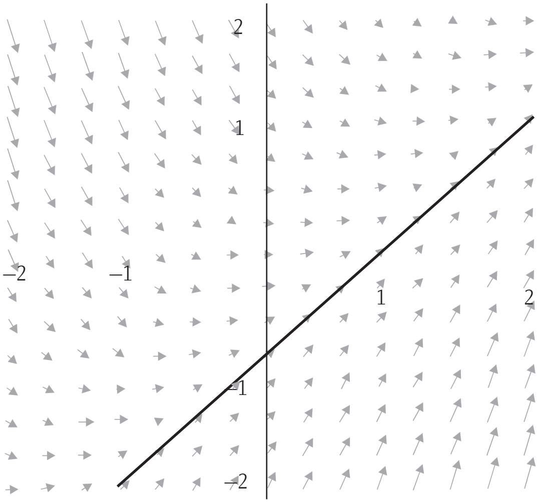
Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y \qquad (3)$$

La gráfica de la solución de la ecuación 3 que pasa por el punto (–2,1) debe tener pendiente $(-2)^2 - 1 = 3$ en ese punto, y una solución que pase por (–1,1) debe tener pendiente cero en ese punto.

Un bosquejo con pequeños segmentos de recta trazados en diversos puntos del plano xy para mostrar la pendiente de la curva solución en el punto correspondiente es un campo de direcciones de la ecuación diferencial. Como el campo de direcciones indica el "flujo de las soluciones", facilita el trazo de cualquier solución particular (como la solución de un problema con valor inicial). En la gráfica 2 bosquejamos el campo de direcciones de la EDO y en la gráfica 3 trazamos varias curvas solución.

Gráfica 4 Ejemplo de isoclina



$y' = x - y$

Las isoclinas son curvas que, en principio, no están trazadas en el campo. La gráfica 4 muestra un ejemplo de isoclina, la cual es una recta, y los puntos que la conforman se pueden definir como “puntos del campo que tienen la misma pendiente”.

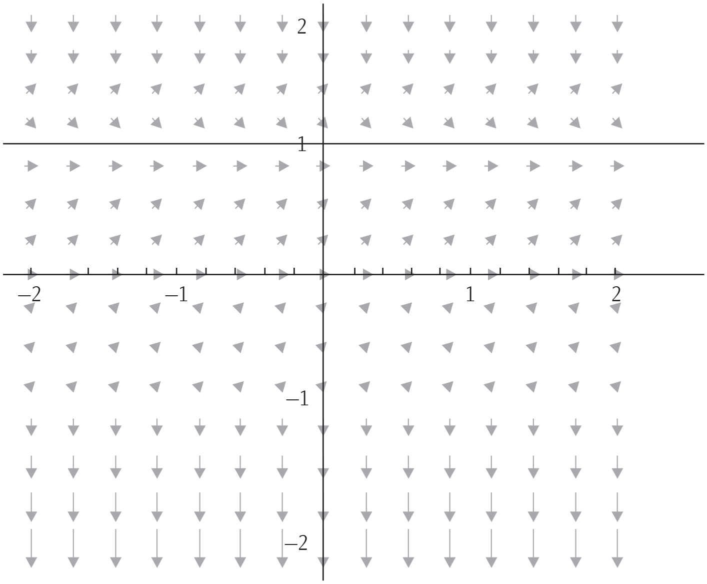
En el campo de pendientes descrito en la figura 4 se puede observar lo siguiente:

a) Antes de trazar la isoclina el campo conformado por una serie de pendientes no necesariamente indica que están ordenadas de alguna manera.
b) La isoclina en el campo de pendientes muestra que un conjunto de rectas tiene la misma pendiente.

¿Cómo se pasa de uno a otro de los incisos? Las dos representaciones, el campo de pendientes y la isoclina están en el registro geométrico; sin embargo, no existe evidencia que describa el tratamiento realizado. Se puede objetar que, al señalar la isoclina, es clara la idea de que las pendientes sobre ella son iguales; pero detengámonos un momento: ¿implica ello haber proporcionado un método de obtención para futuras y nuevas isoclinas? Por lo pronto, un punto sobre el que hay que reflexionar es la existencia de una perspectiva adicional al aspecto semiótico de los registros, la cual está vinculada con la práctica discursiva necesaria para la obtención de las representaciones matemáticas.

