Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes

Un estudio exploratorio en estudiantes españoles de Psicología

Carmen Díaz e Inmaculada de la Fuente

Resumen: Presentamos un estudio sobre resolución de problemas bayesianos por parte de estudiantes de Psicología antes y después de la enseñanza de la probabilidad condicional. Analizamos también el tipo de errores cometidos en la resolución de los problemas. Concluimos que estos problemas son de una alta complejidad para los estudiantes, incluso cuando se proporcionan los datos en formato frecuencial. Las tareas frecuenciales no son tan sencillas como apuntan algunos autores, excepto en el caso de que los alumnos hayan recibido una instrucción específica.

Palabras clave: Resolución de problemas bayesianos, dificultades de los estudiantes.

Abstract: We present an exploratory study of psychology students' competence in solving Bayesian problems before and after teaching them conditional probability, and analyse the errors in the solving process. We conclude that these problems are highly complex for these students, even if the data are given in frequency format, and that frequencies tasks are not so simple, unless the students are explicitly taught to solve these kinds of tasks.

Keywords: Solving Bayesian problems, students' difficulties.

INTRODUCCIÓN

El cálculo de probabilidades condicionales inversas mediante el teorema de Bayes es fundamental en las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información. Este tipo de razonamiento es muy importante en tareas profesionales, como el diagnóstico, evaluación, toma de decisiones y apli-

Fecha de recepción: 8 de febrero de 2006.

cación de la inferencia estadística en la investigación empírica. Aun así, actualmente hay una tendencia a suprimir o reducir la enseñanza del teorema de Bayes en la educación secundaria y en los cursos de análisis de datos de nivel universitario (véase Moore, 1997), debido, posiblemente, a la influencia de las primeras investigaciones en psicología que trataron el razonamiento condicional (Tversky y Kahneman, 1982; Bar-Hillel, 1997) y sugirieron la dificultad del razonamiento bayesiano y la existencia de sesgos respecto a él, tanto en estudiantes como en profesionales (véase revisión en Koehler, 1996).

En este trabajo analizamos tanto estas investigaciones como otras recientes que sugieren que los estudiantes pueden aprender a resolver problemas basados en el teorema de Bayes, siempre que se elijan unos instrumentos didácticos adecuados. Asimismo, llevamos a cabo un estudio cualitativo del proceso de resolución de estos problemas en una muestra de estudiantes de primer año de Psicología que habían estudiado el teorema, con el propósito de describir los puntos principales de dificultad en este proceso y guiar a los profesores en la enseñanza de estrategias de resolución de estos problemas.

ANTECEDENTES

Falacia de las tasas base

Los problemas bayesianos fueron investigados por Tversky y Kahneman (1982) como parte de su trabajo sobre la heurística de representatividad y la falacia de las tasas base. Los autores estaban interesados en nuestra percepción de riesgos y probabilidades a partir de datos dados por frecuencias relativas. Un problema clásico usado en estas investigaciones (variando los porcentajes o los distractores) es el siguiente:

Ítem 1. *Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Un testigo identificó el taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo en las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en 80% de las ocasiones y fallaba en 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?*

a) 80%; *b)* 15%; *c)* $(15/100) \times (80/100)\%$; *d)* 41%

La mayoría de los participantes en las investigaciones de Tversky y Kahneman y otras que usan el mismo tipo de tarea eligen (a) como respuesta (estimación que coincide con la fiabilidad del testigo), aunque al resolver el problema mediante el teorema de Bayes se obtiene una probabilidad igual a 0.41 de que el taxi implicado sea Azul. En el enunciado hay tres informaciones relevantes para hacer la predicción: *1)* las tasas base o probabilidad *a priori* del suceso, en este caso 15%; *2)* la evidencia específica del caso individual (lo que dijo el testigo); *3)* la precisión esperada de la predicción (el número de aciertos del testigo, 80%). Una regla fundamental en estadística es que la precisión esperada queda modificada por la evidencia y la probabilidad *a priori,* pero, en lugar de usar esta regla, las personas se fijan solamente en la fiabilidad del testigo (Tversky y Kahneman, 1982). Los autores denominan *falacia de las tasas base* al hecho de ignorar la probabilidad *a priori* del suceso en la población en la toma de decisiones en problemas que involucran la probabilidad inversa. Este tipo de razonamiento también se ha encontrado en investigaciones en educación matemática (Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998).

Estrategias en la resolución de problemas bayesianos

Trabajos posteriores de investigadores en educación matemática indican que el análisis realizado desde la psicología es incompleto, pues hay otros factores que afectan la capacidad de resolver los problemas bayesianos, como las estrategias o la manera en que se da el enunciado. Totohasina (1992) analiza las estrategias intuitivas de 67 estudiantes de secundaria al enfrentarse a un problema bayesiano, la más frecuente de las cuales fue cambiar el espacio muestral de referencia y a continuación aplicar la regla de Laplace, lo que implica, en la práctica, la fórmula de Bayes. Sin embargo, sólo 25% de los alumnos es capaz de dar una respuesta correcta.

