Un programa de apoyo para facilitar el aprendizaje de solución de problemas de suma y resta en alumnos con bajo rendimiento

Octaviano García, Estela Jiménez y Rosa del Carmen Flores

Resumen: El objetivo del estudio fue evaluar la eficacia de un programa de apoyo para que alumnos con bajo rendimiento en matemáticas adquirieran el entendimiento conceptual para solucionar problemas de suma y resta, apoyándose en la adaptación de una estrategia que guió su razonamiento. Participaron 11 alumnos de 3º y 4º grados. Se evaluaron sus conocimientos conceptuales y algorítmicos, su estrategia de solución de problemas y su actitud hacia las matemáticas. Los resultados obtenidos mostraron que la comprensión del sistema decimal contribuyó al entendimiento de los conceptos y procedimientos implícitos en los algoritmos de suma y resta, y que adoptar una estrategia facilitó la comprensión y el razonamiento de los problemas. Si bien la estrategia sirvió a los alumnos para planear, ejecutar y evaluar sus procedimientos y resultados, los cambios principales se debieron al desarrollo del conocimiento conceptual. Asimismo, se incrementó el interés y el gusto de los alumnos por las matemáticas.

Palabras clave: Matemáticas, alumnos con bajo rendimiento, sistema decimal, suma y resta, solución de problemas.

Abstract: The purpose of the present study was to evaluate the efficacy of a program for conceptual comprehension to solve addition and subtraction problems for students with low achievement in mathematics, supported by the adaptation of a strategy that guided their reasoning. Participants were eleven children from 3rd and 4th grade. Students' conceptual and algorithmic knowledge, strategy use for solving problems, and attitude toward mathematics were assessed. Results demonstrated that comprehension of the decimal system and the adaptation of a solving problem strategy improved children's understanding of concepts and procedures related to addition and subtraction algorithms, and through this, promoted comprehension for problem solving. The strategy was helpful to plan, execute and assess their procedures and results, but the main change was due to con-

Fecha de recepción: 25 de enero de 2006.

ceptual knowledge. Moreover, they developed greater interest and pleasure for mathematics.

Keywords: Mathematics, underachieving children, decimal system, addition and subtraction, problem solving.

INTRODUCCIÓN

Los conocimientos para la solución de problemas de adición y sustracción son una herramienta necesaria para la vida diaria y, además, son la base para aprendizajes más complejos, como son los relacionados con la multiplicación y la división. Por ello, los maestros dedican tiempo considerable a la enseñanza inicial de solución de problemas matemáticos. A pesar de esto, numerosos alumnos presentan dificultades que les impiden avanzar en su aprendizaje matemático. Se ha observado que tales dificultades se relacionan con: *a)* un conocimiento matemático fragmentado o equivocado, específicamente en la comprensión del sistema decimal y en el conocimiento de los conceptos y principios matemáticos asociados a la adición y sustracción, los cuales son clave para comprender las relaciones contenidas en los problemas, y *b)* con estrategias de pensamiento deficientemente empleadas durante la resolución de problemas (Podall y Comellas, 1996; Flores, 2005; Flores, Farfán y Ramírez, 2004).

Se ha demostrado que una manera de que los alumnos superen las dificultades del conocimiento matemático fragmentado o equivocado es mediante experiencias de aprendizaje que aseguren la comprensión del sistema decimal como antecedente para el entendimiento conceptual del algoritmo de la adición y la sustracción (Carpenter, Fenema, Loef, Levi y Empson, 1999; Nunes y Bryant, 1997). También se ha observado que, para comprender la relación entre un algoritmo y un problema, además de los conceptos relativos al sistema decimal es necesario que los alumnos conozcan y pongan en juego conceptos matemáticos y no matemáticos que les permitan dar un significado al problema que están solucionando (Vergnaud, 2000; Peltier, 2003; Flores, 2005). Es indispensable que los alumnos se enfrenten a problemas que impliquen diferentes relaciones lógicas entre conceptos y principios matemáticos, y que los lleven al entendimiento de la aplicación de los algoritmos, todo lo cual, en su conjunto, les permitirá comprender los problemas (Claudine, 2003; Mendoza, 2005).

Atendiendo a dicha necesidad, Vergnaud (1997) definió situaciones problemáticas asociadas a la adición y sustracción que consideran las relaciones enseñadas durante la primaria entre conceptos y principios. Las más elementales son las siguientes:

1. *Situaciones de combinación*. Expresan una relación entre la medida de dos conjuntos elementales que se combinan para formar un conjunto compuesto. Por ejemplo: *Karina tiene 6 peces azules y 8 amarillos, ¿cuántos peces tiene en total?*
2. *Situaciones de transformación*. Expresan una relación estado-transformación-estado. Se relaciona temporalmente el estado inicial de un suceso y el estado final de éste mediante una transformación. Por ejemplo: *Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar y después ganó 4 canicas, ¿cuántas tiene ahora?*
3. *Situaciones de comparación*. Expresan una relación de comparación que vincula las medidas de dos conjuntos mediante la identificación de la diferencia. Por ejemplo, *Mariana tiene 8 muñecas. Sofía tiene 5 menos que Mariana. ¿Cuántas muñecas tiene Sofía?*

La identificación de tales situaciones puede ser útil en la planeación de los contenidos de los problemas y la graduación de la enseñanza para la solución de problemas asociados a la adición y sustracción.

Como se mencionó anteriormente, las dificultades que presentan los alumnos con bajo rendimiento en matemáticas también están vinculadas con estrategias de pensamiento deficientemente empleadas durante la resolución de problemas. En la búsqueda de caminos para atender esta deficiencia, diversos investigadores han demostrado que la práctica de solución de problemas matemáticos con diversos niveles de dificultad, apoyada en una estrategia de solución de problemas, mejora significativamente el proceso de razonamiento y solución (Jordan y Montani, 1997; Flores, 1999; Aguilar y Navarro, 2000; Orrantia, 2003; Flores, Farfán y Ramírez, 2004). Los trabajos de estos autores muestran que los alumnos se apropian gradualmente de la estrategia, adaptándola a su conocimiento; de esta manera, la estrategia constituye un esquema de organización de su actividad de pensamiento durante la solución de los problemas.

De acuerdo con la aproximación constructivista, las estrategias cognoscitivas se han definido como un conjunto de acciones organizadas que favorecen la planificación, solución y evaluación de la solución de un problema. El pensamiento estratégico implica un proceso consciente de toma de decisiones sobre los procedimientos y conocimientos que se necesitan para resolver un problema, así como la metacognición; es decir, el conocimiento de los propios procesos cognoscitivos (Monereo, Castello, Clariana, Palma y Pérez; 1995; Aguilar y Navarro, 2000).