Otro ejemplo relacionado con el campo de pendientes se refiere a las isoclinas

Gráfica 5 Ejemplo de puntos de equilibrio



específicas que corresponden a puntos de equilibrio, los cuales son puntos del plano en donde es nulo el valor de la constante a la que es igual la ecuación diferencial. La gráfica 5 muestra algunas de las isoclinas más evidentes, que son las rectas paralelas a algunos de los ejes, y los puntos que las conforman tienen pendiente cero.

Nuevamente la pregunta es ¿si se ha proporcionado la imagen de punto de equilibrio, se ha dado el método de su obtención? Probemos. Encontremos las isoclinas y puntos de equilibrio de la gráfica 2.

Hagamos una primera recapitulación de lo analizado hasta ahora. Se ha mencionado el carácter secuencial inherente al registro analítico, la carencia de ese carácter en el registro geométrico y, por último, se ha observado la necesidad de proporcionar pasos secuenciales (mediante prácticas discursivas pertinentes) en los métodos de solución del registro geométrico. Ejemplificando, se puede recurrir al carácter secuencial del registro analítico para describir los pasos realizados en la obtención de la isoclina de la gráfica 4.

La EDO correspondiente al campo de pendientes es:

$$dy/dx = x - y$$

y la expresión "misma pendiente" implica la acción de representar $dy/dx = c$, (con c constante). Entonces, las isoclinas que tienen pendiente igual a 1 equivale a expresarlas como:

$$x - y = 1 \text{ o lo que es lo mismo } y = x - 1$$

Esta ecuación corresponde a la recta mostrada en la gráfica 4.

En los siguientes párrafos el objetivo es incursionar con mayor detalle en el análisis de prácticas discursivas que auxilien en la transmisión de conceptos necesarios para la comprensión de las EDO y sus soluciones.

EL AULA

En el análisis del discurso en torno a la transmisión de los conceptos asociados a las EDO no pueden faltar las definiciones matemáticas de los libros. Una práctica válida en el aula es su transcripción en el pizarrón. Veamos algunas definiciones que son prerrequisitos para comprender las EDO en el cuadro 3.

El profesor que transcribe estas definiciones en el pizarrón muy probablemente "asocie" a las descripciones anteriores una imagen (cuando sea el caso) o proporcione algún ejemplo para precisar lo dicho. Sin embargo, cada una de las descripciones anteriores se obtiene como resultado de realizar pasos secuenciales que requieren un análisis similar al que hemos estado utilizando a lo largo de este artículo. Conviene seguir analizando un poco más acerca de la necesidad de tener una actitud consciente ante la práctica discursiva empleada al transcribir las definiciones en el pizarrón.

En sus obras, Mercer (2001) emplea el término *actuante* para describir la participación activa del alumno en su aprendizaje. Sus investigaciones van encaminadas a dar un carácter más dinámico al empleo de prácticas discursivas. Una consecuencia de esta postura es que, si se espera una respuesta del alumno a lo largo del discurso empleado por el profesor, la interacción esperada es más parecida a un diálogo. Definamos más.

Un caso de empleo de una declaración actuante es decir "pendiente positiva es" y al mismo tiempo trazar y poner:

$$m > 0 \qquad /$$

Cuadro 3 Algunas definiciones empleadas en el aula

Algunas definiciones empleadas en torno al concepto de EDO	
Intervalo	Ciertos conjuntos de números reales, llamados *intervalos*, ocurren con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de línea. Por ejemplo. Si $a < b$, el *intervalo abierto* de a a b consiste en todos los números entre a y b y se denota por el símbolo (a, b). Usando la notación para la construcción de conjuntos, podemos escribir. $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ J. Stewart (1999, p. A2).
Función	Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento llamado $f(x)$ de un conjunto B. J. Stewart *et al.* (2001, p. 132) Si f es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $\{x, f(x)) \mid x \in A\}$ Esto es, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la que corresponde a la ecuación $y = f(x)$. J. Stewart *et al.* (2001, p. 139)
Función creciente	f *crece* en un intervalo I si $f(x_1) < f(x2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I. J. Stewart *et al.* (2001, p. 143)
Función decreciente	f *decrece* en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I. J. Stewart *et al.* (2001, p. 143)
Ecuación diferencial	Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una igualdad en la que aparecen la variable independiente x, la variable dependiente y y las primeras n derivadas de y. Así, una forma general para una ecuación de orden n sería: $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$ R. Nagle *et al.* (2001, p. 6).
Solución de EDO	Una función $\phi(x)$ tal que, al sustituirla en vez de y en la ecuación $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$ satisface la ecuación para toda x en el intervalo I es una solución explícita de la ecuación en I. R. Nagle *et al.* (2001, p. 7).

