

## **Réplica a la ponencia:**

### **Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica del doctor *Ángel Gutiérrez*.**

Jesús Murillo Ramón

*Departamento de Matemáticas y Computación. Universidad de La Rioja*

#### **Resumen**

*En nuestra opinión, plantarse una réplica a una ponencia, resulta en principio más cómodo y menos comprometido que elaborarla y presentarla a la comunicad científica, pues entendemos que bastaría con plantear la misma exponiendo aquellos aspectos más interesantes, destacando sus puntos fuertes y planteando puntos de vista alternativos sobre algunos aspectos recogidos en la misma, que como cualquier objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática puede contemplarse desde una óptica o perspectiva diferente, sin que esto signifique que el planteamiento sea mejor o peor, sino que constituyen elementos enriquecedores, con el objetivo fundamental de mejorar el proceso educativo de las matemáticas en todos los niveles educativos y aumentar el éxito escolar.*

*Estos posibles enfoques diferentes son los que permiten plantear elementos de discusión o debate, que enriquecen y sugieren otros objetos de estudio y líneas de investigación de la Didáctica de la Matemática. Con estos planteamientos, desarrollaremos la réplica que sigue a continuación. Vaya por delante nuestro reconocimiento a la amplia y fructífera trayectoria investigadora del Dr. Gutiérrez.*

La ponencia presentada, comienza con una **Introducción** en la que se plantea en primer lugar una breve visión del uso de herramientas informáticas en la enseñanza de las Matemáticas y en particular en la de la Geometría. Señala asimismo el interés que en estos momentos existe en los investigadores por estudiar su utilización, sobretodo el del software de Geometría Dinámica.

El profesor Gutiérrez destaca la principal ventaja que presenta este software, sobre los materiales didácticos tradicionales tanto estáticos como dinámicos, a saber: La facilidad de representar figuras geométricas, en las que se pueden realizar mediciones y experimentaciones, que sugieren a los usuarios, el planteamiento de conjeturas en relación con el problema propuesto y su verificación, enfocando en muchos casos su solución y/o la posibilidad de encontrar propiedades matemáticas no evidentes de las figuras con las que abordar la resolución del problema planteado.

El objetivo fundamental de la ponencia es “*describir, ejemplificar y analizar las principales herramientas metodológicas disponibles en la actualidad para las investigaciones sobre procesos de aprendizaje de la demostración basadas en el uso del software de Geometría Dinámica en el contexto más específico de la resolución de problemas*”.

En el siguiente apartado de **Múltiples puntos de vista para analizar...**, señala las partes 2 críticas de cualquier investigación experimental en Didáctica de las Matemáticas: La recogida de la información de los estudiantes durante los experimentos y el análisis de esta información, haciendo hincapié en la dificultad de conocer *qué pasa por la cabeza de los alumnos* cuando están implicados en la actividad matemáticas, *cómo analizan y transforman* la información, ..., aspectos fundamentales a tener en cuenta para mejorar el proceso de aprendizaje. De aquí el interés en que la recogida de la información sobre el proceso que han seguido en la resolución del problema, sea lo más completa posible ya que resulta fundamental para el investigador de cara a determinar las claves para entender qué han hecho los estudiantes y por qué lo han hecho.

A continuación pasa a describir algunas de las formas más usuales de recogida de la información en las investigaciones experimentales en Didáctica de las Matemáticas, incidiendo especialmente en aquellas que son casi exclusivas del software Cabri II Plus y no presentes en otro software de Geometría Dinámica. De entre los diversos métodos para recoger datos sobre las producciones de los alumnos (respuestas a cuestionarios, soluciones de problemas...), toma en consideración la forma más usual de resolver un problema utilizando software de geometría dinámica y elige uno específico de este contexto de experimentación, en el que se utilizan básicamente funcionalidades casi exclusivas de Cabri II Plus, aunque también señala la complementariedad en la recogida de información de los otros métodos usuales.

