

La recta numérica en los libros de texto en España

Alicia Bruno y Noemí Cabrera

Resumen: Se presenta un estudio de cómo se trabaja la recta numérica en los libros de texto de tres editoriales en España (Edebé, Santillana y SM) correspondientes a los cursos de la enseñanza obligatoria (primaria y secundaria), en las unidades didácticas de números. Se ha observado para qué y cómo se utiliza la recta: aspectos numéricos, tipo de representación y estructura de los problemas que se presentan. Los resultados indican que hay diferencias entre las editoriales en relación con la frecuencia y la manera de utilizar la recta. Ésta se utiliza principalmente en el momento de introducir un nuevo sistema numérico y en menor medida aparece relacionada con las operaciones básicas.

Palabras clave: recta numérica, libros de texto, sistemas numéricos, operaciones básicas, representaciones.

Abstract: This article reports a results of a study about how the number line model is treated for whole Compulsory Education by three different Spanish edits (Edebé, Santillana and SM), in mathematic textbooks, within the unit of knowledge about numbers. It has been observed what for and how the number line is used: number aspect, different representations and problem structures. The results point that there are differences between edits in relation to frequency and the way they use it. The number line is mainly used at the moment of introducing a new number system (whole numbers, integer, rational or real numbers) and less often the number line is related to basic operations.

Keywords: number line, textbooks, number systems, basic operations, representations.

Fecha de recepción: 1 de septiembre de 2005.

INTRODUCCIÓN

La recta numérica es una representación fundamental en la enseñanza de los números. Ernest (1985) señala que la recta en la enseñanza primaria puede utilizarse: 1) como un modelo de enseñanza para ordenar números, 2) como un modelo para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y 3) como contenido mismo del currículo de matemáticas. Mientras que los dos primeros aspectos –la recta como modelo para ordenar y para las operaciones– forman parte de las decisiones metodológicas que los profesores pueden tomar, el último aspecto –como contenido mismo del currículo de matemáticas– refiere a que la recta debe formar parte del conocimiento matemático que adquieran los alumnos. En general, los currículos de los diferentes países incluyen los tres aspectos señalados. Ernest añade que muchos textos matemáticos elementales recomiendan el uso de la recta como modelo para la enseñanza de la suma y la resta de los números naturales de un dígito y, además, investigadores en educación matemática consideran la habilidad para realizar cálculos representándolos en la recta como uno de los comportamientos que reflejan comprensión de las operaciones elementales.

Sin embargo, el uso de la recta numérica como modelo para las operaciones no resulta fácil para muchos estudiantes de primaria y secundaria. Carr y Katterns (1984) mostraron pruebas de que la mayoría de los estudiantes de primaria no comprenden los principios en los que se basan las representaciones de las operaciones de suma y resta de números naturales en la recta.

Pantsidis y otros (2004) señalan que la recta es un modelo geométrico que implica un intercambio continuo entre una representación geométrica y otra aritmética. En la dimensión geométrica, los números señalados en la recta se corresponden con vectores y con un conjunto de puntos discretos señalados sobre ella. En la dimensión aritmética los puntos sobre la recta están numerados de manera que la medida de la distancia entre los puntos representa la diferencia entre los números correspondientes. Estos investigadores creen que la presencia simultánea de estas dos ideas condiciona el éxito de los estudiantes al resolver tareas aritméticas. También Janvier (1983) considera que la recta como modelo para las operaciones presenta dificultades, porque los números tienen una doble representación, ya que pueden ser posiciones sobre la recta o desplazamientos sobre ella.

También con números negativos, los trabajos realizados muestran que la recta no es un modelo obvio para los estudiantes y que se necesita un proceso de instrucción en el aula para su uso correcto (Bruno y Martínón, 1997). En Bruno y

Cabrera (2005) se realiza una clasificación de los errores de los estudiantes en dos procesos distintos: *representar en la recta situaciones reales e interpretar representaciones dadas en la recta*, cuando están implicados números negativos. El estudio distingue entre errores conceptuales y procedimentales y confirma la importancia de la instrucción en este modelo. El trabajo de Gallardo y Romero (1999) muestra las dificultades de los alumnos al utilizar rectas con escalas diferentes a la unidad en las que se señalan números negativos.

Entendemos que la importancia del conocimiento de la recta, como modelo y como contenido matemático, radica en que es una representación común a todos los sistemas numéricos y sirve de hilo conductor para el conocimiento numérico. La recta debe tener un tratamiento a lo largo de toda la escolaridad a medida que los alumnos van conociendo los diferentes tipos de números. Sin embargo, la realidad es que su uso depende del docente y, en ocasiones, de la propuesta curricular que él siga.

Los libros de texto son un testimonio de los diferentes enfoques de enseñanza con los que pueden tratarse los conceptos matemáticos. Una manera de ver la importancia que se le otorga a la recta en la enseñanza numérica es analizarla en los libros de texto. Por eso, nos planteamos estudiar cómo se usa la recta en los libros de texto a lo largo de la primaria y la secundaria en los tres aspectos que señala Ernest: como contenido matemático, como modelo para las operaciones y como modelo para ordenar números. Las preguntas que nos hacemos son que, en el caso utópico de que un alumno siguiera los libros de matemáticas de una misma editorial durante su escolaridad obligatoria, ¿mantendría un uso similar de la recta a medida que avanza en la enseñanza?, ¿usaría la recta en todos los sistemas numéricos?, ¿de qué manera?, ¿sería suficiente ese uso?

No es fácil encontrar un marco con el cual analizar libros de texto cuando éstos se refieren a un contenido concreto, ya que los estudios relativos a los libros de texto plantean un análisis global de éstos. Van Dormolen (1986) diferencia en el análisis de textos: análisis *a priori*, *a posteriori* y *a tempo*. Define como análisis *a priori* de los textos el estudio del texto como posible medio de instrucción, el análisis *a posteriori*, como el que sirve para comparar los resultados del aprendizaje con el texto y, el análisis *a tempo*, como al que estudia la manera en la que los estudiantes y profesores lo manejan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los análisis *a posteriori* y *a tempo* dependen de los profesores y los alumnos.