En el ejemplo anterior se utiliza el lenguaje oral al mismo tiempo que se escribe en el pizarrón. Es decir, se emplea la práctica discursiva para denotar una acción.

El cuadro 4 muestra algunas declaraciones actuantes en torno a las representaciones matemáticas asociadas a las definiciones del cuadro 3. Antes de pasar al cuadro, precisemos que en él se hace uso de la palabra "señalar" en el sentido de dar mayor énfasis a la representación, por ejemplo, al adicionar al discurso un cambio de tono de voz, atención ocular o señalamiento manual.

En resumen, se cuestiona la posibilidad de convertir las definiciones en "actuantes" al realizar acciones concretas sobre las representaciones matemáticas a lo largo del proceso de descripción.

El proporcionar las definiciones, los ejemplos o cualquier práctica discursiva en el aula que asocie sólo una imagen al final del discurso provoca que dicha imagen pueda convertirse en estática ante la imposibilidad de operar las partes con las cuales fue conformada la definición y, con ello, se fomenta una actitud pasiva por parte del alumno ante el discurso del profesor.

Sólo se han mencionado algunas de las declaraciones que se pueden utilizar en torno a las definiciones del cuadro 3 para desarrollar una práctica discursiva que cuente con mayor número de declaraciones actuantes; se han elegido las definiciones de "función creciente" y "función decreciente" (véase el cuadro 5).

Realizar las acciones anteriores implica dejar "huellas" que, aunque no lleguen a ser escritas (si sólo se emplean señas manuales, posiblemente aunado con tonos de voz que destaquen la asociación), pueden proporcionar al alumno herramientas adicionales a la práctica discursiva, lo que le permite recapitular el proceso realizado.

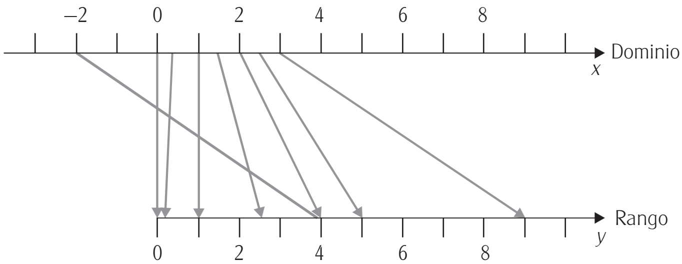
Observar las dificultades que provoca el registro geométrico no ha sido tarea fácil. La asociación con su contexto de comunicación es inevitable por lo menos en dos sentidos: comunicación oral por medio del profesor, comunicación escrita mediante libros de texto o exámenes. Se pretende evidenciar que no es suficiente una enseñanza bien estructurada y, para ello, no basta la observación de los profesores en su práctica docente, sino que se requiere ampliar la observación a situaciones en las que se desarrolla el registro geométrico. En las líneas siguientes se mostrarán las realizadas en un curso y dos exámenes.

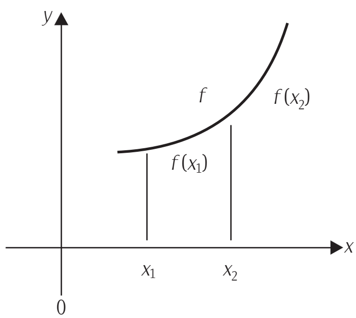
METODOLOGÍA

El diseño experimental se realizó en la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa en el periodo comprendido de 2001 a 2004; se emplearon entrevistas,

Cuadro 4 Algunas declaraciones actuantes

<table>
<tr><th>Concepto</th><th>Representación matemática</th></tr>
<tr><td>Intervalo</td><td>

AL DECIR: “el intervalo abierto de 0 a 1 consiste en todos los números entre 0 y 1...” LA ACCIÓN ASOCIADA ES: señalar los puntos que están entre 0 y 1.</td></tr>
<tr><td>Función</td><td>

AL DECIR: “la función es la regla que asigna a un elemento del dominio exactamente un elemento del rango: el valor de 4...” LA ACCIÓN ASOCIADA ES: señalar el –2 del dominio de la figura, con el 4 del rango.</td></tr>
<tr><td>Función creciente</td><td>