Para recoger los datos considera los siguientes instrumentos:

1. En los *archivos* creados por los estudiantes con las figuras construidas, utiliza la funcionalidad **revisión de la construcción**<sup>1</sup>. Aspecto este que el ponente Dr. Gutiérrez ilustra perfectamente con el gráfico de la Figura 1.
2. *Registro automático* de la actividad de los estudiantes durante el proceso de resolución, la funcionalidad **grabar sesión**<sup>2</sup> que cuando se activa guarda de forma sucesiva las diversas pantallas del proceso de resolución del problema que el estudiante realiza. Se trata de una herramienta de investigación muy valiosa, ya que permite hacer un seguimiento de la actividad del estudiante durante el proceso de resolución y detectar los momentos en los que surgen las ideas que les permiten resolver el problema o les conducen al bloqueo.

El ponente ilustra la utilización de este instrumento con la presentación de los gráficos correspondientes al proceso de resolución de un problema en la Figura 2 y procede a analizar la sesión correspondiente, poniendo en evidencia que si bien resuelven algunas cuestiones al investigador, también le quedan preguntas sin contestar (¿Por qué utiliza una determinada estrategia?, ¿Por qué han intuido un determinado camino a seguir?,...) 1 Es una funcionalidad del menú Edición, que permite visualizar todas las etapas de la construcción, y en la versión para Windows también aparece una ventana de texto explicativa de la etapa de construcción correspondiente, disponiendo de varias opciones. 2. Por supuesto existe la posibilidad de leer las distintas pantallas, navegando por ellas y su impresión.

3. *Auto-protocolo* escrito por los estudiantes. Según el ponente, una variante de una metodología típica de investigación “pensar en voz alta”, que consiste en dar una directriz a los estudiantes en la que se les pide que paralelamente a la resolución del problema, escriban comentarios sobre sus procesos de decisión, produciendo menos interferencias que “pensar en

---

<sup>1</sup> Es una funcionalidad del menú Edición, que permite visualizar todas las etapas de la construcción, y en la versión para Windows también aparece una ventana de texto explicativa de la etapa de construcción correspondiente, disponiendo de varias opciones.

<sup>2</sup> Es una funcionalidad del menú Sesión, permite grabar según una sesión de las pantallas según los intervalos de tiempo que se establecen. Por supuesto existe la posibilidad de leer las distintas pantallas, navegando por ellas y su impresión.

voz alta”, pues dado que utilizan el ordenador, en todo caso deben detener su flujo de pensamiento. El auto-protocolo es un instrumento que puede confirmar o completar la conclusión extraída del análisis del registro de la sesión y de la revisión de la construcción.

Para el análisis de los datos recogidos, después de haber revisado la literatura especializada en el contexto del software de la Geometría Dinámica, destaca los siguientes marcos:

1. Análisis de los *tipos de arrastre* realizados en la pantalla del ordenador. Señala esta función como elemento fundamental favorecedor del aprendizaje y con ventaja a otros materiales clásicos (material articulable o deformable) por su gran libertad de movimientos y de transformación que posee, además de permitir a los alumnos la verificación de que la construcción realizada es correcta. Destaca como más útiles, siguiendo a Arzarello y otros (1998 b, 2002) y Hölzd (1996) los siguientes.

a. **Arrastre de test** (test). Para comprobar si la construcción realizada conserva las condiciones matemáticas del problema.

b. **Arrastre errático** (wandering). El arrastre se hace sin ninguna finalidad específica, explorando en búsqueda de invariantes sin ninguna idea previa.

c. **Arrastre guiado** (guided). Se arrastra un objeto, con la finalidad de obtener un caso particular de la figura construida.

d. **Arrastre sobre un lugar geométrico oculto** (dummy locus o lieu muet).

2. Análisis de las *fases de resolución* de un problema de demostración. En la figura 7 presenta un proceso ideal de resolución de un problema de demostración, aunque el ponente señala bien que los procesos seguidos por los estudiantes pueden diferir bastante del ideal por muy diversos motivos, entre otros por la acción tutorial.