Posteriormente, Totohasina realiza con 65 alumnos un experimento de enseñanza de la probabilidad condicional, en el que no se introduce formalmente el teorema de Bayes, aunque se plantean y resuelven problemas de probabilidad inversa basándose en árboles y tablas de doble entrada. Aproximadamente la mitad fueron capaces de construir un árbol directo de probabilidad, en el que se destaca el aspecto secuencial de los experimentos y llegan a la fórmula de la probabilidad total; pero sólo 9 alumnos llegan a la solución correcta de los problemas (probabilidad inversa).

Para tratar de explicar las dificultades en este tipo de problemas, Totohasina analiza los procedimientos y la representación elegida para resolver el problema. Observa que, al usar una tabla de doble entrada, se dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de algunos problemas, porque lo que queda más visible es la intersección de los dos sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. Parece que el uso de un árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicional, sobre todo cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo). Sin embargo, en ambos casos los alumnos confunden con frecuencia el papel de condición y condicionado en una probabilidad condicional y, por tanto, confunden una probabilidad condicional con su inversa (falacia de la condicional transpuesta, descrita en Falk, 1986; Batanero y Sánchez, 2005).

Problemas dados por frecuencias "naturales"

Una nueva tendencia en la investigación sugiere que los cálculos con problemas bayesianos son más sencillos cuando la información se da en formato de frecuencias absolutas, en lugar de usar probabilidades, porcentajes o frecuencias relativas (Cosmides y Tooby, 1996; Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995).

Los autores denominan a estas frecuencias *frecuencias naturales*, porque se asemejan más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de *muestreo natural* a lo largo de nuestra experiencia (por ejemplo, un médico en su consulta). Cuando la información se ofrece en términos de frecuencia, el cálculo de la probabilidad *a posteriori* es más natural, porque el sujeto no tiene que aplicar toda la complejidad del teorema de Bayes, sino sólo tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema se transforma en un problema simple de probabilidad. Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema (Cosmides y Tooby, 1996).

Ítem 2. *100 de cada 10 000 personas tienen una enfermedad X. Se ha desarrollado una prueba para diagnosticarla. La prueba da positivo en 80 de cada 100 personas que tienen la enfermedad, pero también en 950 de cada 9 900 que están sanas. Supongamos que la prueba da positivo en 103 personas. ¿Cuántas estarán realmente enfermas?*

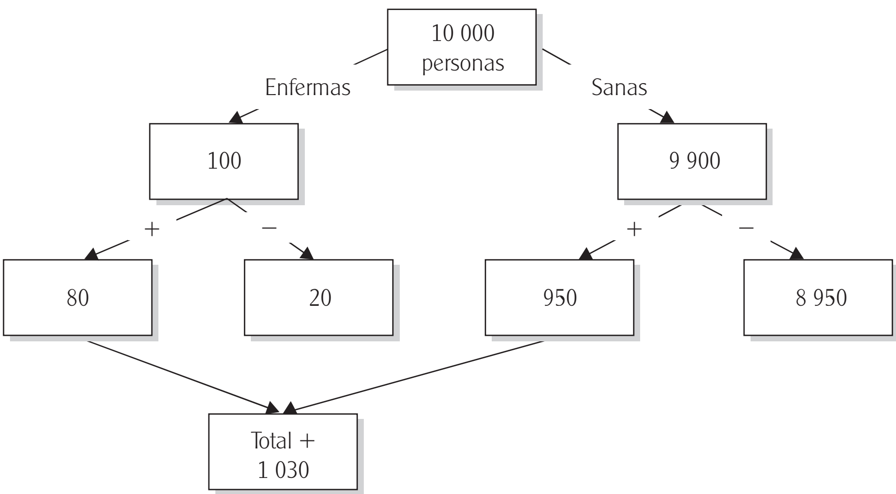
a) 80 personas *b)* 1 o 2 personas *c)* 8 personas

En el ejemplo, la persona razona de la siguiente manera: "En 10 000 personas hay 9 900 sanos y 100 enfermos. Al pasar la prueba, 950 (aproximadamente) de los sanos darán positivo y también lo harán 80 sujetos enfermos. Hay un total de 1 030 pruebas positivas. Luego la probabilidad de que el sujeto esté enfermo si el test es positivo es 80/1 030, porque sólo hay 80 enfermos entre los 1 030 en los que el test dio positivo. Proporcionalmente, si hay 103 pruebas positivas, sólo hay 8 enfermos".

Siguiendo las ideas anteriores Martignon y Wassner (2002) sugieren el uso conjunto de diagramas en árbol y frecuencias naturales para enseñar la resolución de estos problemas. El proceso de resolución comenzaría identificando los sucesos a que se refiere la pregunta del problema y asignándoles una notación. A continuación, se usaría un esquema similar al de la figura 1 para representar los datos del problema y como ayuda en su resolución.

Los autores señalan que el número de respuestas correctas se incrementa con este método, debido a la estrecha relación entre esta representación y la manera inductiva en la que procesamos la información en las tareas bayesianas. En

Figura 1 Representación mediante árbol y frecuencias naturales de un problema de Bayes



primer lugar, dividimos la muestra (10 000 personas en el ejemplo) en función de la tasa base (100 de cada 10 000) y obtenemos una división en dos grupos (100 enfermos y 9 900 sanos), lo que hace imposible que en el resto del problema olvidemos la tasa base. La división en el primer nivel del árbol produce una división binaria (sujetos con y sin la condición). Seguidamente incluimos la información dada por los condicionales y llegamos al tercer nivel del árbol que consiste en una segmentación que produce cuatro sucesos intersección.