Nuestra investigación es un análisis de los libros de textos *a priori*. Algunas preguntas que plantea Van Dormolen a la hora de hacer un análisis *a priori* son:

- ¿Hay algo erróneo que el profesor debería corregir?
- ¿Hay alguna carencia? Si la hay, ¿debería el profesor tener cuidado y dar la información suplementaria en el aula?
- ¿Es “claro” el texto desde el punto de vista matemático?
- ¿Es el texto tan exhaustivo que no provoca ninguna actividad mental en los estudiantes? Si ése es el caso, ¿debería el profesor mantener esa parte del texto fuera del alcance de los estudiantes?
- ¿Es genuina la matemática?

Esta investigación aspira a contestar, al menos parcialmente, a las dos primeras cuestiones; es decir, si en el tratamiento de la recta en los libros de texto hay representaciones inadecuadas o carencias que los profesores deberían conocer para mejorar o completar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Planteamos un estudio del tratamiento que recibe la recta en los libros de texto de la Educación Primaria y Secundaria Obligatoria en tres editoriales españolas de amplia difusión. Aunque la recta suele aparecer en diferentes contenidos (números, funciones, medida, gráficos estadísticos...), en este trabajo nos centramos en sus apariciones en los temas de números y de álgebra, ya que en éstos deben explicarse los principios en los que se basa el modelo de la recta.

Los aspectos matemáticos en los que aparece la recta en los temas de números son los siguientes: concepto de número, suma, resta, multiplicación, división y orden. Los principales objetivos que nos planteamos en este trabajo son los siguientes:

1. Estudiar en qué sistemas numéricos (\mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z} y \mathbb{R}) y con qué frecuencia se utiliza la recta numérica en la Educación Primaria y Secundaria Obligatoria.
2. Analizar para qué aspectos numéricos y con qué continuidad se emplea la recta: concepto, operaciones u orden.
3. Distinguir cómo son las representaciones utilizadas en la recta para los aspectos de concepto, operaciones y orden. Estudiar los tipos de representaciones, el uso de rectas horizontales o verticales, y las estructuras de los problemas verbales (aditivos y multiplicativos) que se representan con la recta.

El análisis se realizó con 10 libros de cada una de las editoriales ya citadas (un libro de cada curso de primaria y secundaria) del actual Sistema Educativo español. En España, la enseñanza primaria comprende seis cursos (con alumnos de edades comprendidas entre 6 y 12 años) y la enseñanza secundaria obligatoria consta de cuatro cursos (con alumnos de edades comprendidas entre 12 y 16 años). Los textos analizados fueron publicados entre 1993 y 2002. La diferencia de fechas entre unos y otros no cambia sustancialmente las conclusiones de este trabajo, ya que las nuevas reediciones mantienen escasas modificaciones sobre los anteriores libros en los aspectos analizados en este trabajo.

CONCEPTO DE NÚMERO

En el aspecto de *concepto de número* incluimos las representaciones de los números cuando éstos no están asociados a ninguna operación ni al orden. Es de esperar que esto suceda en el momento de introducir un nuevo sistema numérico, pero no únicamente ahí.

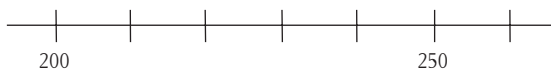
Estudiamos si las representaciones en la recta se usan para “colocar los números” (representar los números de manera aislada) o como apoyo para “estimar”.

Figura 1 Representación de la recta para colocar puntos



Aproxima en la recta los siguientes números: 3, 1, 0 y -1

Figura 2 Representación de la recta para estimar



Aproxima en la recta los siguientes números: 234, 257 y 209

Además, diferenciamos si los números se representan con puntos o con flechas y si las rectas usadas son horizontales, verticales o ejes cartesianos.

Figura 3 Representación de una suma con *puntos-flecha*

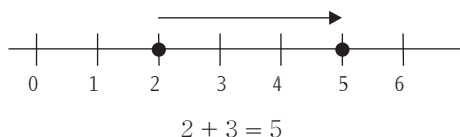
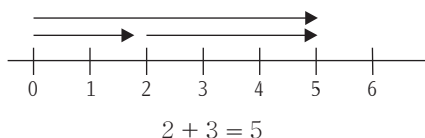


Figura 4 Representación de una suma con *tres flechas*



SUMA Y RESTA

En la suma y resta distinguimos si las representaciones utilizadas son del tipo *puntos-flecha* (véase figura 3) o del tipo *tres flechas* (véase figura 4). En ocasiones estas representaciones pueden venir acompañadas de un problema aditivo verbal. Por ello, también distinguimos el tipo de estructura de problema a la que se asocian.

Los problemas aditivos que hemos analizado son los siguientes, adoptando la notación de Bruno y Martín (1997):

- *Cambio*: $e_i + v = e_f$ (estado inicial + variación = estado final). “Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?”
- *Combinación*: $e_1 + e_2 = e_t$ (estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total). “Pedro tiene 8 pesetas y debe 15 pesetas. ¿Cuál es su situación económica total?”
- *Dos cambios*: $v_1 + v_2 = v_t$ (variación primera + variación segunda = variación total). “La temperatura bajó 11 grados y luego subió 5 grados. ¿Cómo varió la temperatura con respecto a la que hacía antes de moverse?”
- *Comparación*: $e_1 + c = e_2$ (estado menor + comparación = estado mayor). “Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?”

Figura 5 Representación del producto como *sumas reiteradas*

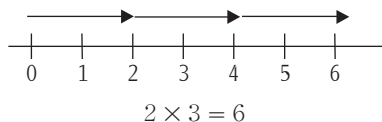
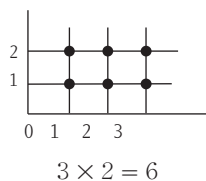


Figura 6 Representación del producto como *producto cartesiano*



PRODUCTO

Para el producto distinguimos si las representaciones que se utilizan son de *sumas reiteradas* (véase figura 5) o bien de *producto cartesiano* (véase figura 6).

Igual que en las sumas y las restas, estas representaciones pueden aparecer contextualizadas con problemas de multiplicación o división. Distinguimos si los problemas que aparecen son de:

- *Razón*: “Tengo 42 sillas que quiero colocar en 7 filas del mismo tamaño. ¿Cuántas filas podré formar?”
- *Comparación*: “Juan tiene 23 años y su abuelo tiene tres veces la edad de Juan. ¿Cuántos años tiene el abuelo de Juan?”
- *Producto cartesiano*: “Tengo 4 blusas y 5 pantalones. ¿De cuántas maneras distintas me puedo vestir?”