AL DECIR: “si $f(x_1) < f(x_2)$....”, LA ACCIÓN ASOCIADA PUEDE SER: señalar cuáles son las magnitudes $f(x_1)$ y $f(x_2)$ de la figura.</td></tr>
</table>

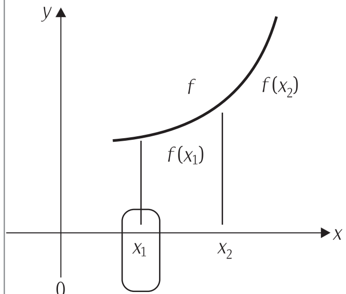
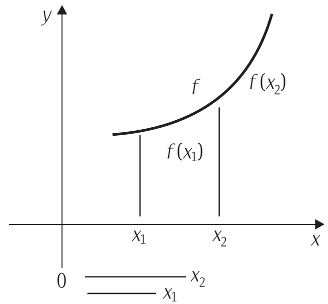
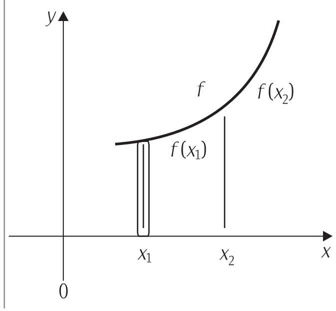
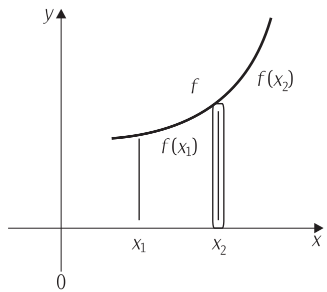
Cuadro 4 Algunas declaraciones actuantes (conclusión)

Concepto	Representación matemática
Ecuación diferencial	$\frac{d^2y}{dx^2}+y^3=0$ $\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^3$ $\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}=\cos x$ AL DECIR: "Una ecuación diferencial de orden 2…", LA ACCIÓN ASOCIADA PUEDE SER: señalar el exponente 2 o precisar que las ecuaciones anteriores son ejemplos de ellas…
Solución de la EDO	$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x^2}y=0.$ $(2-2x^{-3})-\frac{2}{x^2}(x^2-x^{-1})=(2-2x^{-3})-(2-2x^{-3})=0$ AL DECIR: "Una función $\phi(x)=x^2-x^{-1}$ al sustituirla en la ecuación diferencial…", LA ACCIÓN ASOCIADA PUEDE SER: señalar que $(2-2x^3)$ es $(2-2x^{-1})$ es $\frac{d^2y}{dx^2}$, que (x^2-x^{-1}) es y y que al realizar la sustitución da cero…

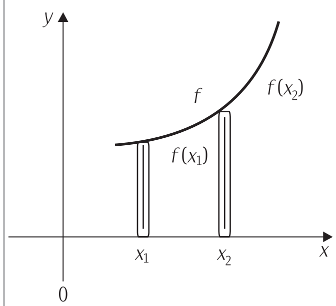
exámenes, observaciones de prácticas docentes (incluida la propia). En esta ocasión se presentará parte de la información recabada dividida en tres partes: un primer examen, que se aplicó a un grupo previo a las clases de EDO (podemos llamarle examen diagnóstico); en segundo lugar se encuentran propiamente las observaciones de una clase y, por último, un examen que evaluó la instrucción de la clase observada.

Para personas experimentadas en el área de matemáticas puede pasar inadvertido el proceso por el cual se articulan representaciones algebraicas y geométricas, y pueden verlo como una articulación natural en el ambiente natural de una clase de EDO; aunado a que el profesor se encuentra condicionado a tiempo y espacios limitados, permite pensar que una clase expositiva puede ser el medio más adecuado para su transmisión. Veremos algunos de los datos que cuestionan dicha práctica.

Cuadro 5 Práctica discursiva en torno a las definiciones de función creciente y decreciente

Lenguaje oral	Señalar lo que está dentro de []	Lenguaje oral	Señalar sobre:	En resumen:
x_1		$X_1 < x_2$		Asociarle magnitudes respectivas a las x y compararlas.
$f(x_1)$		$f(x_2)$		Asociarle magnitudes respectivas a las $f(x)$.