Cuando el alumno piensa estratégicamente, logra vincular lo que piensa (por ejemplo, planear la solución de un problema, darse cuenta de lo que le dificulta el entendimiento de un problema, recordar lo que ya aprendió, etc.) y lo que hace (volver a leer para aclarar una confusión, elaborar un esquema para representar el problema, etc.). Sólo el propio alumno puede decidir cuáles estrategias le funcionan y cuál es la mejor manera de aplicarlas; por ello, al enseñarlas, es indispensable dar oportunidad a que el alumno las practique, adapte y utilice, de acuerdo con sus conocimientos matemáticos. Por lo anterior, no tiene sentido aplicar la estrategia en situaciones en las que el aprendizaje es dirigido por el adulto y la participación del alumno se limita a seguir instrucciones, ya que no se favorece la autonomía del alumno en la regulación de sus acciones al resolver un problema. Por consiguiente, el tipo de apoyo brindado por el tutor o el maestro es de central importancia.

Dos conceptos que han dado claridad a la relación entre el docente y el alumno en el aprendizaje de solución de problemas son el *andamiaje* y la *zona de desarrollo próximo*. La noción de andamiaje surge del trabajo de Bruner para complementar la explicación de Vigotsky de la zona de desarrollo próximo (ZDP). Esta última se define como la distancia entre una ejecución independiente y otra con un nivel de dificultad superior, lograda con el apoyo de un experto. El andamiaje se refiere a la asistencia que proporciona el adulto o experto a un alumno, la cual permite que este último alcance una meta que se encontraba más allá de su potencial individual.

El andamiaje también es visto como un tipo de puente entre el conocimiento ya existente y el nuevo, así como un proceso que permite la adquisición de nuevos aprendizajes y habilidades en los aprendices. Tales procesos toman forma a través de un proceso coconstructivo en el que maestros y alumnos se relacionan en una actividad significativa y culturalmente deseable (Rojas, 2000).

Al proporcionar un apoyo andamiado, el maestro realiza un continuo diagnóstico de la comprensión y el nivel de habilidades de sus alumnos, lo que le permite una continua calibración del apoyo en el logro de metas y la eventual transferencia de responsabilidad.

En este sentido, para favorecer el aprendizaje de solución de problemas matemáticos, son importantes las actividades de enseñanza que promueven que el niño comprenda el significado de las relaciones numéricas implícitas en el problema y la solución algorítmica, y que emplee sus propios recursos de solución no algorítmicos (por ejemplo, la representación gráfica).

Otra característica favorable de la situación de enseñanza es el diálogo. Se ha observado que el diálogo entre compañeros, para analizar cada paso de la estrategia, propicia que el niño modifique su perspectiva del problema y avance hacia una solución cada vez más compleja. Asimismo, al dialogar con los alumnos, el maestro reconoce el origen de sus errores y les brinda una ayuda acorde con su nivel de comprensión del proceso de solución del problema y en la adopción y adaptación de la estrategia (Aguilar y Navarro, 2000; Bermejo, Lago, Rodríguez y Pérez, 2000; Flores, Farfán y Ramírez, 2004; Flores, 2005).

Otro beneficio concomitante de enseñar a un alumno a adoptar y adaptar una estrategia es la promoción de la motivación. Los alumnos que tienen estrategias deficientes y fracasan en la solución de problemas no muestran interés por aprender y sienten que no vale la pena esforzarse si nada de lo que hacen los lleva al éxito (desesperanza aprendida). En contraste, cuando el alumno cuenta con una estrategia, asume el control de sus acciones y ello le genera sentimientos de competencia y autonomía que favorecen que muestre interés en la solución de problemas en ocasiones posteriores (Kloosterman, 1996).

Por lo general, la literatura en el campo de la solución de problemas hace énfasis en el dominio del conocimiento sobre adición y sustracción en diferentes situaciones o en el dominio de la estrategia. En el caso de los alumnos con dificultades en la solución de problemas, es necesario fortalecer el aprendizaje de ambos aspectos, ya que aprender una estrategia los ayuda a estructurar su pensamiento y ello favorece la comprensión de los conceptos y principios matemáticos.

Teniendo en cuenta los antecedentes conceptuales señalados, el propósito del presente estudio fue desarrollar y evaluar la eficacia de un programa de apoyo para alumnos con dificultades en el aprendizaje de la solución de problemas. Este programa se articuló considerando los conocimientos matemáticos relacionados con la solución de problemas de adición y sustracción, así como la adopción y adaptación por parte de los alumnos de una estrategia de solución de problemas.

DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

PARTICIPANTES

Se crearon dos grupos de alumnos de 3º y 4º grados de una escuela primaria pública que presentaban bajo rendimiento en matemáticas según el criterio de sus maestros. Se formó un grupo con dos alumnas y tres alumnos de tercer grado, y otro grupo con dos alumnas y cuatro alumnos de cuarto grado. La escuela se localizaba en la zona sur poniente de la Ciudad de México y todos los niños pertenecían a familias de nivel socioeconómico bajo.

ESCENARIO

Se trabajó en un aula de la escuela, después del horario normal de actividades.

INSTRUMENTOS

Para evaluar los conocimientos, habilidades y actitudes de los alumnos, se utilizaron los siguientes instrumentos:

a) *Inventario de ejecución académica* IDEA (Macotela, Bermúdez y Castañeda, 1996). Evalúa las habilidades y deficiencias de los alumnos en lectura, escritura y matemáticas. Únicamente se aplicaron los reactivos correspondientes a la solución de algoritmos.
b) *Prueba informal con diez diferentes tipos de problemas matemáticos* para indagar sobre los conocimientos matemáticos de los alumnos y la estrategia de solución de problemas que utilizan (adaptada de Flores, 1999). Se analizan las producciones y los razonamientos de los alumnos al dar una solución.
c) *Cuestionario de actitudes del alumno hacia las matemáticas*, el cual evalúa la disposición y gusto del niño hacia esta materia (García, 2002).

Materiales

Se utilizó material para representar el sistema decimal y sus soluciones algorítmicas y no algorítmicas que podía ser usado de manera individual o grupal. Asimismo, cada alumno contó con una tarjeta mnemónica que le servía de apoyo para guiar su proceso de comprensión y razonamiento durante la solución del problema (véase anexo 1). Los materiales podían ser utilizados por los alumnos según sus necesidades particulares.

Procedimiento

Fase I. Aprendizaje de los algoritmos de suma y resta

A fin de evaluar los conocimientos y habilidades particulares de los niños para resolver algoritmos de suma y resta, se aplicó la sección correspondiente del IDEA (Macotela, Bermúdez y Castañeda, 1996). Los resultados obtenidos mostraron que 45% de los alumnos resolvieron adecuadamente las sumas y sólo un 9% las restas. De manera general, los niños y niñas presentaban dificultades en la comprensión de los términos de centena, decena y unidad, el valor posicional y la composición aditiva del número al solucionar algoritmos de suma y resta. También se observó que las dificultades eran mayores en la resta.

Con base en las necesidades detectadas, se diseñaron actividades y materiales para esta primera fase del programa que abarcó 15 sesiones de una hora.