RESULTADOS

En el cuadro 1 podemos ver la frecuencia con la que aparece la recta numérica en los 10 cursos analizados y en cada editorial. Además, se muestra esta frecuencia desglosada en cada uno de los aspectos numéricos. Los porcentajes en el cuadro se han calculado con respecto a la frecuencia con la que aparece la recta en cada editorial.

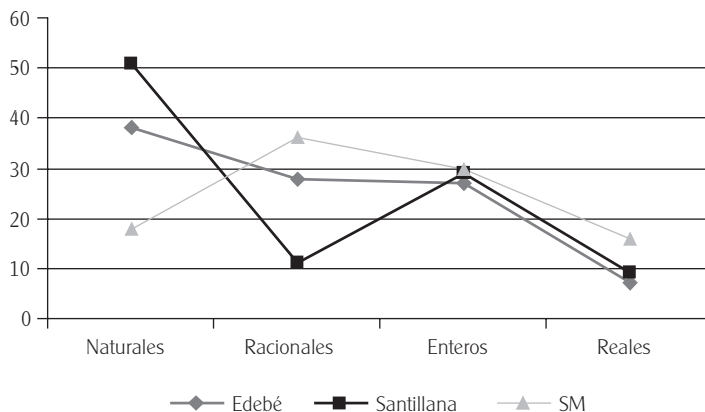
Cuadro 1 Frecuencia con la que aparece la recta en las tres editoriales

	Edebé	Santillana	SM
Núm. de apariciones de la recta por editorial	196	268	164
Concepto de número	143 de 196 (73%)	155 de 268 (58%)	125 de 164 (76%)
Suma	23 de 196 (12%)	73 de 268 (27%)	24 de 164 (15%)
Resta	5 de 196 (2%)	19 de 268 (7%)	7 de 164 (4%)
Producto	2 de 196 (1%)	7 de 268 (3%)	6 de 164 (4%)
División	0 de 196 (0%)	0 de 268 (0%)	0 de 164 (0%)
Orden	23 de 196 (12%)	14 de 268 (5%)	2 de 164 (1%)

En primer lugar, existen diferencias llamativas entre las editoriales en las representaciones de la recta en los 10 cursos. Destaca Santillana con un total de 268 presentaciones de la recta para los distintos aspectos, frente a las 164 de SM.

Las tres editoriales coinciden en que el *concepto de número* es el aspecto en el que más se utiliza la recta, con mucha diferencia respecto a su uso para representar las cuatro operaciones y el orden. Aun cuando Santillana es la editorial que mayor frecuencia presenta para el *concepto de número* (155), SM y Edebé tienen mayores porcentajes respecto al número de veces que usan la recta (73% y 76%, respectivamente).

Los porcentajes de aparición de las representaciones en la recta descienden de manera notoria para las operaciones. La *suma* es la operación en la que mayor número de veces se utiliza la recta y porcentajes mucho menores presentan la *resta* y el *producto*. En ninguna de las tres editoriales aparece la recta relacionada con la *división*. Santillana es la editorial que más utiliza la recta como modelo para *sumar, restar y multiplicar*. Por lo tanto, la recta no es un modelo con el que se explican las cuatro operaciones en ninguna de las tres editoriales. Estos datos indican que la recta no se trabaja de una manera homogénea en las diferentes editoriales como modelo para las operaciones, ya que existe una fuerte diferencia entre la operación de suma y las restantes operaciones. Atendiendo a los textos de estas editoriales, los alumnos tendrían una visión incompleta del modelo de la recta. Por lo tanto, en el proceso de enseñanza-aprendizaje es necesario que las actividades de estos libros de texto se complementen con otras en las que la recta aparezca como modelo para las diferentes operaciones.

Figura 7 Porcentajes de uso de la recta según los sistemas numéricos

Igual perspectiva tiene el uso de la recta para *ordenar*, ya que salvo Edebé (con un porcentaje de 12%), las otras editoriales no utilizan la recta como modelo para ordenar.

Los datos globales por sistemas numéricos (figura 7) muestran diferencias entre las editoriales en los porcentajes de los números naturales y los racionales. Sin embargo, tienen semejanzas en los números enteros y los reales. En estos últimos números hay un escaso uso de la recta, ya que no se utiliza normalmente para explicar las operaciones, sino en la introducción del sistema numérico. En el sistema de los números enteros, las tres editoriales tienen porcentajes en torno a 30%. Es llamativo cómo Santillana pasa de un uso de la recta superior a 50% en los números naturales a un 10% en los racionales. De las tres editoriales, Edebé es la que mantiene más regularidad por sistemas numéricos.

Si se opta por usar la recta como modelo de enseñanza de los números, su uso debe ser constante en el aprendizaje de los diferentes sistemas numéricos a lo largo de la escolaridad. No tiene sentido que la recta sea un modelo utilizado a menudo en los primeros años escolares con el aprendizaje de los naturales y que desaparezca en los años sucesivos con los racionales, para volver a utilizarse en la secundaria con los números enteros. Conseguir un aprendizaje unificado de los números requiere conectar los diferentes sistemas numéricos a través de diferentes representaciones. La enseñanza debe propiciar el uso de modelos que permitan establecer estas conexiones. Sin duda, la recta es un modelo que sirve de hilo conductor del aprendizaje numérico.

Aunque los resultados por sistemas numéricos son diferentes en cada editorial, hay un mayor uso de la recta en la educación primaria que en la secundaria, principalmente debido a las escasas representaciones de los números reales. Esto es un resultado de interés, ya que, a partir de la enseñanza de los números reales, comienzan las conexiones con otros temas, como las funciones o las gráficas estadísticas. Es necesario, por lo tanto, realizar en esta etapa secundaria un mayor esfuerzo en las representaciones en la recta, a fin de evitar posteriores dificultades en los temas que implican el uso de los ejes cartesianos.

CONCEPTO DE NÚMERO

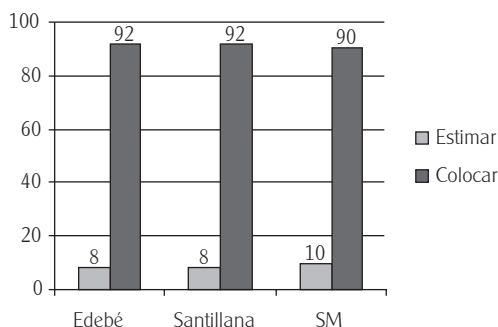
El cuadro 2 muestra los datos referidos a la frecuencia con la que aparece la recta en el aspecto de *concepto de número* desglosados por sistemas numéricos. El porcentaje se ha calculado con respecto a la frecuencia en el *concepto de número* de cada editorial.