Cuadro 5 Práctica discursiva en torno a las definiciones de función creciente y decreciente (conclusión)

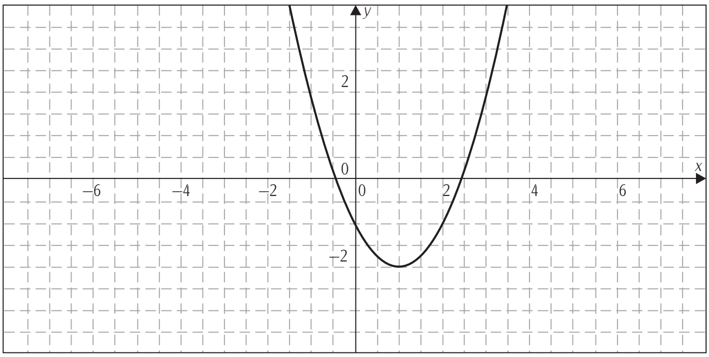
Lenguaje oral	Señalar lo que está dentro de []	Lenguaje oral	Señalar sobre:	En resumen:
$f(x_1) < f(x_2)$		Comparar las $f(x)$ y repetir desde el inicio la declaración total.		

EXAMEN DIAGNÓSTICO

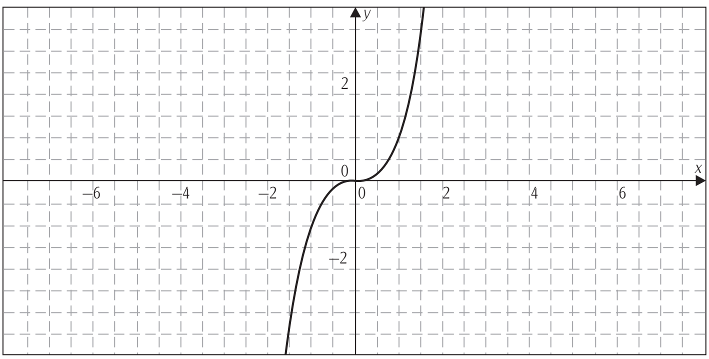
Ya se ha mencionado que, a diferencia de los métodos analíticos, el pensamiento que actúa en los métodos geométricos no muestra una ruta de acción específica, o más bien, no hay registro de los pasos que se deben dar. Por otro lado, las representaciones analíticas sí muestran una secuencia de acciones. Veamos cómo repercuten estas características en el alumno en un examen previo al curso de EDO: El examen consistió en dos preguntas que tenían que ver con cada registro geométrico y analítico, respectivamente:

I) Para las gráficas de las siguientes funciones:
   a) Superpón con un trazo la parte donde es creciente
   b) ¿Qué dominio tiene?

Gráfica A



Gráfica B



II) Dada la siguiente serie de pasos:

$$\frac{dx}{dt} = 4x$$
$$\frac{1}{4}\frac{dx}{x} = dt$$
$$\int \frac{1}{4} dx = \int dt$$
$$\frac{1}{4}\ln|x| = t + c$$
$$\ldots$$

Reprodúcelos para la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 10x$$

Como se puede ver, las preguntas se realizaron en torno a cuestiones familiares en el registro geométrico y cuestiones novedosas del registro analítico (relacionadas con los métodos de solución de las EDO que en ese momento no se habían proporcionado). A pesar de la aparente ventaja del registro geométrico por emplear términos familiares, el registro analítico cuenta con la ventaja de señalar de manera pausada las acciones que hay que seguir, es decir, las representaciones escritas son suficientes para generar la acción. La pregunta es: ¿es la reproducción de pasos analíticos una tarea que puede ser llevada con mayor éxito?

EL CURSO

El curso programado para videograbar y analizar, fue Curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Trimestre 03-I de la UAM-Iztapalapa.

Antes de videograbar la clase, se estudiaron algunas posibilidades de exposición y se seleccionó a un profesor que preparaba con detenimiento sus clases (empleaba hojas previamente trabajadas y no sólo el libro de texto). Se acordó previamente con el profesor que su sesión se grabaría y no se realizó recomendación alguna de nuestra parte. El objetivo de observar a un profesor que fuera claro en su exposición era analizar si una buena clase expositiva bastaba para lograr el aprendizaje de los métodos geométricos. La observación se hizo en dos sesiones de hora y media con un promedio de audiencia de 50 alumnos. Los temas que impartió el profesor en el tiempo mencionado fueron: campo de pendientes y curvas solución de EDO, un ejemplo del método de separación de variables para una EDO.