A partir de aquí, sumamos los sucesos que correspondan a la condición nueva (prueba positiva) que se identifican fácilmente y obtenemos la cuarta rama con el total de casos positivos. En este momento, es posible resolver el problema de una manera muy sencilla simplemente aplicando la regla de Laplace, puesto que los casos favorables (intersección de enfermos con prueba positiva) y posibles (prueba positiva) se identifican claramente a partir del diagrama.

Aunque estamos de acuerdo con el interés del diagrama (figura 1), creemos que también puede aplicarse con todo tipo de datos, con sólo sustituir los números enteros y sus operaciones por otras relativas a porcentajes o probabilidades. Más aún, el interés del diagrama se debe a que materializa las particiones sucesivas y recomposiciones del espacio muestral que han de ser identificadas por el estudiante para alcanzar una correcta solución.

MÉTODO

Mientras que los estudios anteriores dan una explicación teórica para las dificultades de los estudiantes, nuestra hipótesis es que la resolución de problemas bayesianos involucra un proceso algo más complejo que lo descrito, puesto que los estudiantes deben recordar y aplicar varios conceptos y procedimientos probabilísticos. Nuestro estudio trata de mostrar que los errores en el proceso van más allá de pasar por alto las tasas base o la incapacidad de manejar el formato probabilístico. Por otro lado, el formato de frecuencias naturales es difícil de generalizar al caso de múltiples sucesos o múltiples experimentos, mientras que el teorema de Bayes tiene una aplicación general. Por eso, nos parece importante identificar las dificultades de los estudiantes para diseñar procesos educativos que las tengan en cuenta y permitan, a la vez, trabajar con formato probabilístico.

En este estudio, analizaremos los resultados de pasar los ítems 1, 2 y 3 (que se incluye a continuación) a estudiantes de Psicología. Estos tres ítems, con diversas variantes, fueron probados como parte de un estudio más amplio dirigido a construir un cuestionario de evaluación de la comprensión de la probabilidad condicional (Díaz, 2004; Díaz y De la Fuente, en prensa).

Ítem 3. *Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica 40% de las bolas y la M2, 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?*

a) $\dfrac{40}{100} = 0.4$ *b)* $\dfrac{0.05}{(0.05 + 0.01)} = 0.833$

c) $\dfrac{0.05 \times 0.4}{(0.05 \times 0.4) + (0.01 \times 0.6)} = 0.769$

El ítem 1 (variante del utilizado por Tversky y Kahneman, 1982) tiene como respuesta correcta la alternativa (d), pero, en las investigaciones de los autores, la mayoría de las personas dan como respuesta la alternativa (a), tasa base, o la (b), fiabilidad del testigo: hemos incluido el distractor (c) para evaluar la confusión entre probabilidad conjunta y probabilidad condicional. El ítem 2 (una variación de Cosmides y Tooby, 1996) presenta los datos en un formato frecuencial. En el ítem 3 damos la fórmula de Bayes en la respuesta correcta (c). La tasa base está explícitamente presentada como una probabilidad simple en el distractor (a), y el distractor (b) presenta una fórmula de Bayes incorrecta.

Estos tres ítems fueron aplicados en el formato de respuesta múltiple (según se presenta arriba) a diferentes muestras de estudiantes de Psicología dentro de la asignatura de Análisis de Datos antes de presentar el tema de probabilidad condicional, aunque los estudiantes habían estudiado este tema en la secundaria. La muestra más amplia, a la que se le pasó el ítem 1, es la unión de las dos muestras que hicieron los ítems 2 y 3. Estos estudiantes están habituados a los ítems de respuesta abierta y fueron advertidos de que las respuestas incorrectas recibían una puntuación negativa, a fin de evitar la elección aleatoria de la respuesta.

Después de administrar el test a los estudiantes, se les enseñó probabilidad condicional, dedicando 3 clases teóricas y 2 prácticas a este tema, que incluyó probabilidad condicional y conjunta, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Los estudiantes recibieron instrucción sobre el uso de diagramas de árbol y tablas de doble entrada para la resolución de los problemas y se les advirtió sobre la existencia de errores y sesgos como la falacia de la conjunción, la falacia del eje del tiempo y la falacia de las tasas base. Un mes después de la enseñanza, se dio a los estudiantes una versión abierta de los ítems 2 y 3 y se pidió a los estudiantes que contestasen a uno de estos ítems (distribuidos aleatoriamente). Aproximadamente la mitad de los estudiantes contestó el ítem 2 y la otra mitad el ítem 3. Todos los estudiantes seguían el mismo curso con el mismo profesor y material didáctico.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Resultados antes de la enseñanza

La proporción de respuestas en blanco en los ítems (cuadro 1) sugiere que estos estudiantes han olvidado el teorema de Bayes, estudiado en secundaria, o que no reconocieron que tenían que aplicar este teorema, donde la muestra que responde el ítem 1 es suma de las que responden los ítems 2 y 3. La falacia de las tasas base fue la principal respuesta tanto en el ítem 1 (problema de los taxis) como en el ítem 2 (enfermedad), donde el formato frecuencial no ayudó demasiado a nuestros alumnos a resolver el problema, incluso cuando los datos fueron elegidos de modo que los alumnos no tuvieran que operar con porcentajes o fracciones.

