¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?

Sonia Ursini y María Trigueros

A la memoria de Guillermina Waldegg

Resumen: Algunas investigaciones sugieren que los estudiantes han alcanzado un pensamiento algebraico maduro cuando son capaces de usar la variable de manera flexible, esto es, cuando logran integrar sus diferentes usos y diferenciarlos. Sin embargo, se ha demostrado que el concepto de variable es difícil para los estudiantes de distintas edades, y que en los diferentes niveles educativos, los estudiantes tienen dificultades para comprender los varios usos y aspectos que caracterizan a la variable. Esta investigación se propone analizar si los estudiantes alcanzan esta comprensión conforme progresan en el estudio de las matemáticas universitarias. Para ello, se analiza cuáles aspectos de la variable utilizan estudiantes de diferentes niveles educativos (3º de secundaria, estudiantes de recién ingreso a la universidad, estudiantes de 5º semestre de las carreras de Economía e Ingeniería) al resolver problemas algebraicos. Los resultados muestran que, si bien los estudiantes usan con mayor flexibilidad estos aspectos conforme progresan en los cursos de matemáticas avanzadas, su pensamiento algebraico no se desarrolla como se esperaría.

Palabras clave: variable, pensamiento algebraico, alumnos de secundaria, estudiantes de universidad.

Abstract: A flexible use of variable, where all its facets can be integrated and differentiated as needed, is an important requirement for students to show mature algebraic thinking. However, variable has proven to be a difficult concept for students of different ages. Research results show that students at different school levels have difficulties in understanding the different facets that characterize variables. In order to analyze if students develop this ability while studying advanced mathematical courses, that is if advanced students have a much better understanding of variable, this research focuses on the comparison of students' capabi-

Fecha de recepción: 7 de junio de 2006.

lities to solve algebraic problems, at different school levels (9^{th} secondary level, starting university students, students attending the 5^{th} semester of Economy and Enginery). Results show that even though students progress while they complete advanced mathematics courses, their algebraic thinking does not develop as would be expected.

Keywords: variable, algebraic thinking, secondary students, university students.

INTRODUCCIÓN

Se considera que, para enfrentarse a los cursos de matemáticas avanzadas y resolver los problemas que se proponen en los cursos universitarios relacionados con las matemáticas, es necesario tener una buena comprensión del concepto de variable. Se esperaría que los estudiantes universitarios fueran capaces de interpretar, manipular y simbolizar los diferentes usos de la variable (incógnita, número general incluidos parámetros y variables relacionadas), así como pasar de manera flexible entre ellos en la solución de los problemas algebraicos que enfrentan en distintas situaciones.

Investigaciones anteriores (Ainely *et al.*, 2004; Ursini y Trigueros, 2004; Trigueros y Ursini, 2003; Sokolowsky, 2000; Jacobs, 2002) han estudiado la comprensión del concepto de variable que logran los estudiantes de secundaria, bachillerato e incluso los que inician los cursos universitarios. Algunos de ellos muestran que, por lo general, los estudiantes no alcanzan una comprensión aceptable de este concepto y siguen teniendo serias dificultades al trabajar con sus distintos usos. Sin embargo, esta carencia de conocimientos básicos no se tiene en cuenta en los niveles universitarios cuando se imparten los cursos de matemáticas avanzadas. Estos cursos requieren el uso del pensamiento algebraico y, por lo mismo, una buena comprensión de la variable y de la capacidad de usar de manera flexible sus diferentes facetas.

¿Cómo enfrentan los estudiantes universitarios los requerimientos algebraicos de los cursos de matemáticas avanzadas? ¿Desarrollan la capacidad para usar las variables como herramientas útiles en la solución de problemas que requieren el pensamiento algebraico? ¿Es su comprensión de la variable mejor que la que tienen los estudiantes que terminan la secundaria y de los que inician la universidad? Éstas son algunas preguntas que se intentan responder en este trabajo.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico que se utilizó para desarrollar esta investigación es el *Modelo 3UV* (3 Usos de la Variable) (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini *et al.*, 2005). Este modelo surge al analizar qué es lo que se requiere para poder resolver los ejercicios y problemas típicos que aparecen en los textos escolares de álgebra. Al hacer ese análisis, se pudo comprobar que, en los cursos de álgebra elemental, aparecen esencialmente tres usos de la variable: la incógnita específica, el número general y las variables en relación funcional. Además, asociados a cada uno de estos usos, se han identificado una serie de aspectos a los que un usuario del álgebra se tiene que enfrentar para poder resolver problemas y ejercicios. Estos aspectos, que corresponden a distintos niveles de abstracción, se presentan a continuación de manera sintética. Consideramos que la solución competente de los problemas algebraicos requiere un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan a cada uno de ellos (Ursini *et al.*, 2005).

- Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran *la incógnita* es necesario:
  - *I1* Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
  - *I2* Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
  - *I3* Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
  - *I4* Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.
  - *I5* Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.
- Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran *el número general* es necesario:
  - *G1* Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.
  - *G2* Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.
  - *G3* Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.

G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

- Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran *variables en relación funcional* es necesario:
  F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
  F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
  F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
  F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
  F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
  F6 Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema.

Si bien los aspectos *F2* y *F3* implican el aspecto *I4* (determinación del valor de la incógnita), no son equivalentes, ya que, para determinar los valores de una variable en función de los valores de la otra, es necesario primero sustituir un valor en una de las variables y convertir de este modo una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación.

El Modelo 3UV ha probado ser un instrumento de gran utilidad en el diseño de actividades para los alumnos y para planear y estructurar estrategias de enseñanza (Montes, 2003); diseñar instrumentos de diagnóstico (Ursini y Trigueros, 1997); analizar el uso de las variables en los libros de texto (Benítez, 2004); y diagnosticar las concepciones de los estudiantes (Ursini y Trigueros, 1997) y de los profesores (Juárez, 2001).

METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló con un total de 40 estudiantes mexicanos, de los cuales 13 estaban por terminar el 3er. año de secundaria en una escuela privada (entre 14 y 15 años de edad) de la ciudad de San Luis Potosí; 27 estaban realizando sus estudios en una universidad privada en la ciudad de México en la que el nivel de exigencia de los cursos de matemáticas es alto. De éstos, 17 acababan de ingresar a la universidad; y 10 estaban cursando el 5º semestre de las carreras de Economía e Ingeniería. La selección de los estudiantes se basó en los criterios siguientes: en el caso de los alumnos de secundaria se eligió a todos los integrantes de un grupo de 3er año de una escuela privada en la que se dieron las facilidades para llevar a cabo el estudio; en el caso de los estudiantes que inician la universidad, el criterio de selección se basó en las calificaciones obtenidas en el curso de precálculo, se seleccionaron al azar 6 estudiantes con promedio alto, 6 con promedio en la media y 6 con promedio por debajo de la media. Uno de los estudiantes con promedio por debajo de la media fue eliminado porque no se presentó en el momento de responder el cuestionario que se les iba a aplicar. En el caso de los estudiantes de 5º semestre, se eligió a los que cursaban la última materia de matemáticas en la licenciatura, considerando las calificaciones que habían obtenido en dicho curso: 4 por arriba de la media, 4 por debajo de la media y 6 en la media.

Esta selección nos permitiría analizar la manera en la que los estudiantes manejan el álgebra en distintas etapas de su vida escolar, cuando asisten a escuelas donde las condiciones de estudio son consideradas de buen nivel. Hay que señalar que todos los estudiantes seleccionados eran de clase media acomodada.

Para obtener información acerca de la posibilidad de estos estudiantes de trabajar flexiblemente con los distintos usos de la variable, se diseñaron dos cuestionarios: uno, de seis preguntas, para los estudiantes de secundaria y otro, de diez preguntas, para ser contestado por los dos grupos de estudiantes universitarios. Ambos cuestionarios se diseñaron basados en el *Modelo 3UV*, de manera que todas las preguntas requieren, para su solución, un uso integrado de distintos usos de la variable y sus aspectos. El cuestionario dirigido a los estudiantes de secundaria incluyó problemas que si bien requerían el paso entre los distintos usos y aspectos de la variable, éstos eran fácilmente identificables y aparecían en contextos sencillos; el cuestionario dirigido a los estudiantes universitarios (principiantes y avanzados) incluía problemas similares en cuanto a los usos y aspectos de la variable por utilizar, pero cuyo planteamiento era un poco más complejo.

Las respuestas que dieron los estudiantes a las preguntas de los cuestionarios se analizaron en varias etapas. Ante todo, de cada estudiante se analizó su capacidad para trabajar con cada uno de los aspectos de las variables implicados en cada pregunta. En ningún momento se pidió a los estudiantes que siguieran un método predeterminado ni tampoco que utilizaran un lenguaje específico. Se permitió que los estudiantes avanzados utilizaran sus conocimientos de otras áreas de las matemáticas, pero no se los forzó a hacerlo. En consecuencia se determinó, para cada uno de ellos, cuántos estudiantes los manejaban adecuadamente. Estos resultados se expresaron en porcentajes. Esta manera de proceder nos permitió comparar entre sí los resultados obtenidos por los alumnos de los tres grupos estudiados y emitir un juicio acerca del posible desarrollo de la capacidad de los estudiantes de integrar y diferenciar los distintos usos y aspectos de la variable. Posteriormente se hizo un análisis cualitativo de la manera en la que cada estudiante respondió al cuestionario completo, a fin de seleccionar alumnos que mostraban distintos patrones de respuesta para ser entrevistados. Las entrevistas se basaron en las preguntas de los cuestionarios, se transcribieron y se analizaron para complementar y validar el análisis anterior.