Se pueden observar porcentajes muy diferentes no sólo en cada editorial, sino también en los distintos sistemas numéricos. Santillana es la editorial que más trabaja el *concepto de número* natural en la recta (46%), frente a SM que presenta el menor número de rectas con los números naturales (13%). En la introducción de los números racionales, tanto SM como Edebé destacan con porcentajes que duplican a Santillana. Para los números enteros, las tres editoriales tienen un tratamiento similar y, sin embargo, no ocurre igual con los reales, ya que Edebé tiene porcentajes inferiores a las otras dos editoriales.

En definitiva, las tres editoriales muestran diferencias entre sí y además tienen poca regularidad en el uso de la recta para el *concepto de número* en los diferentes sistemas numéricos. Esto significa que una editorial opta por presentar los números en la recta en el momento de introducir un determinado sistema numérico y, sin embargo, minimiza esta representación al introducir otro siste-

Cuadro 2 Frecuencia de la recta en el *concepto de número* para cada sistema numérico

Concepto	Frecuencia	N	Q	Z	R
Edebé	143 de 196	48 (33%)	51 (36%)	34 (24%)	10 (7%)
Santillana	155 de 268	71 (46%)	27 (17%)	34 (22%)	23 (15%)
SM	125 de 164	17 (13%)	52 (42%)	30 (24%)	26 (21%)

Figura 8 Porcentaje de los dos usos de la recta: estimar y colocar

ma numérico. Por ejemplo, la editorial Santillana ha utilizado 71 representaciones de la recta numérica para los números naturales, pero disminuye considerablemente su uso para el resto de los sistemas numéricos. Un tratamiento desigual de la recta numérica según el sistema numérico que se esté estudiando hace que pierda su efectividad como modelo para conectar los distintos tipos de números. Pensamos que la recta debe recibir un tratamiento similar a lo largo de la escolaridad primaria y secundaria, especialmente en los momentos de introducción de cada nuevo sistema numérico. Esto implica la necesidad de que el profesor complemente las actividades de los libros de texto con otras en las que la recta numérica propicie la relación entre los sistemas numéricos.

En las tres editoriales se utiliza la recta con porcentajes similares (Edebé: 92%; Santillana: 92%; SM: 90%), principalmente, para “señalar” o “situar” números de manera precisa. Sin embargo, son escasas las ocasiones en las que la recta sirve de apoyo para “estimar” la posición de determinados números (véase figura 8). Además, coinciden en estimar la localización de números racionales, en particular números decimales, mientras que no se estima nunca la posición de números enteros en la recta.

Las tres editoriales coinciden en que se estima principalmente en la recta con números racionales (en particular con números decimales) o reales, mientras que no se estima nunca con números enteros en la recta, como podemos ver en el cuadro 3.

Cuadro 3 Frecuencia de la recta para estimar y colocar por sistema numérico

Concepto	N		Q		Z		R	
	Estimar	Colocar	Estimar	Colocar	Estimar	Colocar	Estimar	Colocar
Edebé	0	48	9	42	0	34	3	7
Santillana	5	66	3	24	0	34	5	18
SM	1	16	4	48	0	30	8	18

Tipo de representaciones

En el concepto de número hemos analizado el tipo de representaciones en la recta y la orientación de éstas. Como se ve en los porcentajes de la figura 9, hay una similitud en las tres editoriales, ya que, en la mayoría de los casos, los números se representan con puntos, siendo escasas las representaciones con flechas de números aislados.

Pensamos que el predominio de las representaciones con puntos, y las escasas ocasiones en las que se invita al alumno a representar números con flechas, constituye una razón de la dificultad en la comprensión de la representación de las operaciones (suma, resta, multiplicación o división) en la recta.

En Bruno y Cabrera (2005) se presentan ejemplos de diferentes errores de los alumnos al representar números y operaciones mediante el uso de flechas. En dicho trabajo se encontró que algunos alumnos dibujan las flechas con doble extremo, lo cual no permite saber la orientación positiva o negativa. También se observaron errores de *conteo* al señalar el tamaño de la flecha. Estos dos as-

Figura 9 Tipos de representación

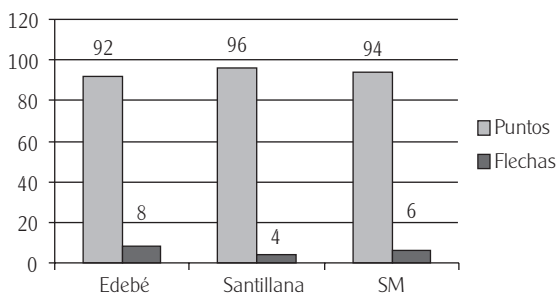
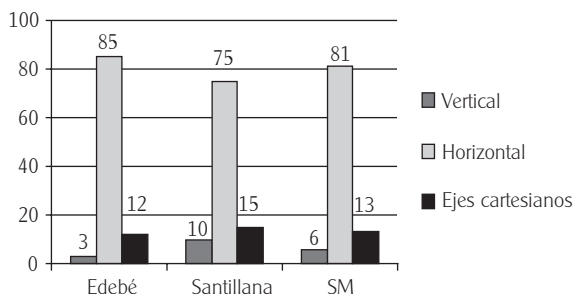


Figura 10 Orientación de la recta

pectos se ejemplifican en la figura 11, donde aparece una flecha con doble señalización en los extremos y con un error de conteo, provocado porque los alumnos cuentan las marcas que quedan entre los extremos de la flecha.

En cuanto a la orientación de la recta (figura 10), domina la orientación horizontal y llama la atención el que se produzcan más apariciones de ejes cartesianos que de rectas verticales. En algún caso, hemos observado que se trabajan representaciones con ejes cartesianos (por ejemplo, diagramas de barras) desde los primeros cursos de la educación primaria, sin haber presentado previamente la recta numérica vertical en ninguna ocasión.

En el caso de la editorial Edebé, hemos observado que las escasas ocasiones en las que se utilizan rectas verticales se refieren a diagramas pictóricos (el termómetro, el ascensor y el nivel del mar, en contextos de los números enteros, en la educación secundaria), pero en ningún caso encontramos una recta numérica descontextualizada con orientación vertical. Sin embargo, desde el quinto curso de primaria se introducen los ejes cartesianos con los números naturales. Desde nuestro punto de vista, esto es un error en la secuencia de aprendizaje, ya que un adecuado dominio de los ejes cartesianos requiere un dominio de las representaciones en rectas verticales.