El porcentaje de respuestas correctas fue muy parecido en estos dos ítems. Se obtuvieron mejores resultados en el ítem 3, donde se presenta explícitamente la fórmula de Bayes en uno de los distractores, lo que pareció ayudar a los alumnos a reconocer la respuesta correcta.

Cuadro 1 Frecuencia (y porcentajes) de respuestas a los ítems antes de la enseñanza

	Ítem 1 (n = 157)	Ítem 2 (n = 76)	Ítem 3 (n = 81)
Respuesta correcta	23 (14.6)	8 (10.5)	39 (48.1)
Falacia de las tasas base	100 (63.7)	36 (47.3)	4 (4.9)
Confusión de probabilidad condicional y conjunta			14 (27.3)
Blanco	34 (21.6)	32 (42.1)	24 (29.6)

Resultados después de la enseñanza

En todo caso, decidimos realizar una nueva evaluación una vez enseñando el teorema de Bayes en el curso de Análisis de Datos, para asegurarnos de que los estudiantes lo recordaban. Asimismo, decidimos cambiar a ítems de respuesta abierta, para no forzar las respuestas de los alumnos. Las repuestas de los estudiantes a las tareas abiertas fueron analizadas en detalle para tener en cuenta el grado de corrección de su solución; se distinguieron los siguientes pasos en el proceso:

Identificación de los datos del problema

El primer paso para resolver los problemas (figura 1a, referida al problema 3) implica diferenciar entre probabilidad simple *P(M1), P(M2)* y probabilidad condicional *P(D/M1);* diferenciar una probabilidad condicional *P(D/M1)* y su inversa *P(M1/D),* y determinar las probabilidades de sucesos contrarios *P(C/M1),* etc. Por tanto, el estudiante debe discriminar todos estos conceptos, realizar correctamente las sucesivas particiones del espacio muestral e identificar cuáles datos se refieren a cada uno de los conceptos anteriores en el enunciado del problema.

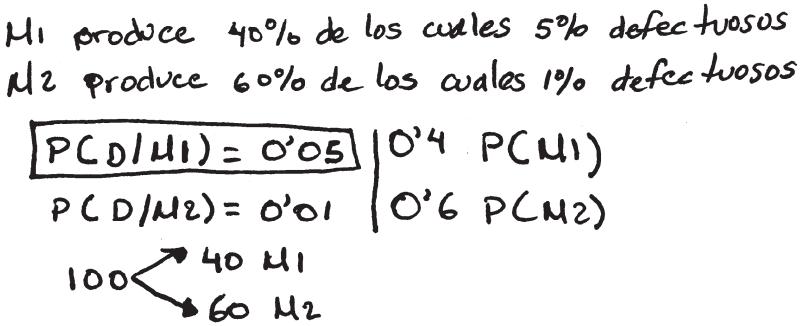
Vemos que en el caso de la figura 1a el alumno muestra una comprensión y discriminación de estos conceptos, e incluso usa correctamente una notación adecuada. Por el contrario, en la figura 1b se muestran los fallos de otro estudiante que no considera la partición del espacio muestral (defectuosos, no defectuosos) sino que dentro de cada una de estas categoría efectúa una partición (máquina M1 y máquina M2), lo que bloquea el proceso de resolución del problema. Ha sumado también los porcentajes defectuosos de cada máquina sin ponderarlos por la producción de cada una de ellas. Subyace una dificultad de razonamiento combinatorio que es frecuente incluso en alumnos universitarios (Roa, Batanero y Godino, 2003).

Construcción de una representación adecuada

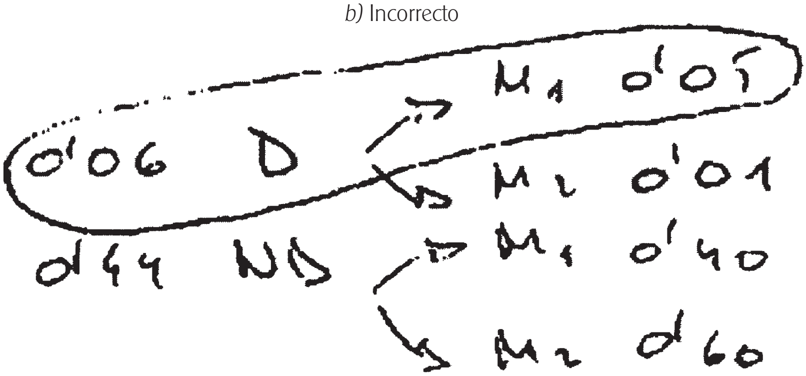
El segundo paso es construir un diagrama de árbol adecuado (pocos estudiantes usaron una tabla) para representar el experimento secuencial y la partición secuencial de la población (figura 2a, referida al problema 2). Esta representación