RESULTADOS

Con el propósito de identificar los aspectos de las variables involucrados, se analizaron todas las preguntas de cada cuestionario. A continuación se muestra dicho análisis para cada una de ellas. Se presenta, en primer término, la pregunta que se elaboró para ser contestada por los estudiantes de secundaria y ésta es seguida por la pregunta equivalente, es decir, que contiene esencialmente los mismos aspectos de la variable pero en un nivel mayor de complejidad, elaborada para ser respondida por los estudiantes universitarios. Se presentan y analizan después los porcentajes de aciertos obtenidos por los estudiantes de los tres grupos estudiados (alumnos de secundaria, estudiantes universitarios principiantes y avanzados) en relación con cada aspecto de la variable involucrado en la pregunta en cuestión.

Pregunta 1 para universitarios – Pregunta 1 para secundaria

Pregunta 1 para secundaria

¿Para cuáles valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288? Si el valor de x aumenta o decrece, ¿qué pasa con el área?

Análisis

La respuesta a este problema requiere la identificación de dos intervalos no contiguos. Para ello, la variable x debe ser reconocida en primer lugar como un número general (G2), que debe ser manipulado y utilizado para obtener una expresión (G4). Posteriormente, es necesario reconocer a x como una cantidad desconocida cuyo valor puede determinarse (I1, I4). Se requiere, además, reconocer la correspondencia (F1) entre los valores de x y del área, y la variación conjunta de esas dos variables (F4) para determinar los intervalos (F5) en los que la variable toma los valores deseados. Es posible utilizar otras estrategias de solución para este problema.

Pregunta 1 para universitarios

¿Para cuáles valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288? Si el valor de x aumenta o decrece, ¿qué pasa con el área?

Análisis

La respuesta a este problema requiere la identificación de dos intervalos no contiguos. Para ello, la expresión $(x + 3)^2$ debe ser reconocida como un número general (G2), que debe ser manipulado y utilizado para obtener otra expresión (G4). Posteriormente, es necesario reconocer a x como una cantidad desconocida cuyo valor puede determinarse (I1, I4). Se requiere, además, reconocer la correspondencia (F1) entre los valores de x y del área, y la variación conjunta de esas dos variables (F4) para determinar los intervalos (F5) en los que la variable toma los valores deseados. Es posible utilizar otras estrategias de solución para este problema.

Porcentajes de aciertos Pregunta 1

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
77%	71%	70%	G2
77%	71%	50%	G4
46%	76%	50%	I1
46%	65%	40%	I4
38%	29%	50%	F1
38%	29%	30%	F5
38%	18%	30%	F4

Los datos del cuadro muestran que la mayoría de los estudiantes de los tres niveles escolares fueron capaces de interpretar correctamente la existencia de un número general y manipularlo (G2, G4). La mayoría de los estudiantes universitarios pudieron identificar la incógnita (I1) pero no todos pudieron determinar su valor (I4). Los estudiantes que iniciaban la universidad alcanzaron para estos aspectos porcentajes más altos de aciertos. Esto puede deberse a que estaban en un curso propedéutico de matemáticas, en el que se trata de reforzar sus conocimientos de álgebra. En cuanto a los alumnos de secundaria, menos de la mitad pudo identificar la incógnita (I1), pero los que pudieron hacerlo fueron capaces de determinar su valor (I4). La gran mayoría de los alumnos en los tres grupos tuvo serias dificultades para reconocer la correspondencia (F1), la variación conjunta (F4) y para determinar intervalos (F5). Observamos, en particular, que con respecto a su capacidad para trabajar con estos aspectos, los estudiantes que iniciaban la universidad alcanzaron porcentajes de aciertos menores que los alumnos de secundaria. Sorprende, además, que los alumnos que estaban en el 5º semestre y que habían cursado Cálculo durante tres semestres y un curso de Álgebra Lineal tuvieran tantas dificultades con estos aspectos de la variable.

Estos resultados muestran que la mayoría de los estudiantes no dominan los tres usos de la variable y, en consecuencia, sólo una minoría es capaz de pasar flexiblemente entre los aspectos que los caracterizan. Se observa que, aun cuando el problema planteado es simple, la mayoría muestra dificultades sobre todo con la relación funcional. Los datos del cuadro ponen en evidencia que no hay mucho cambio en la manera en la que los estudiantes de los distintos grados escolares usan la variable en este problema.