3. Análisis de la *unidad cognitiva de teoremas* observables en la resolución con éxito de problemas de demostración.

En relación a los dos marcos anteriores de fases de resolución y unidad cognitiva de teoremas y las ilustraciones sobre los mismos con dos ejemplos uno de alumnos de Secundaria y otro de alumnos de la Facultad de Matemáticas, los planteamientos metodológicos de la investigación deben ser distintos, dado que las competencias exigidas en los currícula correspondientes y los conocimientos básicos son de distinto nivel, lo que plantea diferenciar las actividades a resolver por los alumnos de ambos niveles educativos. En el texto de la ponencia parece no quedar clara la necesidad de diferenciación entre las exigencias de conjetura, conjetura y demostración y demostración.

La demostración es un concepto extraordinariamente complejo en el que intervienen muchos aspectos distintos: lógica, argumentación, verdad conocimiento, ..., lo que conduce a crear alrededor de esta idea una especie de niebla que no deja ver con claridad cuáles son los elementos fundamentales a la hora de tratar de conseguir que nuestros estudiantes sean capaces de entender, apreciar y producir sus propias demostraciones. La demostración coexiste con otros tipos de pruebas normalmente aceptadas en los distintos ámbitos en que se mueven los estudiantes –los distintos contextos institucionales- o simplemente la demostración tiene distintos significados según el contexto institucional en el que se genera.

El uso de la demostración estrictamente deductiva en el marco escolar ha sido ampliamente discutido Villiers(1993, 2000), Garuti, Boero y Lemut, Mariotti(1998). Godino y Recio (1997), Recio (1999), cuestionándose su uso, sobretodo en los niveles no universitarios.

Como consecuencia de esta revisión, la demostración aparece hoy como un objeto complejo estrechamente relacionado con otros elementos de validación como pueden ser los de explicación, comprobación, argumentación y prueba, teniendo un significado más abierto que acepta, junto a la

demostración estrictamente deductiva, la necesidad de otros modos de validación de tipo empírico-deductivo, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización.

Esto permite dar un significado a la demostración, más amplio que el estrictamente deductivo y más cercano a las capacidades lógicas de los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria.

Algo más al respecto del análisis de la continuidad cognitiva diremos en el apartado de puntos débiles de la ponencia.

4. Análisis de la *los tipos de demostraciones* realizadas por los estudiantes. Presenta de forma resumida la clasificación de las formas de resolver problemas de los estudiantes de diferentes niveles educativos descritos por Balacheff y por Harel y Sowder, considerando los dos bloques el de demostraciones empíricas y el de las deductivas.

Finalmente presenta un diagrama que describe las relaciones entre los instrumentos y procedimientos de recogida de datos y los tipos de análisis presentados. Sugiere la posibilidad de ampliarlo añadiendo metodologías más generales de recogida y análisis de datos.

En la segunda parte de esta réplica señalamos los que en nuestra opinión son los puntos más destacables de la ponencia presentada.

1. Los momentos en que nos encontramos, con un potente desarrollo de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) y una fuerte implicación en el sistema educativo de las Matemáticas, la ponencia presentada es totalmente oportuna al plantear aspectos metodológicos de la investigación en un contexto concreto en el que se hallan inmersos muchos investigadores y a los que puede servir de gran ayuda, destacando además la claridad con la que está escrita.

2. La elección como software de Geometría Dinámica de los existentes en la actualidad -el ponente ha elegido CABRI II Plus-, destacando algunas funcionalidades específicas que permiten recoger un determinado tipo de información, no accesible con otros.

3. El esquema del proceso ideal de resolución de un problema de demostración, para analizar las fases de la resolución.

Seguidamente tres puntos débiles o no considerados en la ponencia.