Figura 1 Identificación de los datos

a) Correcto



b) Incorrecto

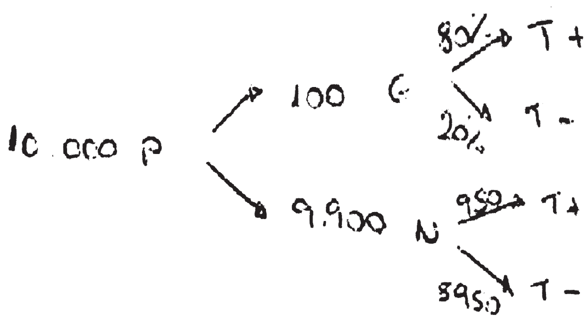


debe servir potencialmente al estudiante para reconocer que el conjunto de sucesos posibles (pruebas positivas) proviene de dos subpoblaciones, la de los enfermos y la de los sanos.

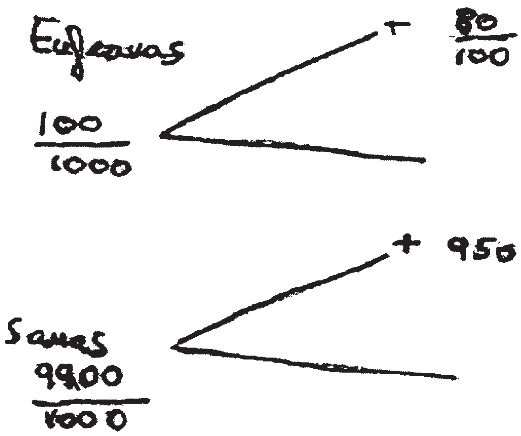
En la figura 2b el estudiante construye árboles disjuntos para representar dos poblaciones (enfermos y sanos), en lugar de considerar una población general con dos subgrupos. Sorprendentemente, como se muestra en este ejemplo, pocos estudiantes trabajaron directamente con las frecuencias naturales y la mayoría de ellos transforman las frecuencias naturales en porcentajes o probabilidades.

Figura 2 Construcción de un diagrama de árbol

a) Correcto



b) Incorrecto



Identificación de la probabilidad condicional que se pide

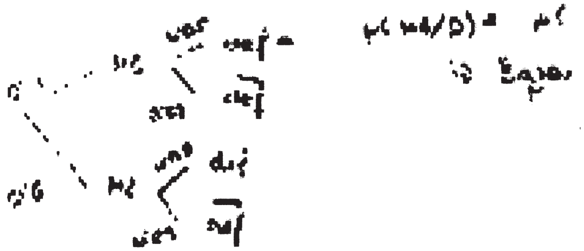
Para continuar, los estudiantes deben identificar cuál probabilidad se pide en el problema y que ésta es una probabilidad condicional inversa. No es un paso sencillo, pues algunos autores señalan que los estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad (falacia del eje de tiempos, según Falk, 1986, o concepción cronologista de la probabilidad condicional, según Gras y Totohasina, 1995).

El estudiante de la figura 3a llega a este paso, utilizando una notación adecuada para la probabilidad condicional pedida, e incluso señala que la solución viene dada por el teorema de Bayes, pero queda bloqueado al no recordar la fórmula.

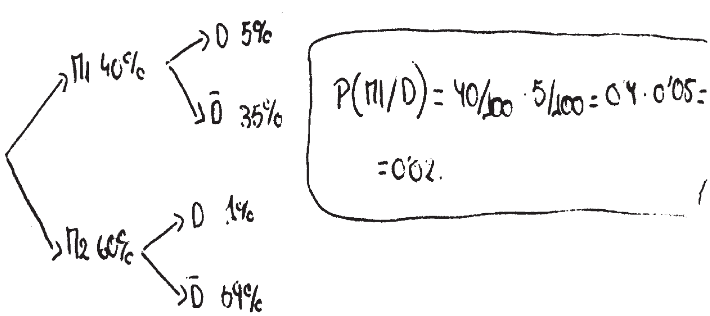
En este paso, los estudiantes también pueden confundir en la fórmula la probabilidad condicional con su inversa, con una probabilidad simple o con una probabilidad conjunta (errores frecuentes en la investigación de Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987, y Ojeda, 1995), que es el caso mostrado en la figura 3b, donde el alumno usa la notación de probabilidad condicional inversa, pero aplica la regla del producto. Esta regla se aplica, sin embargo, correctamente, pues asume dependencia al utilizar la proporción de defectos de la máquina M1.