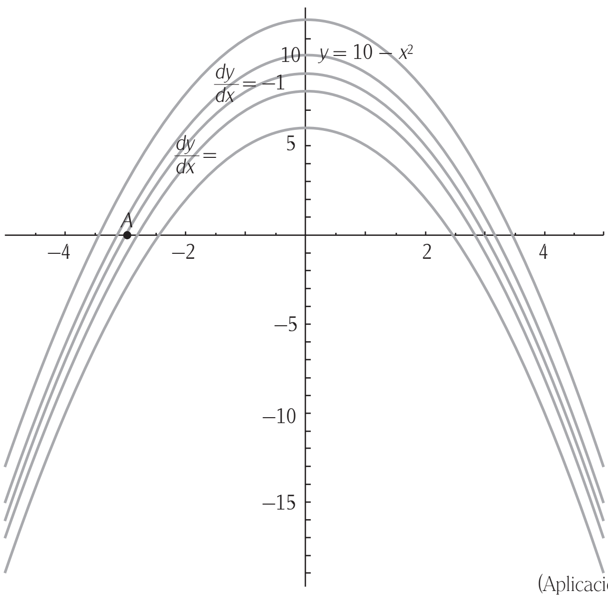
EXAMEN DEL CURSO

En la fase de evaluación, el profesor elaboró un examen que incluía otros temas adicionales al campo de pendientes y curvas solución. A continuación se reproduce la parte correspondiente a los temas de interés de esta investigación:

Considera la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = 9 - x^2 - y$$

a) Dibuja algunas pendientes sobre *cada* isoclina.
b) Usando el campo de pendientes, bosqueja un "pedacito" de la única *curva solución* de la EDO que pasa por el punto A = (–3,0).



(Aplicación: Trimestre 03-I)

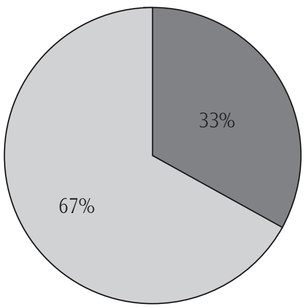
Resolver estas preguntas implica reproducir el método de solución en todas sus partes: igualar la EDO a una constante, despejar, graficar, ubicar puntos, trazar rectitas con determinadas pendientes, repetir sistemáticamente los pasos anteriores, visualizar tendencias, entre otros pasos. Se pretende ver si es suficiente una clase expositiva clara para reproducir el método sin ayuda adicional.

RESULTADOS

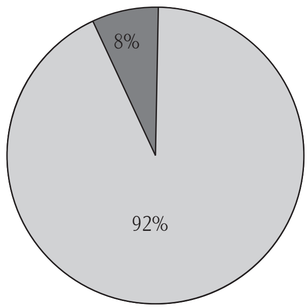
Las preguntas 1 y 2 del examen diagnóstico evalúan respectivamente aspectos geométricos y analíticos.

Los resultados fueron:

Geométrico	Analítico
Identifica curvas y dominios en que la función es creciente	Emplea el método de variables separables para resolver una ecuación diferencial nueva



Total:	39
Aprobados:	33%
Reprobados:	67%
Promedio grupal:	46.1



Total:	39
Aprobados:	92%
Reprobados:	8%
Promedio grupal:	92.3

(Aplicación: Trimestre 03-I)

Analizando los resultados, los alumnos prácticamente no tuvieron problema en señalar la parte creciente de la función cuadrática (primer cuadrante), pero sí hubo problema para señalar cuándo es creciente en la cúbica (para 92%); tendieron a dar dos respuestas: ignorar el tercer cuadrante o decir que es creciente todo el tiempo. Para el problema de encontrar el dominio, sólo 36% pudo relacionar la parte de la gráfica con intervalos para las dos gráficas. Con respecto a la resolución del método analítico, 92% lo pudo reproducir.

Se puede cuestionar si el éxito al identificar como creciente el primer cuadrante de la función cuadrática obedece a procesos de identificación de esta imagen con la palabra "creciente" (imagen muy empleada en cursos anteriores). No sucede lo mismo con el tercer cuadrante de la cúbica, que requiere otros recursos adicionales a la imagen para identificarla. El problema de "descomponer" una curva en la parte del dominio donde es creciente tiene que ver con un pensamiento que relaciona varios pasos: la curva con su dominio, la imagen de función creciente, la relación entre estos dos pasos; es decir, no es sólo un pensamiento secuencial que codifica e identifica.