1. Dado que en la ponencia se plantean aspectos metodológicos, consideramos que un aspecto olvidado es no haber realizado un análisis más en profundidad del software de Geometría Dinámica existente, señalando sus ventajas e inconvenientes tanto desde el punto de vista didáctico tanto como instrumento de investigación. La elección llevada a cabo por el ponente por Cabri II Plus y algunas funcionalidades -casi exclusivas- del mismo, recogidas en el texto de la ponencia, parecen sugerir la idoneidad del mismo, pero seguimos considerando necesario un análisis más en profundidad del software de Geometría Dinámica disponible.

Ampliando la consideración anterior, planteamos la necesidad de contemplar el uso de los applets de Java. La utilización por parte de los alumnos, sobretudo en el ámbito de la Educación Secundaria, del programa Cabri exige por una parte la necesidad de disponer localmente del software correspondiente y por otra de un aprendizaje previo del mismo con lo que esto supone en cuanto a tiempo y esfuerzo por parte de los alumnos, independientemente de que el aprendizaje de Cabri en sí mismo tiene de valor formativo. Este tiempo de dedicación puede ser sustituido en determinadas condiciones por applets de Java.

2. Poca claridad en la necesidad del diseño específico de las actividades, con una estructura y

exigencias concretas y diferenciadas según el nivel educativo a que van dirigidas. Bien es verdad que el análisis desarrollado se hace como ilustración, pero en cualquier caso consideramos oportuno hacer la siguiente puntualización en cuanto al Análisis de la *unidad cognitiva* de teoremas planteado a partir de la Figuras 8 y 9, dadas las implicaciones tanto educativas como de investigación que se plantean:

El programa Cabri ha ayudado en la elaboración de las conjeturas por parte de los alumnos de ESO. Estos han realizado el razonamiento inductivo (fase ascendente) de la misma manera que los estudiantes de la Facultad de Matemáticas en la Figura 6.

Ahora bien la capacidad deductiva, el bagaje matemático, la capacidad de expresión y la experiencia de unos y otros no son los mismos. Consideramos por tanto que no puede equipararse la investigación con estudiantes de la Facultad de Matemáticas con la que se puede realizar con los alumnos de la ESO. Posiblemente el alumno de la ESO no tenga asimilado el concepto de mediatriz como lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos, ni maneje la relación entre la medida del ángulo inscrito en una circunferencia y la del ángulo central correspondiente, ni mucho menos la de arco capaz de un ángulo. Entendemos que es necesario tener adquiridos estos conceptos y haber experimentado con ellos para poder elaborar demostraciones deductivas planteadas en el problema de la Figura 9.

Consideramos que para poder hablar de “continuidad cognitiva del teorema” es necesario que los alumnos conozcan los conceptos, definiciones y propiedades necesarios para poder construir la demostración deductiva y, así, relacionarlos con los argumentos previamente producidos en la primera fase de la exploración inductiva.

En nuestra opinión, no podemos, por tanto, hablar de “continuidad cognitiva” en este caso, en el sentido de Mariotti (1997). Los estudiantes de ESO han encontrado durante la actividad exploratoria las ideas base para la construcción de la actividad deductiva, pero no han podido “identificar las relaciones funcionales entre los hallazgos producidos en la fase ascendente y las definiciones, propiedades, etc.” necesarios para poder realizar la actividad deductiva final, porque estas definiciones no forman parte de su bagaje matemático, ni tienen la capacidad de argumentación ni el entrenamiento de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas.

3. No señala la importancia del trabajo colaborativo como elemento a tener en cuenta en las investigaciones sobre enseñanza apoyada en las TIC, por su influencia en las interacciones que se producen. Además, los análisis presentados en la ponencia, al menos en uno, el caso de los estudiantes de la Facultad, trabajan por parejas.

Asumiendo la idea constructivista del aprendizaje y la “construcción social” del conocimiento, consideramos que un elemento que forma parte de las propuestas metodológicas de investigación en el contexto de la ponencia, lo constituye “utilizar y analizar la influencia del trabajo colaborativo en la mejora de la capacidad de demostración matemática en nuestros alumnos utilizando las posibilidades que brindan las TIC”.