Figura 3 Identificación del problema como el cálculo de una probabilidad condicional inversa

a) No recuerda la fórmula



b) Confusión con la probabilidad conjunta



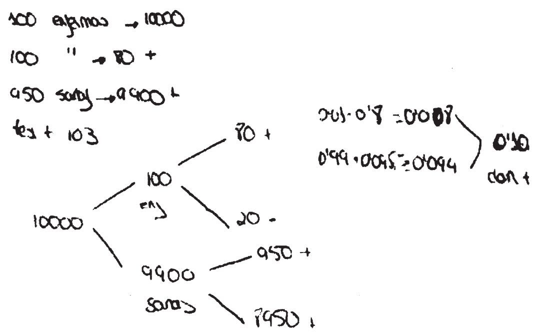
Cálculo del denominador de la fórmula de Bayes

Después de identificar el problema como el cálculo de una probabilidad condicional y recordar la fórmula de Bayes, el estudiante debe calcular el numerador y el denominador, que no se dan directamente en los datos del problema. El denominador debe calcularse con la regla de la probabilidad total (figura 4a), esto es, multiplicando las probabilidades de cada rama del árbol y sumando cada una de esas probabilidades conjuntas. El alumno debe entender que se trata de sucesos dependientes, a fin de aplicar correctamente la regla del producto en este caso.

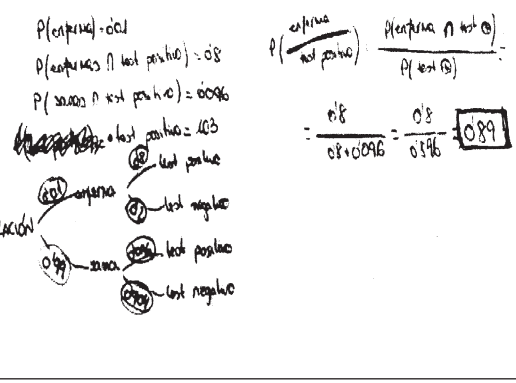
En la figura 4b los estudiantes trasladan los datos de las frecuencias naturales a probabilidades y construyen un árbol correcto. Sin embargo, la probabilidad total

Figura 4 Cálculo de la probabilidad total

a) Cálculo correcto



b) Cálculo incorrecto



y el numerador son erróneos, ya que no se tienen en cuenta las tasas base en la población, es decir, suma las proporciones de pruebas positivas en enfermos y sanos sin ponderar por la proporción de enfermos y sanos en la población.

Cálculo de la probabilidad inversa (teorema de Bayes)

Por último, el estudiante debe sintetizar todos los pasos anteriores y calcular el numerador (probabilidad conjunta) y denominador (probabilidad total) para obtener la probabilidad inversa, es decir, aplicar el teorema de Bayes (figura 5a).

Al resolver el ítem 2, algunos estudiantes dedujeron el número de personas con la enfermedad a partir de la probabilidad (figura 5.2), mientras que otros calcularon sólo la probabilidad de estar enfermo si la prueba fue positiva, pero no lograron llegar a partir de ella al número esperado de enfermos, debido a errores al hallar una proporción (figura 5.b). Estos dos ejemplos muestran de nuevo que el uso de frecuencias naturales no resuelve del todo la dificultad de los problemas de Bayes. Por el contrario, nuestros estudiantes, en su mayoría, trasladaron los datos del problema a porcentajes y probabilidades y resolvieron los problemas usando este tipo de datos. Por supuesto, la complejidad del procedimiento aumenta con esta estrategia.

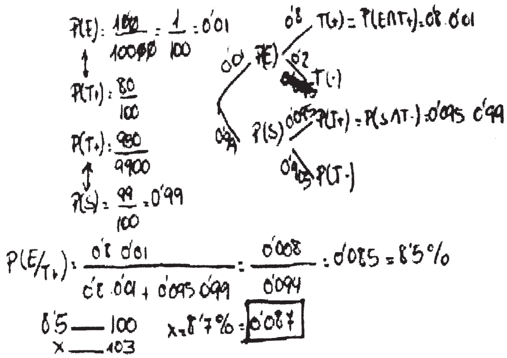
En el cuadro 2 presentamos el porcentaje de estudiantes que han llegado a completar cada uno de los pasos descritos, donde el alumno que llega a completar correctamente hasta un paso completa también correctamente todos los anteriores. El número de respuestas correctas después de la instrucción (tabla 2) sugiere la mayor dificultad en el ítem 2, donde el problema se presentaba en términos de frecuencias naturales, incluso cuando hemos considerado correctas las soluciones que llegaron a la probabilidad de estar enfermo, aunque no se calculase el número esperado de enfermos. Fue mayor el número de alumnos que no identificó correctamente los datos o dejó la respuesta en blanco en este problema. En todo caso, puesto que la muestra es pequeña, sería necesario repetir la investigación con un mayor número de casos.

Para complementar el estudio, se realizó un análisis de los errores (cuadro 3) en el proceso, tratando de explicar la dificultad de los problemas, donde un alumno puede presentar más de un error y, por tanto, la suma de errores puede ser mayor que el tamaño de la muestra.