Mediante juegos que se adaptaron del *Fichero de segundo grado* (SEP, 1999a) se crearon experiencias de aprendizaje que relacionaban la comprensión del valor posicional y la composición aditiva del número. Por ejemplo, en el "Tiro al blanco", los alumnos dibujaban en el piso círculos concéntricos de colores con puntuaciones que iban de 10 a 100 y después, por turnos, lanzaban una ficha y acumulaban los puntos que ganaban. Para llevar la cuenta, se les invitaba a utilizar sus propias estrategias de conteo y suma; algunos empleaban bolsitas con 10 o 100 semillas que había disponibles, otros contaban con sus dedos o calculaban mentalmente y algunos otros hacían una suma escrita. Finalmente, después de sumar los puntos alcanzados y comparar las estrategias que habían utilizado para ello, los alumnos discutían acerca de la conveniencia de agrupar las decenas y las centenas.

Para que entendieran las equivalencias y relaciones entre las centenas, decenas, unidades y las operaciones de suma y resta, se los animó a usar diferentes materiales que representaban valores distintos (monedas y billetes de diferente denominación, fichas de colores, hacer dibujos, etc.). Podían hacer uso de todos los recursos que quisieran y consideraran útiles. Se propició que los alumnos contrastaran y evaluaran sus resultados y así se percataran de la ventaja de emplear los algoritmos escritos. En general, las actividades se organizaron de manera que los alumnos tuvieran oportunidad de reflexionar y tomar decisiones personales para después proceder a discutir y argumentar sus ideas con otros compañeros.

En esta fase, los alumnos aprendieron a solucionar los algoritmos de adición y sustracción, comprendiendo las reglas de agrupamiento y desagrupamiento y el sistema decimal. Al final, se volvió a evaluar a los alumnos con el IDEA y se encontró que los alumnos resolvían correctamente ambos algoritmos.

Fase 2. Aprendizaje de solución de problemas

Para indagar sobre los conocimientos matemáticos y estratégicos de los alumnos en relación con la adición y sustracción, se utilizó la prueba informal de Flores (1999). Teniendo en cuenta los resultados de esta prueba y los logros alcanzados por los niños en la primera fase, se desarrolló la segunda fase del taller.

Se trabajó durante 11 sesiones con el propósito de que los(as) alumnos(as) desarrollaran el entendimiento conceptual para solucionar los problemas de suma y resta. Esto se hizo con el apoyo de una estrategia que guiaba a los(as) alumnos(as) en su razonamiento.

La estrategia incluyó 10 pasos, comprendidos en las fases de solución de un problema: análisis y planificación, ejecución y monitoreo y, finalmente, evaluación de la solución.

Al principio se trabajó con números de dos dígitos. Se consideró que los procedimientos para operar con cifras mayores se desarrollan como extensiones naturales de los procedimientos que los alumnos utilizan para solucionar problemas que involucran números pequeños (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epson, 1999). A medida que los alumnos progresaban en el entendimiento de problemas con diferente complejidad, se trabajó con centenas, incluso los propios niños pidieron que se usaran cantidades mayores.

A continuación se describe cómo los pasos de la estrategia propiciaban el razonamiento y la autonomía de los niños en la solución de problemas.

1. *Leer y expresar lo que entendieron del problema*. Inicialmente, los alumnos hacían una lectura muy superficial y solían tomar algunas "pistas" para solucionar el problema sin reflexionarlo; asimismo, omitían alguna de las variables principales, sus relaciones o los datos numéricos. El que los niños explicaran el problema con sus propias palabras y discutieran con sus compañeros sobre las relaciones entre las variables principales y los datos numéricos favorecía reconocer la importancia de comprender el texto del problema para poderlo solucionar.
2. *Identificar la interrogante*. Esto llevaba a los niños a plantearse un propósito. Debían analizar el texto del problema para poder identificar la pregunta. Esto, a su vez, los conducía a analizar la relación de la pregunta con la información restante del problema, lo cual era indispensable para planear la estrategia que seguirían para responder la pregunta.
3. *Identificar la información numérica relevante* y poderla distinguir de la irrelevante, para lo cual debían analizar su relación con la pregunta. La discusión de sus puntos de vista con algún compañero los ayudaba a ponderar la validez de sus razonamientos.
4. *Representar gráficamente el problema para solucionarlo*. La representación gráfica, o no algorítmica, permitía que los niños apreciaran objetivamente tanto las relaciones existentes en el problema como la manera de llegar a una solución. Al inicio, ellos creían que era necesario dibujar los objetos mencionados en el problema; solían dibujar detalladamente cada elemento, invirtiendo mucho tiempo en ello (por ejemplo, dibujaban 15 dinosaurios o perros). Este nivel de simbolización fue necesario para aquellos alumnos que no habían aprendido que los números conservan su valor, independientemente de cómo se simbolicen. Para provocar que buscaran formas más sencillas de simbolización, se les preguntaba lo que harían cuando el problema por resolver tratara de cientos o miles de objetos. También se mostraron ejemplos que les permitieron apreciar que el valor del cardinal se conserva, aun cuando se empleen símbolos sencillos (palitos o bolitas).
5. *Establecer una relación entre la solución no algorítmica y la algorítmica*. La solución gráfica realizada por los alumnos los llevaba a identificar el algoritmo apropiado para resolver el problema; por ejemplo, al comprender que tenían que agregar o quitar elementos para producir un incremento o decremento, podían decidir si utilizarían la suma o la resta en un problema de transformación. La meta principal era que el alumno enten-

diera conceptualmente el algoritmo y que no usara indicadores superficiales o palabras aisladas (por ejemplo, si dice la palabra "más", se hace una suma).

En este paso se podían presentar dos situaciones:

a) El dibujo guardaba una relación directa con la acción de incrementar o disminuir implícita en el algoritmo; por ejemplo, en un problema de transformación, el alumno quitaba o tachaba una cantidad a un conjunto, lo que le indicaba que debía hacer una resta.

b) El dibujo no tenía relación directa con la acción de incrementar o reducir; por ejemplo, en un problema de igualación, el alumno dibujaba los dos conjuntos que se mencionaban y marcaba los elementos que guardaban correspondencia. Luego necesitaba inferir que los que no tenían correspondencia eran los que le faltaban al conjunto menor para poder igualar al mayor; entonces, podía deducir que debía restar al conjunto mayor el valor del menor, para así identificar la diferencia. En tales situaciones, inicialmente los alumnos se guiaban más por la similitud entre los resultados de la solución gráfica y la algorítmica.

6. *Escribir y realizar el algoritmo*. Los alumnos escribían el algoritmo considerando el sistema decimal y el signo correspondiente, y después revisaban el planteamiento de su operación. A continuación, procedían a solucionar el algoritmo. El guía ayudaba a aquellos que presentaban dificultades mediante preguntas, ejemplos o sugerencias, tratando de que fueran los propios alumnos los que descubrieran y rectificaran sus errores.
7. *Comprobar la coherencia del resultado del algoritmo con el entendimiento de la interrogante*. Los alumnos corroboraban su resultado, comparando el algoritmo con la representación gráfica o con un procedimiento de comprobación del algoritmo, como por ejemplo, en el caso de la resta, sumar el resultado y el sustraendo para obtener el minuendo o, en el de la suma, volver a sumar.
8. *Redactar la respuesta relacionándola con la interrogante*. Los alumnos escribían la respuesta señalando el valor numérico y a qué se refería éste. Se buscaba que el alumno analizara la correspondencia entre la pregunta y su respuesta.