Un breve esquema de propuesta de trabajo a desarrollar en este sentido, utilizando un entorno interactivo de aprendizaje, compuesto por una red electrónica, Cabri e Internet (para una descripción mas completa véase Murillo, 2000) planteada en dos fases podría ser la siguiente:

- En un primer momento, pretendemos que los alumnos asuman el sentido de la demostración matemática, a distinguir una demostración de otras formas de argumentación y a comprender cuáles son los elementos que la componen y el proceso general para desarrollarla.

Se utiliza un proceso de comunicación bidireccional entre el “profesor virtual”<sup>3</sup> y el alumno a través

---

<sup>3</sup> El “profesor virtual” es un profesor que no está presente en la clase y que recibe los mensajes de correo electrónico de los alumnos. Está encargado de aclarar las dudas que se produzcan, corregir las respuestas de los

del correo electrónico. Esto es, se plantea una actividad de iniciación en la página Web del proyecto, en ella se pide al alumno que haga una construcción con Cabri Géomètre II, que tome medidas, que manipule la figura, que trate de tomar conciencia de una propiedad geométrica que se da en la misma, que no debe depender de la figura concreta realizada, sino que deberá ser válida para un conjunto de figuras. Esta propiedad no se le da de forma explícita, sino que se espera que la obtenga por manipulación. Una vez obtenida, se le pide que la exprese con su propio vocabulario y particular sintaxis, y que intente justificar su respuesta.

Aquí se realiza una correspondencia epistolar electrónica entre el alumno y el “profesor virtual” mediante la que se van poco a poco dando instrucciones, animando, dando o no valides a las deducciones obtenidas, y puliendo la respuesta hasta llegar a una comprensión por parte del alumno del concepto de demostración, de los elementos que la componen y del tipo de expresión adecuada para explicitar la demostración requerida.

Las actividades planteadas son específicas, diseñadas y dirigidas a desarrollar la capacidad de demostración de los alumnos en el ámbito de la Geometría

- La segunda fase corresponde a las actividades del Foro de discusión, en las que básicamente el procedimiento es el siguiente:

1. Los alumnos reciben la propuesta de actividad a través de la página Web o del correo electrónico.
2. Individualmente y utilizando Cabri y/o el applet correspondiente, elaboran una primera aproximación de la demostración, que es enviada al Foro de discusión (Tablero electrónico). En caso de ser necesario los alumnos envían los gráficos correspondientes al profesor virtual para hacerlos asequibles a todos.
3. Los alumnos discuten las respuestas dadas apoyándose en los gráficos que están accesibles, trabajando colaborativamente hasta conseguir entre todos mejorar éstas y llegar a una expresión más completa, aunque no única para todos.

Seguidamente planteamos **tres puntos de interés para debatir**, en relación con la utilización del software de geometría Dinámica en el proceso educativo de las Matemáticas.

1. La elección de un determinado software de Geometría Dinámica, ¿influye en los resultados del aprendizaje de los alumnos? O ¿solamente determina la metodología de investigación que intenta establecer los posibles beneficios cognitivos en los alumnos?
2. ¿Se deben incorporar los applets de Java en los enunciados de las actividades geométricas planteadas a nuestros alumnos? O ¿suponen un exceso “conductista” en el camino a seguir por nuestros alumnos en la resolución del problema planteado?
3. ¿Debe fomentarse el trabajo colaborativo como elemento potenciador del aprendizaje de nuestros alumnos? O ¿se trata de uno más de los métodos de trabajo con los alumnos?

A continuación se muestran ejemplos de actividades, que ilustran nuestra postura en cuanto al papel que juega Cabri, los applets de java y el diseño específico de las actividades y que en cierta manera es nuestra respuesta a las tres cuestiones planteadas anteriormente.