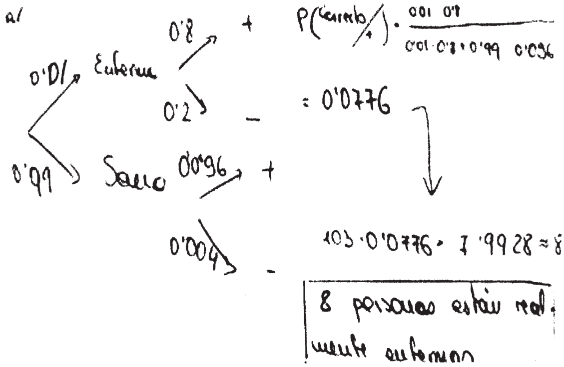
La falacia de las tasas base no se presentó de manera generalizada –al menos explícitamente–, mientras que la mayoría de los obstáculos fueron la identi-

Figura 5 Alcanzar la solución final

a) Fórmula de Bayes correcta



b) Obtención del número esperado



Cuadro 2 Frecuencias (y porcentajes) de respuestas después de la instrucción

	Ítem 2 (n = 49)	Ítem 3 (n = 52)
En blanco, no identifica los datos o diagrama de árbol incorrecto	15 (30.6)	10 (19.2)
Identifica los datos y realiza el diagrama de árbol, pero no continúa	18 (36.7)	12 (23.1)
Datos y diagrama correctos e identifica la probabilidad condicional inversa por calcular	5 (10.2)	6 (11.5)
Calcula correctamente la probabilidad total	5 (10.3)	4 (7.7)
Bayes o solución completa correcta	6 (12.2)	20 (38.5)

Tabla 3 Tipos de errores en el proceso de resolución

	Ítem 2 (n = 49)	Ítem 3 (n = 52)
Blanco	10	5
No identifica datos o identificación incorrecta	10	2
Diagrama de árbol o tabla de doble entrada incorrecta	5	3
Confunde probabilidad condicional y conjunta	3	6
Confunde probabilidad simple y condicional	9	1
Confunde una probabilidad condicional con su inversa	1	1
Falacia de las tasas base	2	
Error en cálculo de la probabilidad total	1	
Error en la fórmula de Bayes	4	5
Confunde un suceso y su complementario	2	
Error partición del espacio muestral	5	6
Fallos razonamiento proporcional y operación fracciones	4	3
Probabilidad mayor que	1	4

ficación incorrecta de los datos, la realización incorrecta del diagrama de árbol o de un tabla de doble entrada, la partición incorrecta del espacio muestral, la confusión entre diversas probabilidades (simple conjunta, condicional) y entre una probabilidad condicional y su inversa y errores en la fórmula de Bayes, que algunos alumnos no recuerdan, invirtiendo denominador y numerador u omitiendo algún término.

Observamos también fallos en el razonamiento proporcional, por lo que algunos estudiantes no eran capaces de operar con fracciones o hallar el inverso de una fracción. Finalmente, algunos alumnos operan conjuntamente probabilidades y valores esperados o confunden estos dos términos y, como consecuencia, obtienen valores mayores que la unidad para la probabilidad de un suceso sin ser conscientes del error que esto supone.

CONCLUSIONES

Aunque éste es sólo un estudio inicial, con un tamaño de muestra limitado, sirve para mostrar las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes y describir los posibles errores en el proceso de resolución, complementando así otros estudios previos sobre enseñanza de la probabilidad en el nivel universitario.

Estos errores no se limitan a la falacia de las tasas base (Tversky y Kahneman, 1982) o a la dificultad de operar con probabilidades y fracciones. Aunque algunos alumnos tuvieron dificultades con el razonamiento proporcional, el formato frecuencial no disminuyó (sino al contrario) la dificultad de los problemas, ya que la proporción de respuestas correctas fue mayor para el formato probabilístico.

Los errores se producen en los diferentes pasos del proceso de resolución, comenzando por la identificación correcta de los sucesos y sus probabilidades, y la correcta partición y subpartición del espacio muestral. A muchos estudiantes les fue difícil diferenciar entre probabilidades simples compuestas y condicionales, o confundieron una probabilidad condicional *P(A/B)* con su inversa *P(B/A)*, dificultades ya señaladas por Falk (1986) para la probabilidad condicional. El olvido de la fórmula de Bayes también ocasionó algunos errores, pero su número es pequeño en comparación con los causados por identificación de datos y errores en los conceptos que intervienen.

El teorema de Bayes se presenta, en consecuencia, como un objeto complejo, cuya comprensión involucra toda una serie de conceptos y propiedades previas como los de probabilidad simple compuesta y condicional, partición y complementario, axioma de la unión y regla del producto. La solución de la dificultad de los problemas de Bayes pasa por un mayor esfuerzo en la enseñanza de la probabilidad y no consiste únicamente en facilitar los enunciados recurriendo a las frecuencias absolutas. Por otra parte, incluso cuando el formato frecuencial ayuda a los estudiantes a resolver determinados problemas, el formato probabilístico es más fácil de generalizar a procedimientos de varios pasos o al caso de experimentos con más de un resultado. Pensamos que no se debe renunciar a la enseñanza del teorema de Bayes y sus aplicaciones, puesto que es una herramienta fundamental en la construcción de otras ideas en inferencia y estudio de la correlación.

En nuestra experiencia de enseñanza, la instrucción mejoró ligeramente la resolución de problemas de Bayes, tanto en el formato frecuencial como en el formato probabilístico. Por tanto, una segunda conclusión es que se necesita más tiempo para enseñar razonamiento bayesiano si queremos tener éxito con nuestros estudiantes. En consecuencia, aportamos argumentos para continuar con la enseñanza de la probabilidad condicional a los universitarios, pues además de su utilidad en la toma de decisiones, diagnóstico y evaluación, constituye la base de la inferencia estadística y el estudio de la correlación. Por ello, estamos de acuerdo con Rossman y Short (1995) que sugieren que este tema puede enseñarse dentro del espíritu de la reforma de la educación estadística, presentando a los estudiantes una variedad de aplicaciones en problemas reales, proponiendo situaciones interactivas y usando la tecnología para facilitar el aprendizaje.