Ninguna editorial representa los números reales en rectas verticales, siempre aparecen en rectas horizontales, además sólo una editorial (Santillana) representa los números reales en los ejes cartesianos. El predominio de lo horizontal tie-

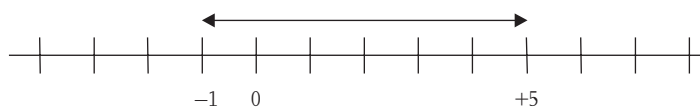
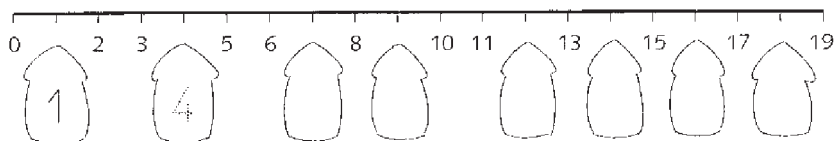
Figura 11 Ejemplos de errores de los alumnos al representar con flechas

Figura 12 Situar con puntos números naturales en la recta
(Santillana, 1º Primaria)

🌐 **Completa.**



ne una clara repercusión en el aprendizaje de las gráficas estadísticas desde la educación primaria, o de las funciones en una etapa posterior.

En la figura 12 mostramos uno de los ejemplos más representativos del *concepto de número*, esto es, una representación de los números que hemos denominado “colocar” con puntos en una recta con orientación horizontal.

SUMA Y RESTA

En el cuadro 4 observamos los resultados sobre el uso de la recta para representar sumas y restas según los sistemas numéricos. En este caso, se presenta el número de apariciones de la recta en cada editorial y no los porcentajes. Es decir, el número 196 que aparece en la columna de frecuencia del cuadro 4 para la editorial Edebé se refiere a que hemos encontrado 196 representaciones de la recta en los 10 libros analizados de dicha editorial.

La recta se utiliza principalmente como modelo para sumar y restar con los números naturales y los enteros y, escasamente, con los racionales y los reales. Ninguna de las tres editoriales trabaja la suma y la resta en la recta de manera regular en los distintos sistemas numéricos, y esto disminuye en los números racionales y reales. La razón de ello es que, normalmente, en el tratamiento de las fracciones y de los decimales prevalecen otras representaciones, principalmente los modelos de “parte-todo” en forma de círculos o rectángulos.

Por otra parte, con los números reales, el interés didáctico por explicar las operaciones con representaciones gráficas disminuye considerablemente, ya que al alumno se le supone una mayor capacidad de abstracción para comprender estas operaciones.

Se puede observar también la disminución del uso de la recta para restar con respecto al total de rectas y en comparación con la suma. Este tratamiento de la

Cuadro 4 Frecuencia de representaciones de sumas y restas en la recta, según los sistemas numéricos

	Frecuencia	N	Q	Z	R
Suma					
Edebé	23 de 196	14	0	7	2
Santillana	73 de 268	37	0	36	0
SM	24 de 164	7	4	13	0
Resta					
Edebé	5 de 196	4	0	1	0
Santillana	19 de 268	17	0	2	0
SM	7 de 164	0	4	3	0

recta como modelo de la suma y de la resta por parte de las editoriales nos parece incorrecto, ya que puede llevar a una visión parcial de este modelo, en el sentido de que puede llevar al alumno a creer que la recta es un modelo para sumar, pero no para restar.

Tipos de representaciones y estructuras de problemas aditivos

Las editoriales Edebé y Santillana coinciden en sumar y restar utilizando principalmente la representación de *puntos-flecha*, sobre todo con los números naturales y enteros, mientras que SM utiliza principalmente la representación de *tres flechas* (véase el cuadro 5).

En la casilla “Otros” se han clasificado las situaciones en las que se plantea a los alumnos una suma o una resta con datos numéricos ($5 + 4 = 9$; $7 - 3 = 4$) y se les indica que la representen en una recta dada en blanco, como se explica en la figura 13.

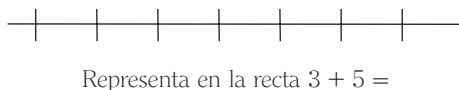
En el caso de la figura 13, no podemos situarla en ninguna de las representaciones previas, pero son indicadores de uso de la recta para sumar o restar. También se ha clasificado en “Otros” las representaciones que no se corresponden ni con *puntos-flecha* ni con *tres flechas*. Como la de la figura 14, en la que se suman dos medidas (estados).

En la figura 15 se presenta un ejemplo de suma de fracciones en la que se

Cuadro 5 Tipos de representaciones de la suma y la resta en las tres editoriales

Representación	Editorial	N	Q	Z	R	Total
<i>Puntos-flecha</i>	Edebé	13	0	8	0	21
	Santillana	38	0	22	0	60
	SM	4	0	4	0	8
<i>Tres flechas</i>	Edebé	0	0	0	0	0
	Santillana	9	0	0	0	9
	SM	0	7	8	0	15
Otros	Edebé	5	0	0	2	7
	Santillana	7	0	16	0	23
	SM	3	1	4	0	8

Figura 13 Ejemplo de actividad de los libros de texto



ha utilizado una representación del tipo *tres flechas*. Obsérvese que, tanto en la figura 14 como en la 15, las representaciones de las operaciones están descontextualizadas. Sin embargo, la recta puede aparecer relacionada con una situación real, en general, con un problema aditivo, como se indicó en el apartado de objetivos y metodología. En el cuadro 6 señalamos los porcentajes de rectas contextualizadas con un problema, así como el tipo de estructuras que presentaban los problemas.

En los problemas asociados a las representaciones predomina la estructura de cambio ($e_1 + v = e_2$), siendo la única que se repite en las tres editoriales. Destaca el escaso número de situaciones contextualizadas como suma o resta de dos cambios ($v_1 + v_2 = v_3$) y como problemas de comparación ($e_1 + c = e_2$) (cuadro 6).

Aunque son escasos los problemas utilizados para explicar la resta, hay cierta coherencia con respecto a los problemas de suma que se han utilizado previamente, es decir, que las editoriales utilizan estructuras similares para sumar y restar.