Para que los niños fueran autónomos en las acciones anteriores, cada uno utilizaba una tarjeta mnemónica que guiaba su pensamiento estratégico (véase anexo 1). Conforme ellos comprendían mejor el proceso de razonamiento y solución del problema, y las acciones que implicaba, prescindieron de este apoyo y empezaron a adaptar la estrategia; por ejemplo, saltarse pasos que ya no necesitaban, tales como parafrasear el problema o dar una solución no algorítmica.

Como los alumnos estaban habituados a ser dirigidos por el maestro y a tener poca participación e interacción con los demás al resolver problemas, fue necesario explicar, modelar y subrayar continuamente las formas de participación del alumno y del guía.[1] Ello implicó que los alumnos vieran al adulto como guía y no como instructor.

Actividades del guía

a) Estimular el interés y el disfrute por el aprendizaje, promoviendo la confianza en las propias habilidades mediante el reconocimiento de esfuerzos y logros.
b) Favorecer la reflexión individual y grupal mediante el diálogo y la confrontación de ideas.
c) Reconocer las características de las soluciones dadas por cada niño y el origen de sus errores y, sobre esa base, proporcionar ayuda individual, la cual se graduaba de acuerdo con los avances particulares (andamiaje en la zona de desarrollo próximo).

Actividades del alumno

a) Discutir el problema con otro compañero para sustentar y contrastar sus propias ideas.
b) Trabajar individualmente en la planeación, solución y evaluación de su solución, utilizando, mientras lo considerara necesario, el apoyo mnemónico de la tarjeta autoinstruccional para guiar su razonamiento.
c) Discutir con el grupo las soluciones encontradas hasta llegar a una solución satisfactoria.

A continuación, se muestra un ejemplo del papel que desempeñaron los participantes, mientras resolvían un problema de comparación al inicio de la segunda fase de trabajo.

> *"En el partido de futbol que jugamos durante el recreo, Hugo metió 17 goles y Juan metió 8. ¿Cuántos goles menos que Hugo metió Juan?"*

[1] El guía fue uno de los investigadores que se encargó, bajo la supervisión y asesoría constante de dos expertos en la materia, de las evaluaciones y la aplicación del programa diseñado.

G:* ¿De qué trata el problema?
K: De que Hugo metió 17 goles y Juan 8, y cuántos goles menos metió Juan que Hugo.
G: ¿Están de acuerdo en que de eso trata el problema?
Ns: ¡Síííííííí!
G: ¿Cómo resolverían este problema, ayudándose con un dibujo? ¿Qué harían para encontrar el resultado?
K: (Después de un momento reflexión)... Pues dibujamos 17 pelotas y después le quitamos 8.
G: ¿Cómo saben que deben quitar y no sumar?
R: Porque dice menos, es una resta.
G: ¿Quién metió más goles?
K: Pues Hugo.
G: Necesitamos saber cuántos goles menos que Hugo metió Juan. ¿Por qué no encuentran la solución ayudándose con sus dibujos? [Algunos empiezan a dibujar.]
A: [Parece pensativo] ...Yo no entiendo qué hacer.
G: Lo vas a entender si usas objetos o dibujos [le proporciona fichas], trata de representar con ellas los goles que metió Hugo y aparte los que metió Juan.
A: [Pone dos grupos de fichas] Estos 17 metió Hugo [alínea 17 fichas] y estos 8 metió Juan [alínea 8].
G: Has representado los conjuntos de goles que cada uno metió, ahora observa y dime ¿quién metió más?
A: [Observa y contesta enseguida] ...Pues Hugo.
G: Ahora, revisa tu problema y dime qué te preguntan.
A: [Lee la pregunta] ¿Cuántos goles menos que Hugo metió Juan?
G: Entonces, ¿qué vas a hacer para saber el resultado?
A: Quito a Hugo los 8 que metió Juan [quita 8 fichas y cuenta el resto]. Son 9.
G: ¿Por qué quitaste 8 a Hugo?
A: Porque son las mismas que tiene Juan.
G: Y estas 9, ¿qué son?
A: Son con las que gana Hugo, entonces Juan metió 9 menos que Hugo.
G: Ahora, ¿cómo resuelves esto con un dibujo, usando sólo círculos para representar los goles?

* G = Guía, K = Karina, A = Alan, R = Rafael, Ns = todos los niños.

A: Pues dibujo primero los 17 de Hugo, después dibujo los de Juan y le quito a Hugo los que tiene Juan [dibujó un conjunto de 17 círculos, luego otro de 8, luego tachó 8 círculos en los dos conjuntos y después contó los restantes ∅∅∅∅∅∅∅∅OOOOOOOOO ∅∅∅∅∅∅∅∅]. Son 9, es igual que con las fichas, pero en mi dibujo tacho los mismos que tienen Juan y Hugo.
G: Y los 9 que sobran, ¿qué son?
A: Son los 9 goles menos que tiene Juan.
G: [Se dirige a una niña] Karina, ¿a ti qué te salió y de dónde salió tu resultado?
K: Me salió 9, igual que a Alan [muestra su dibujo ∅∅∅∅∅∅∅∅ OOOOOOOOO]. Pero yo dibujé primero l7 y después taché los 8 de Juan y me sobraron 9.
G: Es otra manera de encontrar el resultado. ¿Qué significan los 17 círculos?
Ñs: Son los goles que metió Hugo.
G: Y los 8 círculos tachados, ¿qué significan?
Ns: Son los goles que metió Juan.
G: ¿Y los 9 círculos restantes?
Ns: ¡Son los goles menos que metió Juan!
G: ¡Veo que entendieron muy bien el problema! Entonces, ¿qué operación harán para encontrar el resultado?
A: Una resta, 17 menos 8.
G: ¿Por qué una resta y no una suma?
K: Es una resta, porque dice menos que y si hacemos suma salen más.
A: Es una resta, porque quitamos en nuestro dibujo, entonces es de restar y no de sumar.
G: Háganlo y veamos si les sale igual o diferente que en su dibujo [empezaron a escribir la operación].
(La actividad continuó...)

En el ejemplo anterior, Alan no comprendía cómo resolver el problema. Con ayuda del guía, logró entender la relación entre el conjunto referente, el conjunto referido y la diferencia. Asimismo, al representar las variables con material, identificó la interrogante y la solución no algorítmica del problema. A continuación, contrastó su solución con la de Karina y, a partir de ello, los alumnos se dieron cuenta de que el algoritmo adecuado era la resta.

Fase 3. Evaluación final

Para valorar los logros del aprendizaje, nuevamente se aplicó la prueba informal de Solución de Problemas Matemáticos (adaptada de Flores, 1999) y, para indagar sobre las actitudes de los alumnos hacia la materia, se aplicó el Cuestionario de Actitud hacia las Matemáticas (García, 2002).