Por supuesto, estos resultados son exploratorios, dado el tamaño limitado de la muestra. Aun así, el estudio de las respuestas abiertas de los estudiantes indica que hay una variedad de razones mayor que la esperada que explica la dificultad de estos problemas. Para concluir, creemos que todavía es necesario realizar más trabajos de investigación para entender las dificultades de los estudiantes con este tipo de razonamientos y para poder diseñar y evaluar experiencias de enseñanza.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realiza con el proyecto y la beca FPU: AP2003-5130, MEC, Madrid, España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bar-Hillel, M. (1987), "The Base Rate Fallacy Controversy", en R.W. Scholz (ed.), *Decision Making under Uncertainty*, Ámsterdam, North Holland, pp. 39-61.

Batanero, C. y E. Sánchez (2005), "What is the Nature of High School Student's Conceptions and Misconceptions about Probability?", en G. Jones (ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*, Dordrecht, Kluwer, pp. 260-289.

Cosmides, L. y J. Tooby (1996), "Are Humans Good Intuitive Statisticians after All? Rethinking some Conclusions from the Literature on Judgment under Uncertainty", *Cognition*, núm. 58, pp. 1-73.

Díaz, C. (2004), *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar*, Tesis de maestría, Universidad de Granada.

Díaz, C. e I. de la Fuente (en prensa), "Assessing Psychology Students' Difficulties with Conditional Probability and Bayesian Reasoning", Trabajo aceptado para presentar en ICOTS-7, International Conference on Teaching Statistics, Salvador (Bahia), Brasil, 2006.

Falk, R. (1986), "Conditional Probabilities: Insights and Difficulties", en R. Davidson y J. Swift (eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics,* Victoria, Canada, International Statistical Institute, pp. 292-297.

—— (1989), "Inference Under Uncertainty Via Conditional Probability", en R. Morris (ed.), *Studies in Mathematics Education,* vol. 7, pp. 175-184, París, Unesco.

Gigerenzer, G. (1994), "Why the Distinction between Single-Event Probabilities and Frequencies is Important for Psychology (and vice-versa)", en G. Wright y P. Ayton (eds.), *Subjective Probability,* Chichester, Wiley, pp. 129-161.

Gigerenzer, G. y U. Hoffrage (1995), "How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats", *Psychological Review,* núm. 102, pp. 684-704.

Gras, R. y A. Totohasina (1995), "Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 15, núm. 1, pp. 49-95.

Koehler, J.J. (1996), "The Base Rate Fallacy Reconsidered: Descriptive, Normative, and Methodological Challenges", *Behavior and Brain Sciences,* núm. 19, pp. 1-54.

Martignon, L. y C. Wassner (2002), "Teaching Decision Making and Statistical Thinking with Natural Frequencies", en B. Phillips (ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics,* Ciudad del Cabo, IASE, CD ROM.

Moore, D.S. (1997), "New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics", *International Statistical Review,* vol. 65, núm. 2, pp. 123-155.

Ojeda, A.M. (1995), "Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional", *UNO,* núm. 5, pp. 37-55.

Pollatsek, A., A.D. Well, C. Konold y P. Hardiman (1987), "Understanding Conditional Probabilities", *Organization, Behavior and Human Decision Processes,* núm. 40, pp. 255-269.

Roa, R., C. Batanero y J.D. Godino (2003), "Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios", *Educación Matemática,* vol. 15, núm. 2, pp. 5-26.

Rossman, A. y T. Short (1995), "Conditional Probability and Education Reform: Are They Compatible?", *Journal of Statistics Education,* vol. 3, núm. 2 [en línea: http://www.amstat.org/publications/jse/v3n2/rossman.html].

Sedlmeier, P. (1999), *Improving Statistical Reasoning. Theoretical Models and Practical Implications,* Mahwah, NJ, Erlbaum.

Sedlmeier, P. y G. Gigerenzer (2001), "Teaching Bayesian Reasoning in Less than Two Hours", *Journal of Experimental Psychology: General,* núm. 3, pp. 380-400.

Serrano, L., C. Batanero, J.J. Ortiz y M.J. Cañizares (1998), "Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria", *Educación Matemática*, vol. 10, núm. 1.

Totohasina, A. (1992), *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*, Tesis doctoral, Universidad de Rennes I.

Tversky, A. y D. Kahneman (1982), "Evidential Impact of Base Rates", en D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (eds.), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Nueva York, Cambridge University Press, pp. 153-160.

DATOS DE LAS AUTORAS

Carmen Díaz
Metodología de las Ciencias del Comportamiento, Facultad de Psicología,
Universidad de Granada, España
mcdiaz@ugr.es

Inmaculada de la Fuente
Metodología de las Ciencias del Comportamiento, Facultad de Psicología,
Universidad de Granada, España
edfuente@ugr.es