En la actividad que se muestra a continuación llamada Actividad 1, applet de Java que aparece en el enunciado de la misma, no aporta mas información que si hubiésemos utilizado un gráfico estático. Casi el único motivo del mismo, con su animación es hacer un enunciado más atractivo y motivador

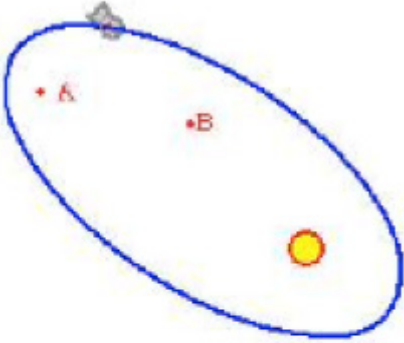
---

alumnos y sobre todo establecer con los alumnos una relación personal lo más estrecha posible y animar a todos a realizar esfuerzo para realizar la demostración. Esto tiene para los alumnos un gran atractivo y se ha comprobado que el ascendente de este profesor sobre el alumno es superior incluso al del profesor real que está en la clase presencial

para que el alumno intente responder a la vez que ilustra el enunciado.

### ACTIVIDAD 1

- Un cometa describe una órbita alrededor del Sol como la de la figura.



- En el mismo plano de la órbita, hay **dos satélites artificiales** fijos A y B encargados de estudiar al cometa.
- En cada momento estudia al cometa **el satélite que está más próximo**.
- ¿Podrías decirnos en qué zona de la órbita estudia al cometa el satélite A y en qué zona el satélite B?
- Razona y justifica tu respuesta

En la siguiente actividad se modelizan las que se pueden utilizar para desarrollar trabajo colaborativo a través del Foro de discusión (tablero electrónico).

## ACTIVIDAD R1.

**Vamos a intentar determinar si existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.**

**1.** Construye, utilizando el programa CABRI, un triángulo ABC, rectángulo en C.

*NOTA: Es importante que el triángulo rectángulo que obtengas, se mantenga siempre rectángulo, aunque modifiques mediante arrastre de los vértices las dimensiones y posición del mismo.*

**2.** Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo ABC.

**3.** Determina las áreas A1, A2 y A3 de estos cuadrados.

**Pregunta 1.1:** ¿Existe alguna relación entre éstas áreas? ¿Cuál?

[Ir al tablón de respuestas](#)

Si no encuentras ninguna relación y no puedes responder a esta pregunta, puedes consultar [Ayuda R1.1](#). (haz click sobre el texto Ayuda R11 en azul). Solicita la ayuda, sólo en el caso de que después de haber pensado no encuentres alguna relación.

[Mas Ayuda R11](#) (haz click sobre el texto Mas Ayuda R11 en azul).

Si todavía no has encontrado una respuesta puedes solicitar alguna ayuda enviando un mensaje por correo electrónico a algún compañero o a tus profesores, solicitando alguna aclaración.

---

Una vez que hayas respondido a la Pregunta 1. 1, sigue leyendo este documento.

[Pregunta 1.2.](#) (Haz click sobre el texto Pregunta 1.2., resaltado en color azul para pasar a la siguiente cuestión en relación con la actividad R1).

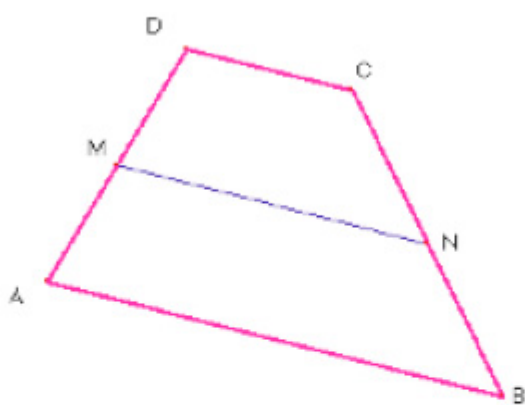
[Ir al tablón de respuestas](#)

En el texto del enunciado aparecen enlaces con archivos que en su caso permiten al alumno resolver por si mismo algunas cuestiones básicas necesarias para el desarrollo de su actividad., así como enlace con el



Tablero electrónico.

**Actividad 1**  
Construye un trapezio cualquiera ABCD como el de la figura que se muestra a continuación. Halla los puntos medios de los lados no paralelos y únelos mediante un segmento MN.