A fin de analizar los distintos tipos de soluciones y los razonamientos de los alumnos al resolver cada uno de los problemas, se utilizó la propuesta de Flores (2003, 2005), que destaca el papel de los conceptos:

Tipo I. Solución no canónica: El alumno aplica su conocimiento sobre una clase de problema que no corresponde con el que se plantea. Es una interpretación equivocada del problema.

Tipo II. Solución canónica basada en un esquema no algorítmico: El entendimiento corresponde a un significado *canónico*. En la solución no se recurre a una operación aritmética, por lo que se considera *no algorítmica*. Por lo general se llega a la solución mediante la manipulación de objetos o con dibujos que representan los elementos y las relaciones matemáticas contenidas en el problema.

Tipo III. Solución canónica-algorítmica basada en un esquema no algorítmico: El entendimiento corresponde a un significado *canónico*. Coexisten dos soluciones, una no-algorítmica y otra algorítmica, que se acepta, siempre y cuando lleve a un resultado congruente con la obtenida mediante la solución no algorítmica. En ocasiones se efectúa primero la solución no algorítmica y luego la algorítmica, y otras veces, se actúa al contrario.

Tipo IV. Solución canónica-algorítmica: Se entienden las relaciones planteadas en el problema conforme a su significado canónico. En la solución, se comprende la relación con un algoritmo en particular.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A fin de mostrar el progreso de los alumnos en la solución de problemas de suma y resta, a continuación se presentan los distintos tipos de soluciones que ellos dieron. Se presentan cuadros específicos para cada problema; en las columnas se indican los diferentes tipos de solución y en los renglones se indica con un número, el alumno del que se trata; del 1 al 5 fueron alumnos de tercer grado y del 6 al 11 de cuarto. Después de cada cuadro, se presenta un breve análisis de las actuaciones de los alumnos.

Problema Toño Transformación positiva e incógnita en el estado final

Toño tenía 19 animales, Paty le dio otros 15. ¿Cuántos animales tiene ahora Toño?				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	4, 6			1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11
Posevaluación			4, 6,	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11

En el problema TOÑO, se observa que, desde un inicio, la mayoría de los alumnos resolvió el problema empleando una solución algorítmica. En la preevaluación, dos niños dan una solución no canónica. En la posevaluación, se observa que ambos niños emplean el algoritmo basándose en su representación gráfica, logrando comprender la relación aditiva y la aplicación del algoritmo.

Problema Raúl Transformación negativa e incógnita en el estado final

Raúl tenía 22 canicas, le dio 13 canicas a Sergio. ¿Cuántas canicas tiene ahora Raúl?				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	3, 4, 5, 9, 10			1, 2, 6, 7, 8, 11
Posevaluación	4		5	1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11

En el problema RAÚL, se observa que, en la preevaluación, cerca de la mitad de los niños presentó una solución no canónica, asociaron el término "le dio" con la suma y explicaron *"es suma porque le está regalando", "hay que sumar para ver cuánto tiene"*. En la posevaluación, el cambio fue notorio, la mayoría presentó una solución canónica algorítmica, lo que indica la comprensión de una relación de sustracción y de la resta. Un niño identificó el algoritmo basándose en su representación gráfica, pero desconocía el procedimiento relacionado con la operación de descomposición de las decenas.

Problema Paco Combinación de dos conjuntos e incógnita en el conjunto compuesto

Paco tiene 9 barcos rojos y 3 barcos blancos. ¿Cuántos barcos tiene Paco?				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	4			1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
Posevaluación	4			1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

En el problema PACO, tanto en la evaluación inicial como en la final, casi todos los alumnos presentaron una solución canónica algorítmica, lo cual indica que conocían la relación entre los conjuntos elementales para formar el conjunto compuesto.

Problema María Combinación con incógnita en un conjunto elemental

María tiene 15 peces, 6 son azules y los demás son rojos. ¿Cuántos peces rojos tiene María?				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11			8
Posevaluación	4, 5, 10		6	1, 2, 3, 7, 8, 9, 11

El problema MARÍA fue difícil para los alumnos. En la preevaluación casi todos resolvieron el problema mediante una solución no canónica. La dificultad pudo estar relacionada con el entendimiento de la relación inversa entre la adición y la sustracción para determinar el conjunto compuesto, por consiguiente, no habían comprendido para este caso la aplicación de la sustracción. En la preevaluación utilizaron la suma y la multiplicación, respuestas que justificaron afirmando: *"es suma, lo pensé", "multiplicación, para que sea más rápido", "para saber cuántos peces tiene", "suma, si fuera resta, tendría menos peces", "multiplicas, porque tiene más peces".*

Estos resultados cambiaron favorablemente en la posevaluación, la mayoría de los alumnos resolvió el problema utilizando el algoritmo de la resta y justificando correctamente su solución, y un niño identificó el algoritmo apoyándose en su representación gráfica.

Problema Lucy Igualación e incógnita en la diferencia

Lucy tiene 13 palomas, Karina tiene 9. ¿Cuántas palomas necesita Karina para igualar a Lucy?				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11	6, 8		
Posevaluación	4, 5		1, 9, 10	2, 3, 6, 7, 8, 11

El problema LUCY también fue un problema difícil de solucionar. En la preevaluación, la mayoría de los alumnos dieron una solución no canónica. La mayoría consideró que, para igualar los conjuntos, había que agregar elementos mediante la suma. Dieron explicaciones como: *"es de más, porque tiene que igualar", "Ka-*

rina quiere igualar, es suma", "es suma, Karina necesita palomas", "es suma, no tiene que restar, no debe perder...". Asimismo, no identificaron la relación inversa entre adición y sustracción, ni su relación con el tamaño de los conjuntos. En la posevaluación más de la mitad dio una solución canónica algorítmica y tres alumnos se apoyaron en un gráfico y luego resolvieron con resta. Dos alumnos continuaron utilizando una solución no canónica (una suma); dijeron: *"no entiendo, sumo 13 más 9", "suma, porque sí"*.

Problema Lola Comparación e incógnita en el conjunto comparado

Lola tiene 13 pulseras, Laura le gana por 15. ¿Cuántas pulseras tiene Laura?				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	4, 5, 7, 9, 11		2, 3	1, 6, 8, 10
Posevaluación			4, 5, 7	1, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 11

En el problema LOLA, inicialmente algunos niños presentaron una solución no canónica. Los alumnos 4 y 7 sumaron en la evaluación inicial, pero no lograron comprender el problema; el niño 4 utilizó la suma para resolver todos los problemas, y el niño 7 sumó, pero basado en razones equivocadas, ya que afirmó: *"es suma, para que se igualen, para ver quién tiene más"*. En la posevaluación, la mayoría de los alumnos superaron sus dificultades y dieron una solución canónica algorítmica. En la posevaluación, los alumnos 4 y 7 se apoyaron en un esquema gráfico y después sumaron, presentando aún dificultad para entender que, en esta situación se calcula el conjunto comparado sumando el conjunto referente y la diferencia.