Podemos ver que, a diferencia de los métodos analíticos, el pensamiento que actúa en los métodos geométricos no muestra una ruta de acción específica, o más bien, no hay registro de los pasos que se deben dar. Una suposición inicial es que eso explica el porqué se tiene poco éxito con los métodos geométricos.[1]

Se puede ver que la reproducción de pasos analíticos de la segunda parte del examen es una tarea que puede ser llevada con mayor éxito, aun con la ausencia de prácticas discursivas, ya que se señalan de manera pausada las acciones que hay que seguir, es decir, las representaciones escritas son suficientes para generar la acción. No sucede lo mismo con las representaciones geométricas. En resumen, la balanza se inclinó a que pesaba más la dificultad de desarrollar un método de solución en el registro geométrico, aunque se tratase de conceptos familiares para el alumno, en comparación con la dificultad de un problema nuevo pero analítico.

EL CURSO

Como se había previsto, la clase fue fluida y preparada: el profesor utilizó gises de colores para distinguir pendientes para una misma isoclina. En aproximadamente 50 minutos usó el método de campo de pendientes para resolver una EDO. El profesor describe de manera oral los pasos necesarios para llegar al campo de pendientes puestas en el pizarrón, emplea declaraciones y afirmaciones en torno al campo de pendientes, pero no necesariamente los escribe en el pizarrón.

[1] Existen los trabajos de T. Eisenberg y T. Dreyfus (1991) en torno al concepto de derivada; comparan el aprendizaje de sus aspectos geométrico y analítico; concluyen que presenta mayor dificultad el aprendizaje geométrico que el analítico.

Al construir el campo de pendientes, se realizaron pasos intermedios que fue borrando para introducir los nuevos pasos, es decir, se prestó mayor atención a que no se interrumpiera el discurso, a pesar de no dejar rastro de los pasos empleados para trazar lo dicho en el discurso.

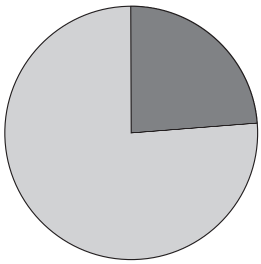
Las observaciones realizadas a los alumnos se relacionan con cierta dificultad para seguir la instrucción del profesor. El grupo se dividió en dos sectores: los que no tomaban nota por seguir el discurso del profesor y los que se dedicaban a copiar del pizarrón sin poner atención al discurso.

En la observación de los métodos analíticos se concluyó que el discurso funcionaba como un lenguaje paralelo a las representaciones analíticas, éstas confirmaban lo expuesto con las representaciones del pizarrón.

EXAMEN DEL CURSO

Los resultados del examen son:

24. 24% (8 de 33 estudiantes) logró construir campos de pendientes y curvas solución.



(Aplicación: Trimestre 03-I)

El uso de un discurso en el que se informe los pasos, se trace el campo de pendientes y se encuentren curvas solución parece no ser suficiente para la adquisición del nuevo aprendizaje. Emplear un tipo de prácticas discursivas en la que se proporciona muchas declaraciones en poco tiempo asume que el alumno entiende que una curva solución depende de la variable independiente en términos de trazos, que se cuenta con la noción básica de función, y que existe cierta monotonía en el trazo de la curva. Pero en entrevistas realizadas a alumnos en 2001 y en lo observado en el aula en 2003, se vio que esto no necesariamente es cierto; estos resultados coinciden con lo encontrado por Trigueros (2001). Estos resultados permitieron cuestionar si la relación "práctica discursiva –representación geométrica" era la variable que se debía observar.

CONCLUSIONES

Se ha visto que una toma de conciencia de prácticas discursivas pertinentes permite mejorar la comunicación en el aula. Incluso a falta de ellas, no se impide la transmisión del registro analítico. Después de lo expuesto hasta estos momentos, esta tendencia se explica por la propia naturaleza del registro analítico, que permite que las operaciones en ella sean más parecidas a transcripciones. No sucede lo mismo con el registro geométrico. Las representaciones geométricas no describen por sí mismas un orden de operatividad sobre ellas, por lo que existe una mayor dependencia de apoyos intermedios para dejar huella del proceso. Se han tenido pruebas de que comunicarse sin una buena aplicación de una práctica discursiva sólo es tolerable en el registro analítico y las implicaciones de una falta de prácticas discursivas acordes a representaciones geométricas repercuten en la reproducción deficiente de sus métodos de solución. Este análisis permite explicar el auge de los métodos analíticos sobre los geométricos.