El diagrama muestra un trapezio con vértices etiquetados como A (abajo izquierdo), B (abajo derecho), C (arriba derecho) y D (arriba izquierdo). Los lados AD y BC son los lados no paralelos. Los puntos M y N están marcados en los lados AD y BC, respectivamente, representando sus puntos medios. Una línea segmentada MN conecta estos dos puntos.

---

**Pregunta 11A:**  
¿Qué **relación** hay entre las medidas de **MN** y las de las bases **AB** y **CD**?  
Justifica la respuesta.

---

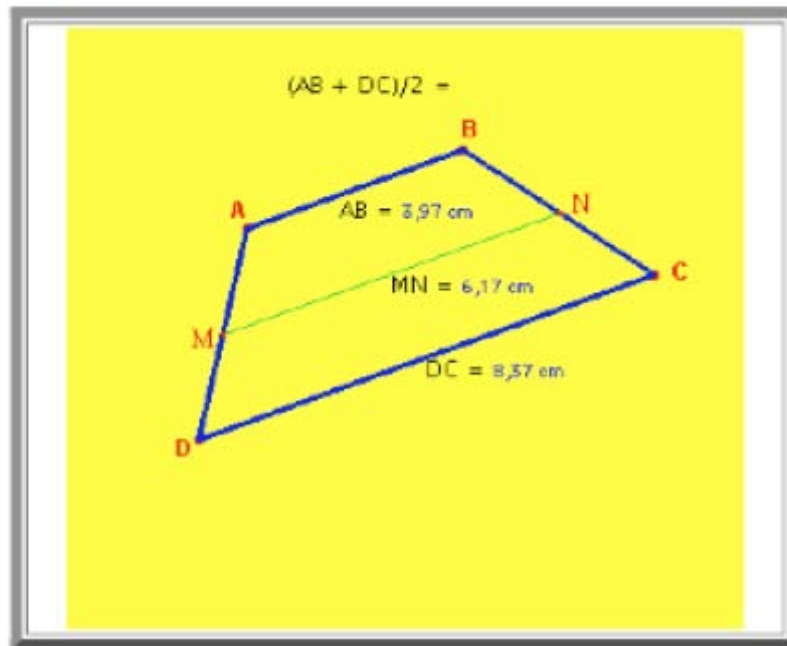
**Pregunta 11B:**  
Enuncia con tus palabras el resultado(teorema) que has obtenido y pónle el nombre que te parezca oportuno

En el enunciado de esta actividad aparece un enlace trapezio, que se muestra a continuación y dentro un enlace con un applet de Java, que muestra un aspecto de la demostración.

**TRAPECIO:**

Un trapezio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Para explorar la figura trapezio puedes enlazar con el siguiente [applet](#)

Esto es un applet de Java que te permite modificar la figura pero manteniendo las condiciones características del trapecio - tener dos lados paralelos-.



### Referencias bibliográficas.

- Garuti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998). Cognitive units of theorems and difficulty 13 of proof.. En A. Olivier and K. Newstead (Eds.). *Proceedings of the 22th Internacional Conferencie of PME* (Vol, 2). Stellenbosch, South Afica.
- Godino, J. D. Recio, A. M. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. Meaning of proofs in mathematics education En E. Pehkonen (Ed): *Proceedings of the 21 th International Conference of PME*, Vol 2, Pp.313-321
- Martínez Recio, Á. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Córdoba. Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Murillo, J., y Fortuny, J. M.(2003/04). Interactividad en la Red. Contextos Educativos. *Revista de Educación*. Vol 6-7, p 295-316. Servicio de Publicciones. Universidad de la Rioja.
- Murillo, J. (2001). Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la E.S.O. Tesis doctoral Universitat Autònoma de Barcelona.
- Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista matemática de bachillerato*, N° 26 15-30.
- Villiers, M. de (2000). Developing understanding of Proof. within the context of defining quadrilaterals. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (<http://www-cabri.imag.fr/Preuve>).