Problema Lety Comparación e incógnita en el conjunto comparado

Lety tiene 13 amigas, ella tiene 7 amigas más que Karla. ¿Cuántas amigas tiene Karla?				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10			2, 8, 11
Posevaluación	4, 5		1, 3, 7	2, 6, 8, 9, 10, 11

El problema LETY fue difícil. En la preevaluación, la mayoría dio una solución no canónica; mostraron dificultad para establecer el inverso recíproco entre el conjunto referente y el conjunto comparado, lo que los llevaría a entender la solución con el algoritmo de la resta. Al desconocer el concepto, asociaron la palabra "más", con una operación de suma, puesto que explicaron: *"suma es de más", "es suma, porque es multi", "es suma, si restas tendría pocas"*. Un niño utilizó la multiplicación e indicó: *"es multiplicación, veo sumas con 4 números y multi con 3 números"*. En la posevaluación, la mayoría dio una solución canónica algorítmica y tres se apoyaron en su representación gráfica.

Problema Susy Transformación e incógnita en el estado inicial

Susy tenía algunas Barbies, le regaló 9 a Alejandra. Ahora Susi tiene 17. ¿Cuántas Barbies tenía Susy al principio?

	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	1, 4, 5, 8, 9, 11		3	2, 6, 7, 10
Posevaluación			3, 4	1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

En el problema SUSY, inicialmente más de la mitad de los participantes utilizaron una solución no canónica, 3 emplearon resta, guiados por la palabra *"regaló"* y 4 emplearon correctamente la suma. Uno consideró la cantidad de números: *"falta un número para ser suma"*. Se les dificultó comprender la relación entre la inversión de la transformación y la adición. En la posevaluación, la mayoría empleó la solución canónica-algorítmica.

Problema Juan Transformación e incógnita en el estado inicial

Juan tenía algunos cuentos, Armando le dio 7 cuentos. Ahora Juan tiene 15 cuentos. ¿Cuántos cuentos tenía Juan al principio?

	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11			8
Posevaluación	4, 5	3	1	2, 6, 7, 8, 9, 10, 11

En la preevaluación, el problema JUAN también resultó difícil. La mayoría de los niños dio una solución no canónica. Presentaron dificultad para comprender la relación entre la inversión de la transformación positiva y el estado final para solucionar con una resta. Los alumnos tuvieron en cuenta la afirmación *"le dio"* para utilizar una suma en lugar de una resta; explicaron: *"suma, porque le dio", "suma, porque le está regalando"*. En la posevaluación, la mayoría emplearon una solución canónica-algorítmica.

Problema Rafael Transformación e incógnita en la transformación

Rafael tenía 16 naves. Le regaló algunas a Jorge. Ahora Rafael tiene 9 naves. ¿Cuántas naves le regaló a Jorge?				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Preevaluación	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11			7, 8
Posevaluación	4, 5		1, 3, 8	2, 6, 7, 9, 10, 11

En la preevaluación, el problema RAFAEL representó dificultad para comprender la relación entre la inversión de la transformación negativa y el estado final. Los alumnos optaron por basarse en información o palabras clave que les llevaron a razonamientos equivocados. Argumentaron: *"suma, porque le está regalando", "sumar, para saber cuántas tiene", "suma, por los números"*. En la posevaluación, la mayoría de los alumnos utilizó el algoritmo, aunque algunos se basaron en su representación gráfica.

Los resultados del presente trabajo muestran las bondades y la viabilidad del programa aplicado y coinciden con los obtenidos en otras investigaciones (Nunes y Bryant, 1997; Jordan y Montani, 1997; Flores, 1999; Aguilar y Navarro, 2000, Flores, Farfán y Ramírez, 2004), en las que se muestra la utilidad de promover y fortalecer el entendimiento y la solución de los problemas mediante una estrategia. Después de practicar la solución de diversos problemas de suma y resta con el procedimiento descrito, los alumnos, a excepción de los alumnos 4 y 5 que faltaron continuamente al taller, lograron un mejor entendimiento conceptual de los problemas y de los algoritmos de suma y resta. Estos cambios positivos se manifestaron de manera distinta en cada uno de ellos; algunos –entre la pre y la posevaluación– pasan de una solución no canónica a una canónica algorítmica, mientras que otros llegan al entendimiento del algoritmo apoyándose en su representación gráfica. Esto indica que el proceso de aprendizaje es distinto en cada alumno y que es importante tener en cuenta sus particularidades para poder apreciar su avance; asimismo, muestra la utilidad de valorar el aprendizaje del alumno comparándolo contra sí mismo.

Por otra parte, los resultados del presente estudio coinciden con los obtenidos por otros investigadores (Carpenter *et al.*, 1999), que señalan la necesidad de asegurar el conocimiento del sistema decimal para favorecer el conocimiento algorítmico de la suma y resta. Sin embargo, hay que hacer notar que este conocimiento no es suficiente. En la evolución del razonamiento de los niños al solucionar los problemas, desempeña un papel importante la posibilidad de simbolizar gráficamente las relaciones entre las variables del problema como base para entender la solución algorítmica (Hembree y Marsh, 1991; Martínez y Gorgorió, 2004; Flores, 2003 y 2005).

Las representaciones gráficas corresponden a las posibilidades de conceptuación del alumno y son acción intermedia para comprender el algoritmo. Es decir, la simbolización gráfica proporciona al alumno un apoyo para llegar a un entendimiento conceptualmente más avanzado implícito en la aplicación de un algoritmo. De acuerdo con Vergnaud (1997), esta evolución en el entendimiento obedece a que los conceptos son los ejes rectores de la acción. Al formar el individuo entramados de conceptos matemáticos cada vez más complejos, se va dando una comprensión cada vez más compleja, tanto de las relaciones matemáticas implícitas en los problemas como de los sistemas de simbolización y de los conceptos y principios matemáticos.

Para ejemplificar lo anterior, en la figura 1 se muestra la solución del niño 6 de cuarto grado que, si bien conoce el algoritmo, no entiende su vínculo con el problema y se guía por una palabra "pista"; afirma que si el problema dice "le dio" se trata de una resta. En contraste, en la figura 2 se muestra que, al finalizar el programa, el alumno ya no se deja guiar por palabras "pista", dibuja ambos conjuntos y establece una relación entre la transformación positiva y el estado inicial para calcular el estado final y luego emplea el algoritmo de la suma, finalmente comprueba el resultado mediante una resta. En este caso, la niña comprende que la suma de objetos equivale a sumar cantidades que representan los objetos.