Figura 14 Suma de números reales (Edebé, 3º Secundaria)

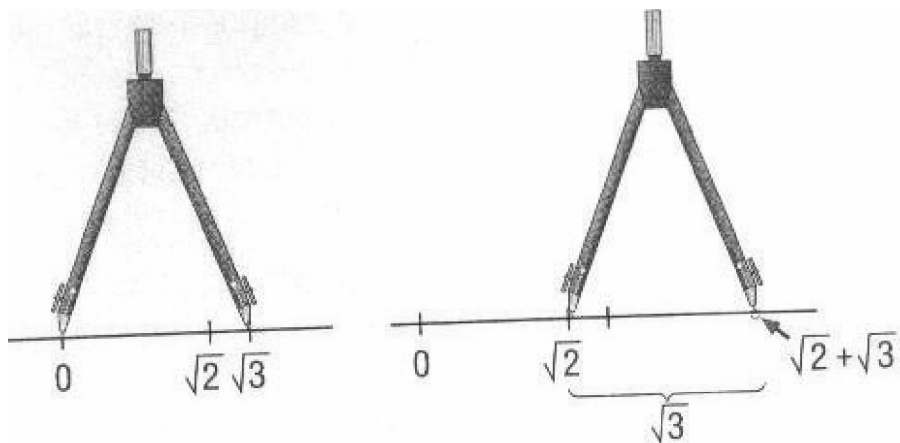
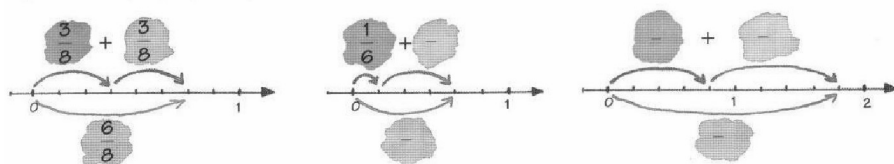


Figura 15 Suma de números racionales (SM, 6º Primaria)

Fíjate en el ejemplo y completa:



En la figura 16, mostramos otro ejemplo de la editorial SM del libro de texto de 6º de Primaria donde aparece una resta de números enteros. La representación es de tipo *puntos-flecha* y está asociada a un contexto, en este caso un problema aditivo con estructura de *cambio*, $e_i + v = e_f$.

Cuadro 6 Tipos de estructuras aditivas (suma y resta) asociadas a las rectas

	Sumas y restas en contextos	Estructuras de las sumas en contextos			
		$e_i + v = e_f$ Cambio	$e_1 + e_2 = e_t$ Combinación	$v_1 + v_2 = v_t$ Dos cambios	$e_1 + c = e_2$ Comparación
Edebé	13 de 28 (46%)	13	0	0	0
Santillana	31 de 92 (34%)	20	11	0	0
SM	16 de 31 (52%)	8	3	4	1

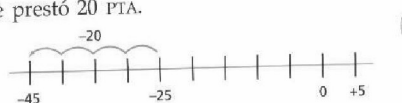
Figura 16 Problema de resta en la recta con enteros (SM, 6º Primaria)

Debía 25 PTA a un amigo. Me prestó otras 20 PTA, que también le debo. ¿En qué situación estoy ahora?

Debía 25 PTA.



Me prestó 20 PTA.



Cada división equivale a 5 PTA.

Ahora debo 45 PTA. Escribo: $-25 - 20 = -45$.

PRODUCTO

Las tres editoriales emplean la recta para trabajar el producto con muy baja frecuencia. Como vemos en el cuadro 7, Edebé sólo la usa para los números naturales, mientras que SM y Santillana la utilizan para los números naturales y los números enteros.

Cuadro 7 Frecuencia del producto en la recta por sistemas numéricos

Producto	Frecuencia	N	Z
Edebé	2 de 196	2	0
Santillana	7 de 268	6	1
SM	6 de 164	5	1

Tipos de representaciones y estructuras de problemas multiplicativos

La única representación que se utiliza en las tres editoriales es la representación de *sumas reiteradas* para el producto, es decir, que no aparece en ningún caso el *producto cartesiano*.

Observando el cuadro 8, vemos cómo la estructura predominante en los problemas asociados a dichas representaciones es la de *razón*, aunque SM también utiliza la de *comparación*. Por su parte, Edebé presenta los productos en la recta sin contextos. En ningún caso se realiza el producto en la recta con racionales y reales.

Cuadro 8 Tipos de estructuras de los productos asociados a contextos


	Productos en contextos	Estructuras del producto en contextos		
		Razón	Comparación	Producto cartesiano
Edebé	0 de 2 (0%)	0	0	0
Santillana	5 de 7 (71%)	5	0	0
SM	2 de 6 (33%)	1	1	0

En la figura 17, se presenta un ejemplo del producto de números naturales con una representación de *sumas reiteradas* asociadas a una estructura de *razón*.

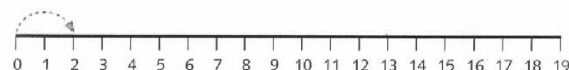
La observación de los libros de texto analizados muestra que el producto y la división se representan con otros gráficos diferentes a la recta que resultan adecuados, aunque ello no debe implicar la exclusión de las representaciones en la recta. Los gráficos que dominan son de tipo discreto, contextualizados en situaciones de la vida diaria e implican la repetición de un conjunto de objetos, un número determinado de veces, para el caso de la multiplicación, y el reparto o agrupación de una cantidad de objetos, para el caso de la división.

Figura17 El producto como *sumas reiteradas* (Santillana, 3º Primaria)

2 Lee detenidamente y completa en tu cuaderno.

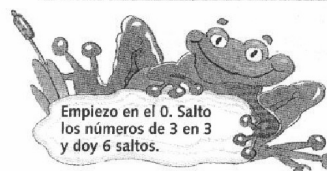


Empiezo en el 0. Salto los números de 2 en 2 y doy 7 saltos.

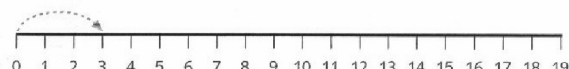


... + ... + ... + ... + ... + ... + ... = ... → ... × ... = ...

El perro pisa en los números: 0, 2, ..., ..., ..., ..., y ...



Empiezo en el 0. Salto los números de 3 en 3 y doy 6 saltos.