Se ha incursionado en un tipo de investigación que no sólo centra la atención hacia el aspecto semiótico de las representaciones matemáticas como principal causante del aprendizaje. Esto sucede, por ejemplo, cuando se atribuye, como principal elemento de conceptualización, la existencia de un mayor número de representaciones del mismo objeto; también cuando, a partir de propiedades intrínsecas de las representaciones geométricas como el ser "atractivas" o "potencialmente novedosas con el uso de software", se infiere que ello repercutirá en un manejo más fácil de aprenderlas; esto no necesariamente es cierto.

La perspectiva de investigación no sólo incluye la participación del profesor como una variable observable; la delimita en términos de su interacción con las representaciones matemáticas que maneja en el pizarrón. Este tipo de interacción es parecido a un proceso de desarrollo por medio del diálogo, ya que no se realiza sólo por la transmisión discursiva, sino mediante declaraciones actuantes dentro del ambiente natural del aula. Aunque su carácter dinámico y abierto a posibilidades de cambio no siempre produce el camino más corto ni lineal, sí es oportuno considerarlo. Los métodos de resolución de las EDO, como los conocemos en la actualidad (materializados en las definiciones matemáticas), son el resultado de abstraer y representar matemáticamente durante largos periodos de tiempo históricos. Esto hay que considerarlo en el momento de estar en el aula y son las declaraciones actuantes las que permiten apoyar el proceso.

Como se ha mencionado, los cursos de EDO emplean principalmente definiciones matemáticas para transmitir sus conceptos y la trascripción de ellas en el pizarrón es una práctica común que, sin embargo, no siempre es exitosa. La falta de éxito es atribuible principalmente a una falta de conciencia de la distinción entre prácticas discursivas empleadas en libros (versión escrita) con respecto a las utilizadas en forma oral. Las definiciones matemáticas cuentan con una estructura discursiva final que muestra a dónde debemos dirigirnos y qué hay que considerar si es necesario reestructurarlas en términos de declaraciones actuantes; es decir, propiciar actuaciones simultáneas al discurso que fomenten la construcción de los conceptos matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1992), "Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices", en G. Harel y E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy,* Washington D.C, Mathematical Association of America.

Blanchard, P., R. Devaney y G. Hall (1998), *Ecuaciones diferenciales,* Boston University/International Thompson.

Brodetsky, S. (1920), "The Graphical Treatment of Differential Equations", *The Mathematical Gazette,* vol. X, núm. 146 (mayo), editado por W.J. Greenstreet, M.A., con la colaboración de F.S. Macaulay, M.A; D.Sc, y E.T. Whittaker, M.A., F.R.S. London, G. Bell e Hijos.

Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales,* Colombia, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Eisenberg, T. y T. Dreyfus (1991), "On the Reluctance to Visualize in Mathematic", *In Visualization in Teaching and Learning Mathematic,* núm. 19, editado por W. Zimmermann y S. Cunningham, MAA.

Edwards, C. (2001), *Ecuaciones diferenciales,* 2a. ed., México, Pearson Education.

Hernández, A. (1994), "Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias", *Cuaderno de Investigación,* núm. *30,* Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Mercer, N. (2001), *Palabras y mentes,* Paidós Ibérica.

Nagle, R., E. Saff, y A. Snider (2001), *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera,* Pearson Educación.

Stephan, M. y C. Rasmussen (2002), "Classroom Mathematical Practices in Differential Equations", *Journal of Mathematical Behavior*, núm. 21, pp. 459-490.
Stewart, J. (1999), *Cálculo diferencial e integral*, International Thomson Editores.
Stewart, J., L. Redlin y S. Watson (2001), *Precálculo*, 3a. ed., International Thomson Editores.
Trigueros, M. (2001), "Analysis of Students' Strategies when Solving Systems of Differential Equations in a Graphical Context", Proceedings of the Twenty Third Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education-North American chapter XXIII, Snowbird, Utah, octubre, pp. 529-537.

DATOS DE LA AUTORA

Nahina Dehesa de Gyves
Estudiante de doctorado del Departamento de Matemática Educativa
del Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional, México
ndehesa@hotmail.com