La niña 11 es otro ejemplo, ella basa su razonamiento inicialmente siguiendo la "pistas" que le ofrece el tamaño de las cifras. En la figura 3 se muestra cómo, en la preevaluación, no logra establecer una relación entre el conjunto compuesto y el conjunto elemental conocido para poder calcular el valor del conjunto elemental desconocido. Ella multiplica y justifica el empleo de este algoritmo por-

Figura 1 Solución no canónica del alumno 6 en la preevaluación

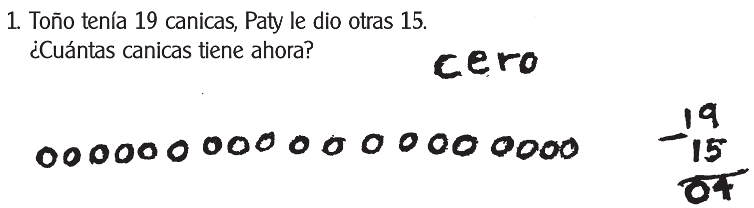


Figura 2 Solución canónica-algorítmica basada en un esquema no algorítmico, obtenida por el alumno 6 en la posevaluación

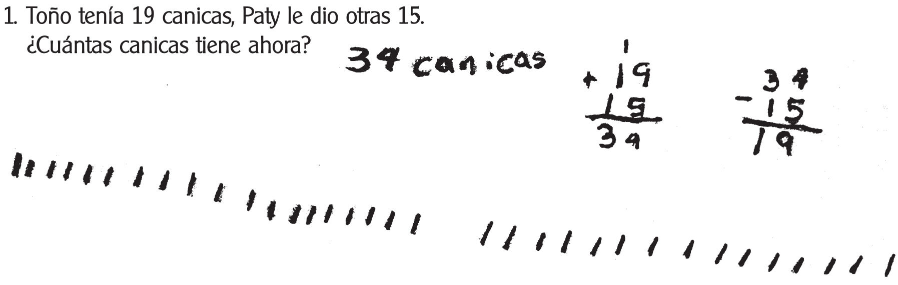
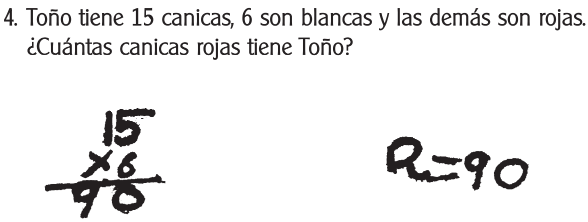


Figura 3 Solución no canónica de la alumna 11 en la preevaluación



que las cifras se ajustaban a la práctica del algoritmo. En contraste, en la posevaluación (figura 4) la niña ya no se guía por las pistas, determina el conjunto elemental desconocido estableciendo una relación inversa entre la adición y la sustracción (como si se dijera: si 6 más algo dan 15, 15 menos 6 me darán el algo que no conozco); calcula mentalmente la sustracción, luego resta con el algoritmo, finalmente comprueba su resultado con una suma y un dibujo en el que vuelve a representar la sustracción del conjunto compuesto y el elemental conocido para encontrar el elemental desconocido. El dibujo le sirve a la niña para estar segura del empleo del algoritmo, pues al utilizarlo, corrobora la relación entre los conjuntos elementales y el compuesto.

Igualmente, la representación gráfica sirve a los niños para solucionar el algoritmo. Por ejemplo, en la figura 5 se muestra una solución errónea de un ni-

Figura 4 Solución canónica-algorítmica de la alumna 11 en la posevaluación

4. Toño tiene 15 canicas, 6 son blancas y las demás son rojas.
¿Cuántas canicas rojas tiene Toño?

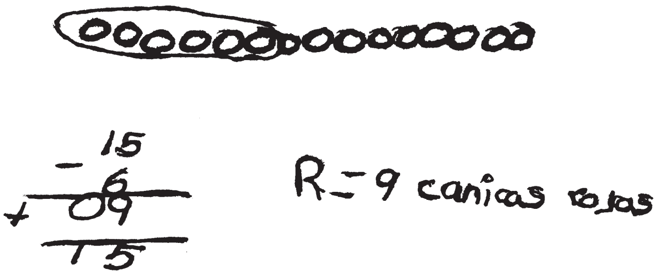
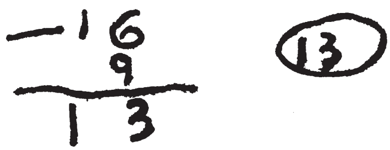


Figura 5 Solución errónea del algoritmo de la resta, realizado por el niño 1 en la preevaluación

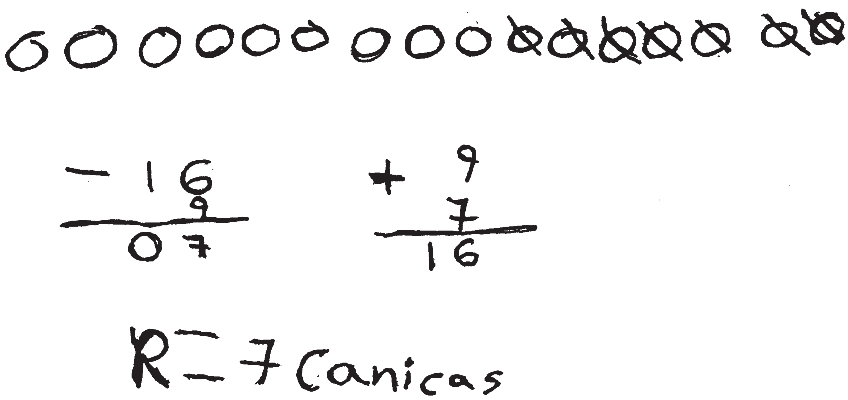
10. Toño tiene 16 canicas. Le regaló algunas a Paty. Ahora tiene 9 canicas.
¿Cuántas canicas le regaló a Paty?



ño sin el apoyo gráfico: resta indiferentemente, sin considerar el minuendo y el sustraendo. En contraste, en la figura 6, con el apoyo del gráfico, soluciona correctamente el mismo problema, primero lo representa dibujando las cantidades, después hace la resta y comprueba con el gráfico y con la suma, lo cual muestra un entendimiento más profundo de la relación entre la resta, el estado inicial, el final y la transformación.

Figura 6 Uso de un gráfico para entender las relaciones entre las variables del problema y asociarlo con el algoritmo de la resta, realizado por el niño en la posevaluación

10. Toño tiene 16 canicas. Le regaló algunas a Paty. Ahora tiene 9 canicas. ¿Cuántas canicas le regaló a Paty?



Otro aspecto que avala las bondades del programa, son las opiniones expresadas por los alumnos. Al inicio, ellos se expresaban acerca de las matemáticas afirmando: *"no me gustan", "son muy aburridas", "son difíciles", "no les entiendo"*. Al concluir el programa, la mayoría de los niños mostraban interés y se sentían competentes. Del *Cuestionario de actitudes del alumno hacia las matemáticas* se obtuvieron los siguientes comentarios:

Preguntas	Respuestas
¿Por qué te gustan las matemáticas?	"Hacemos muchas cosas y aprendemos" "Son muy importantes, bonitas, divertidas" "Son materias y juegas, sabes mucho" "Sin ellas, no sabríamos nada"
¿En qué eres bueno en las matemáticas	"En todo" "En el sistema decimal" "En las sumas" "En las restas y multiplicaciones" "En tablas"
¿Qué te cuesta más trabajo en las matemáticas?	En casi nada" "En ninguna parte" "No me cuesta trabajo" "En multiplicaciones" "En tablas y divisiones"

Este cambio de perspectiva de los alumnos indica que un posible origen del rechazo hacia las matemáticas es la falta de experiencias en situaciones de aprendizaje significativas para los alumnos, en las que se parta de su entendimiento y se proporcionen apoyos que los ayuden a estructurar sus acciones durante la solución.