... + ... + ... + ... + ... + ... = ... → ... × ... = ...

La rana pisa en los números: 0, ..., ..., ..., ..., y ...

- ¿En qué números pisan el perro y la rana? 0, ... y ...

Cuadro 9 Frecuencia del uso de la recta para *ordenar* por sistemas numéricos

Orden	Frecuencia	N	Q	Z	R
Edebé	23 de 196	6	5	11	1
Santillana	14 de 268	4	1	9	0
SM	2 de 164	0	0	2	0

ORDEN

El cuadro 9 recoge los datos sobre el uso de la recta como apoyo para *ordenar*. No se encuentra continuidad en ninguna de las tres editoriales en este aspecto. Edebé destaca por ordenar en la recta todos los sistemas numéricos, Santillana no ordena números reales y SM sólo ordena en la recta números enteros.

Las tres editoriales coinciden en *ordenar* con rectas horizontales, pues en ningún caso ordenan con la recta vertical.

Destaca el hecho de que la editorial SM sólo ordene números enteros en la recta y no ordene números racionales, pues es la única editorial que ha usado el modelo de la recta para las operaciones con racionales.

En la figura 18 se muestra un ejemplo de ordenar en la recta números enteros de 3º de secundaria obligatoria de la editorial Edebé.

Figura 18 La recta para ordenar (Edebé, 3º Secundaria)

12. Observa la siguiente serie de temperaturas:

$-7\text{ }^{\circ}\text{C}, 0\text{ }^{\circ}\text{C}, 3\text{ }^{\circ}\text{C}, 12\text{ }^{\circ}\text{C}, -5\text{ }^{\circ}\text{C}, 1\text{ }^{\circ}\text{C}$

— ¿Cuál es la más baja? ¿Y la más alta?

Podemos ordenar estas temperaturas de menor a mayor:

$-7\text{ }^{\circ}\text{C} < -5\text{ }^{\circ}\text{C} < 0\text{ }^{\circ}\text{C} < 1\text{ }^{\circ}\text{C} < 3\text{ }^{\circ}\text{C} < 12\text{ }^{\circ}\text{C}$

Si representamos sobre la recta estos números enteros, veremos que cuanto más a la derecha se encuentra el número más grande es (fig. 3).



Los dos números enteros cualesquiera, es **mayor** el que queda representado más a la **derecha** sobre la recta.

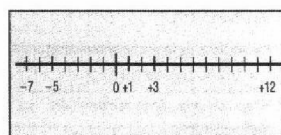


Fig. 3.

b

CONCLUSIONES

Los libros de texto analizados han reflejado los tres usos de la recta indicados por Ernest (1985). La mayoría de las representaciones se producen en el momento de introducir un nuevo sistema numérico (lo que hemos denominado *concepto de número*), y en menor medida se utiliza la recta como modelo para representar las operaciones básicas y el orden de los números.

El estudio realizado permite concluir que el tratamiento que recibe la recta es diferente según cada editorial. Sin embargo, hay entre ellas ciertas semejanzas que invitan a reflexionar sobre la coherencia en el desarrollo de esta representación en los diferentes cursos.

En la introducción del trabajo planteamos dos preguntas que eran objetivo general del trabajo al analizar los libros de texto:

- ¿Hay algo erróneo en los textos que el profesor debería corregir?
- ¿Hay alguna carencia? Si es así, ¿debería tener cuidado el profesor y dar la información suplementaria en el aula?

A lo largo del trabajo hemos identificado carencias en el uso de la recta en los textos. Pensamos que dichas carencias llevan a un tratamiento didáctico erróneo de esta representación, como sintetizamos a continuación.

Hemos encontrado diferencias en la frecuencia con la que se usa la recta según los tipos de números, en especial, en el momento de introducir un nuevo sistema numérico (lo que hemos denominado *concepto de número*). Esto significa que las editoriales no mantienen una coherencia a lo largo de la escolaridad, es decir, un alumno, dependiendo del curso o del autor del libro de texto, tendrá un mayor o menor conocimiento de la recta. En general, hemos observado que las tres editoriales tienen un escaso uso de la recta con los números reales. Quizás se considera que los alumnos en las edades en las que se introducen estos números tienen mayor capacidad de abstracción y no necesitan tantas representaciones de la recta. Sin embargo, la idea de que los números reales completan la recta, o dicho de otro modo, la identificación de la recta con los números reales, es uno de los aspectos básicos del conocimiento numérico que muchos alumnos no llegan a construir (Robinet, 1986), por lo que se hace necesario una mayor presencia de la recta en el momento de introducir los sistemas numéricos.

Los modelos o representaciones que se usen en la educación básica para el aprendizaje numérico deben aspirar a ser válidos para todas las operaciones y

para los diferentes sistemas numéricos. En este sentido, hemos encontrado carencias en las editoriales analizadas. Los alumnos a través de estos libros de texto pueden aprender a representar sumas en la recta, no tanto las restas y las multiplicaciones, y nunca observarán la representación de una división. Esto es claramente confuso desde un punto de vista didáctico, ya que lo que se favorece es la creación de la falsa idea de que la recta es una representación que no es válida para todas las operaciones.

Otro aspecto analizado en este trabajo ha sido las maneras de representar los números y las operaciones: *punto* y *flecha* para el concepto; *puntos-flecha* y *tres flechas* para la suma y resta; *sumas reiteradas* y *producto cartesiano* para la multiplicación y división. El hecho de que la recta se pueda utilizar con estas diferentes representaciones requiere un cuidadoso tratamiento didáctico que los profesores deben conocer y tener en cuenta, aplicando el mismo criterio de coherencia que hemos expuesto anteriormente. Por ejemplo, si se usa la representación de *puntos-flecha* para la suma, esta misma representación debería plantearse para la resta. Por otro lado, utilizar la representación de *puntos-flecha* para la suma y para la resta no es incompatible con usar también la representación de *tres flechas* para estas dos operaciones.

En las rectas utilizadas dominan las horizontales frente a las verticales, y no se tiene en cuenta el poco uso de la recta vertical para iniciar las representaciones con ejes cartesianos en otros temas de los libros, como por ejemplo, en las gráficas estadísticas.