CONCLUSIONES

El estudio mostró que las experiencias de aprendizaje fueron útiles para estos alumnos con dificultades al aprender a solucionar problemas de suma y resta, pues se pretendió favorecer que: *a)* practicaran problemas que desde su perspectiva tuvieran diferentes niveles de complejidad; *b)* emplearan una estrategia que les ayudara a estructurar su razonamiento; *c)* recibieran apoyos acordes con su conocimiento; *d)* valoraran sus procedimientos de solución basados en representaciones no algorítmicas, y *e)* discutieran sus soluciones.

También se comprobó que es importante conocer las características del conocimiento que posee cada alumno, para así poderles brindar el apoyo especial que requieren y fomentar la comprensión de soluciones canónicas algorítmicas.

Una limitación del presente estudio es no haber podido contar con un grupo de comparación que no participara en el programa; lamentablemente, las condiciones de la escuela en la que se llevó a cabo el trabajo no lo permitieron.

Para obtener mejores resultados, considerando los modelos actuales de apoyo integral para los alumnos de bajo rendimiento, se recomienda que programas de apoyo como el propuesto se trabajen conjuntamente con los maestros de grupo y los padres y madres de los alumnos. De esta manera, lo aprendido en el aula de apoyo se fortalecería en el aula regular y en el hogar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, V. y G. Navarro (2000), "Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en alumnos", *Revista de Psicología General y Aplicada*, vol. 53, núm. 1, pp. 63-83.

Bermejo, V., M. Lago, P. Rodríguez y M. Pérez (2000), "Fracaso escolar en matemáticas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles", *Revista de Psicología General y Aplicada*, vol. 53, núm. 1, pp. 43-62.

Carpenter, T., E. Fennema, M. Franke, L. Levi, y S. Epson (1999), *Children's Mathematics*, Wisconsin, Heinemann.

Claudine, M. (2003), "La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire", *Éducation et francophonie*, vol. XXXI, núm. 2.

Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaria de Educación Básica y Normal (1999a), *Fichero de actividades didácticas de matemáticas. Segundo grado*, México, Secretaría de Educación Pública (SEP).

—— (1999b), *Fichero de actividades didácticas de matemáticas. Tercer grado*, México, SEP.

—— (1999c), *Fichero de actividades didácticas de matemáticas. Cuarto grado*, México, SEP.

Flores, R. C. (1999), "La enseñanza de una estrategia de solución de problemas a alumnos con problemas de aprendizaje mediante la capacitación a madres", *Integración: Educación y Desarrollo Psicológico*, núm. 11, pp. 1-17.

—— (2003), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y solución*, Aguascalientes, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Flores, R. C. (2005), "El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas", *Educación Matemática,* vol. 17, núm. 7, pp. 7-34.

Flores, R.C., A. Farfán y C. Ramírez (2004), "Solución de problemas de adición y sustracción en alumnos con problemas en el aprendizaje de las matemáticas", *Revista Mexicana de Psicología,* núm. 2, pp. 179-190.

García, O. (2002), *Estrategias para favorecer el aprendizaje de solución de problemas matemáticos de suma y resta,* Tesis de maestría, México, Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México.

Hembree, R. y H. Marsh (1991), "Problem Solving in Early Childhood: Building Foundations", en R.J. Jensen (ed.), *Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics,* Nueva York, Macmillan, pp. 151-170.

Jordan, N. y T. Montani (1997), "Cognitive Arithmetic and Problem Solving: A Comparison of Children with Specific and General Mathematics Difficulties", *Journal of Learning Disabilities,* vol. 30, núm. 6, pp. 32-57.

Kloosterman, P. (1996), "Students Beliefs about Knowing and Learning Mathematics: Implications for Motivation", en M. Carr (ed.), *Motivation in Mathematics,* New Jersey, Hampton Press.

Macotela, S., P. Bermúdez e I. Castañeda (1996), *Inventario de ejecución académica,* México, Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México.

Martínez, S.M. y S.N. Gorgorió (2004), "Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado", *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* vol. 6, núm. 1, consultado en http://redie.uabc.mx/vol6no1/contenidosilva.html.

Mendoza, M.J. (2004), "La reforma curricular y los problemas en la clase de matemáticas", en A.L.M. Ávila (Dir.), D. Aguayo, J.L. Eudave, A. Estrada, J. Hermosillo, M. Mendoza, E. Saucedo y E. Becerra, *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas,* México, SEP, pp. 103-164.

Monereo, C., M. Castello, M. Clariana, M. Palma y M. Pérez (1994), *Estrategias de aprendizaje,* Barcelona, Grao.

Nunes, T. y P. Bryant (1997), *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del alumno,* México, Siglo XXI.

Orrantia, J. (2003), "El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva", *Infancia y Aprendizaje,* vol. 6, núm. 4, pp. 451-468.

Podall, M. y M. Comellas (1996), *Estrategias de aprendizaje: su aplicación en las áreas verbal y matemáticas,* Barcelona, Laertes.

Rojas, S. (2000), "Guided Participation, Discurse and Construction of Knowledge in Mexican Classrooms", en H. Cowie y G. van der Aalsvoort (eds.), *Social Interaction in Learning and Instruction: The Meaning of Discourse for the Construction of Knowledge*, Oxford, Elsevier.

Vergnaud, G. (1997), "The Nature of Mathematical Concepts", en T. Nunes y P. Bryant (eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*, Hove, Reino Unido, Pshychology Press, pp. 5-28.

—— (2000), "Constructivism et apprentissage des mathematiques", Trabajo presentado en la Conferencia sobre Constructivismo en Ginebra, Suiza.

ANEXO 1. DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES DE LA ESTRATEGIA, LAS ACCIONES IMPLICADAS Y LAS RESPECTIVAS AUTOINSTRUCCIONES (ADAPTADO DE FLORES, FARFÁN Y RAMÍREZ, 2004)

Componentes	Acciones	Autoinstrucciones
Análisis y planificación	Leer y expresar lo que se entendió del problema	Leo el problema
		Lo platico
	Identificar la interrogante	Digo la pregunta
	Identificar la información numérica relevante	Busco los datos
Ejecución y monitoreo de la solución	Representar gráficamente el problema para solucionarlo	Hago un dibujo del problema
		Con mi dibujo busco la solución
	Establecer una relación entre la solución no algorítmica y la algorítmica	Con mi dibujo busco la operación
Evaluación de la solución	Escribir y realizar el algoritmo	Escribo la operación
		Resuelvo la operación
	Comprobar la coherencia del resultado algorítmico con el entendimiento de la interrogante	Compruebo mi operación
		Compruebo mi resultado
	Redactar la respuesta relacionándola con la interrogante	Escribo la respuesta completa

DATOS DE LOS AUTORES

Octaviano García
Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México, México
octa_72@hotmail.com

Estela Jiménez
Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México, México
estela00@prodigy.net.mx

Rosa del Carmen Flores
Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México, México
rfm@servidorunam.com.mx