Mayores problemas puede causar el hecho de que los números se representen principalmente con puntos. Las representaciones con flechas no son evidentes para los alumnos (Bruno y Cabrera, 2005). Pensamos que un uso de la recta como modelo para operar requiere que el alumno esté familiarizado con las representaciones de los números con puntos y con flechas. Dificilmente se podrá entender la representación de la suma y de la resta (tanto la de *puntos-flecha* como la de *tres flechas*) si previamente no ha habido un trabajo dedicado a representar números con puntos y flechas indistintamente.

El estudio realizado nos permite concluir que los textos no planifican el tipo de representación que se va a utilizar a lo largo de la escolaridad, y que las representaciones se cambian de un curso a otro, por lo que no hay una perspectiva global del modelo de la recta. El profesor que incluya la recta en el aprendizaje numérico debe ser consciente de esto y ampliar las actividades de los textos.

El estudio *a priori* realizado en los libros de texto puede ayudar a los profesores para que reflexionen sobre el conocimiento que desean que sus alumnos

construyan sobre la recta. Un tratamiento más coherente implica complementar las actividades propuestas en los libros de texto con otras que lleven a entender que la recta sirve para representar todos los sistemas numéricos y que con ella se pueden reflejar las operaciones y el orden. La eficacia de la recta como modelo para las operaciones y el orden depende de la familiaridad que tengan los alumnos con su uso, incluidas en esto sus distintas manifestaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bruno, A. y N. Cabrera (2005), "Estudio de representaciones en la recta de los números negativos con alumnos de Educación Secundaria", *Actas de las XI Jaem*, Canarias, Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias, pp. 565-571.
- Bruno, A. y A. Martínón (1997), "Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 5, núm. 2, pp. 249-258.
- Carr, K. y B. Katterns (1984), "Does the number line help?", *Mathematic in School*, vol. 113, núm. 4, pp. 30-34.
- Ernest, P. (1985), "The number line as a teaching aid", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 16, pp. 411-424.
- Gallardo, A. y M. Romero (1999), "Identification of difficulties in addition and subtraction of integers in the number line", *XXI PME-NA*, vol. 1, Cuernavaca, México, pp. 275-282.
- Janvier, C. (1983), "The understanding of directed numbers", *Proceedings of the VIII PME*, pp. 295-301.
- Pantsidis, C., F. Zoulinaki, P. Spyrou, A. Gagatsis e I. Elia (2004), "Understanding of the ordering of numbers and the use of absolute value on the axis of real numbers and the use of absolute value on the axis of real numbers", en A. Gagatsis et al. (eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education*, vol. 1, Palermo, Cyprus Mathematical Society, pp. 341-353.
- Robinet, J. (1986), "Les réels: quels modèles en ont les élèves?", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 17, pp. 359-386.
- Van Dormolen, J. (1986), "Textual analysis", en B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (eds.), *Perspectives on mathematics education: Papers submitted by members of the BACOMENT group*, Dodrecht, Países Bajos, D. Reidel, pp. 141-171.

LIBROS DE TEXTO

- Almodóvar, J.A., P. García, J. Gil y A. Nortes Checa (1997), *Matemáticas 2º ESO*, Madrid, Santillana.
- Bujanda, M.P., M. Pañellas, A.M. Castellví, A. Roig, S. Rubio y N. Solves (1994), *Matemáticas, 5º primaria*, Madrid, SM.
- (1994), *Matemáticas 6º primaria*, Madrid, SM.
- (2002), *Matemáticas 1º secundaria, números*, Madrid, SM.
- (2002), *Matemáticas 2º secundaria, números*, Madrid, SM.
- Bujanda, M.P. y otros (1993), *Matemáticas 4º Primaria*, Madrid, SM.
- Bujanda, M.P. y otros (1996), *Matemáticas 3º Primaria*, Madrid, SM.
- Doménech, M.A., M. Doménech, M. Jimeno, M.A. Morató, M.M. Suñe, J. Tomás y Equipo Edebé (1995), *Matemáticas 3º ESO*, Barcelona, Edebé.
- García, P., J. Gil, A. Uguina y M. Rodríguez (1997), *Matemáticas 1º Primaria*, Madrid, Santillana.
- (1997), *Matemáticas 2º Primaria*, Madrid, Santillana.
- (1997), *Matemáticas 3º Primaria*, Madrid, Santillana.
- García, P. y M. Rodríguez (1998), *Matemáticas 4º Primaria*, Madrid, Santillana.
- García, P., M. Rodríguez y J. González (1998), *Matemáticas 5º Primaria*, Madrid, Santillana.
- García, P., J. Gil, C. Vázquez y A. Nortes (1996), *Matemáticas 1º ESO*, Madrid, Santillana.
- Gómez, M. (1996), *Matemáticas 1º ciclo de EP (2)*, Barcelona, Edebé.
- (1996), *Matemáticas 1º ciclo de EP (1)*, Barcelona, Edebé.
- (1996), *Matemáticas (B) 4º ESO*, Barcelona, Edebé.
- (1997), *Matemáticas 2º ESO*, Barcelona, Edebé.
- (1996), *Matemáticas 1º ESO*, Barcelona, Edebé.
- Lacueva, J.A. y otros (1995), *Matemáticas 3º ciclo de EP (6)*, Barcelona, Edebé.
- Maideu, J.M. (1993), *Matemáticas 2º ciclo de EP (4)*, Barcelona, Edebé.
- (1993), *Matemáticas 2º ciclo de EP (3)*, Barcelona, Edebé.
- Pedro-Viejo, M.J. y otros (1995), *Matemáticas 2º Primaria*, Madrid, SM.
- (1995), *Matemáticas 1º Primaria*, Madrid, SM.
- Rodríguez, M., I. Siles y J. González (1999), *Matemáticas 6º primaria*, Madrid, Santillana.
- Santos, D., P. García, C. Vázquez, A. Nevot, J. Gil y A. Nortes (1995), *Matemáticas 3º ESO*, Madrid, Santillana.
- (1995), *Matemáticas 4º ESO*, Madrid, Santillana.

Segarra, J., M. Mendiola, I.M. Fernández y Equipo Edebé (1994), *Matemáticas 3^{er} ciclo de EP (5)*, Barcelona, Edebé.

Vizmanos, J.R. y M. Anzola (2002), *Matemáticas 3^o secundaria, algoritmo 2000*, Madrid, SM.

— (2002), *Matemáticas 4^o secundaria, algoritmo 2000*, Madrid, SM.

DATOS DE LAS AUTORAS

Alicia Bruno

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, España
abruno@ull.es

Noemí Cabrera

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, España
noe376@hotmail.com