Pregunta 2 para universitarios – Pregunta 2 para secundaria

Pregunta 2 para secundaria	Análisis
Dada la ecuación de la recta $y = 2x + 1$. ¿Están los puntos (3,7) y (2,8) en la recta? El valor de y de un punto de esta recta es 4/3. ¿Cuál es el valor correspondiente de x?	En esta pregunta es necesario considerar, en primer término, que las variables x e y están en correspondencia (F1). Para encontrar si los puntos dados pertenecen a la recta, el alumno requiere sustituir los valores en la relación funcional (F2, F3) para determinar si se satisface la igualdad en la ecuación resultante. La segunda parte de la pregunta requiere reconsiderar la ecuación original y sustituir el valor dado para y (F3), reconocer la incógnita en la ecuación resultante (I1), y manipular la expresión para determinar el valor correspondiente de x (I4).
Pregunta 2 para universitarios	**Análisis**
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (0, –1) y que es perpendicular a $x - 2y + 10 = 0$. Encuentra además el valor de y para el punto de la recta para el cual $x = -4$.	En esta pregunta es necesario considerar, en primer término, que las variables x e y están en correspondencia (F1). Hay que interpretar las variables como números generales (G2) y manipularlos (G4), a fin de establecer la ecuación de la recta (G5, I5). Es necesario reconocer las incógnitas del problema (I1), determinar su valor (I4) y sustituir valores dados (F2).

Porcentajes de aciertos Pregunta 2

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
85%	65%	90%	F1
No aplica	82%	80%	G4, G2
27%	41%	50%	I1, I4
85%	35%	50%	F2
85%	No aplica	No aplica	F3
No aplica	41%	80%	G5

En este cuadro se observa que, cuando se proporciona a los alumnos la ecuación que describe una relación funcional y dicha ecuación es simple, los alumnos reconocen la correspondencia entre las variables (F1). Tienen, sin embargo, mayor dificultad para identificar y manipular la incógnita del problema (I1, I4). Es asombroso que los alumnos universitarios tengan tantas dificultades para encontrar el valor de la variable dependiente dado el de la independiente (F2), mientras que esto no representa mayores dificultades para los alumnos de secundaria, incluso cuando hay que determinar el valor de la variable independiente dado el de la dependiente (F3). Se observa que los alumnos universitarios son capaces de interpretar las variables de la expresión dada como números generales (G2) y de manipularlos (G4). Sin embargo, aun la simbolización de relaciones funcionales simples resulta problemática para los alumnos que inician la universidad (G5), mientras que los avanzados ya parecen haber superado el problema.

Nuevamente se observa que la mayoría de los alumnos tienen dificultades para identificar la incógnita del problema y determinar su valor. También se observa que, si bien no presentan dificultad en reconocer la correspondencia entre variables en relaciones funcionales simples, la mayoría de los estudiantes universitarios, a diferencia de los de secundaria, tienen problemas para determinar el valor de una variable en función de la otra. Por otro lado, destaca un cambio notable en la capacidad de simbolizar una relación funcional utilizando números generales.

Pregunta 3 para universitarios – Pregunta 3 para secundaria

Pregunta 3 para secundaria	Análisis
Sabemos que $x + y = 10$ y además que $xy = 7$. Halla los valores de x y de y.	Esta pregunta puede resolverse siguiendo distintas estrategias. La más sencilla requiere identificar las dos expresiones dadas como ecuaciones, y las dos variables x e y como incógnitas (I1, I2). Para manipular estas expresiones es necesario interpretar las variables x e y como números generales (G2) y manipular una de las ecuaciones para obtener una expresión equivalente en términos de una sola variable (G4). Posteriormente, se ha de interpretar esta expresión como una ecuación en la que hay una incógnita (I1), encontrar su valor (I4) y sustituirlo en la otra expresión (I2, G3, G4). Otra estrategia consiste en identificar las expresiones como relaciones funcionales, graficarlas y, a partir de la gráfica, encontrar los valores correspondientes.
Pregunta 3 para universitarios	**Análisis**
Dada la ecuación $3x^2 + px + 7 = 0$ ¿Para cuáles valores de p la ecuación tiene sólo una solución para x? Explica qué papel desempeña p y qué papel desempeña x en esta ecuación.	Esta pregunta requiere interpretar, en primer término, el parámetro como número general (G2) y la x como incógnita (I2) y resolver para la incógnita manipulando la ecuación (G4). Dada la dependencia de la solución del parámetro, es necesario reconocer que, para responder la pregunta planteada, el parámetro debe interpretarse como incógnita (I2), plantear la ecuación correspondiente y manipularla para obtener su valor (G4, I4).

Porcentajes de aciertos Pregunta 3

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
23%	53%	60%	G2
8%	53%	60%	I2
8%	53%	60%	G4
0%	53%	60%	I1, I2
8%	47%	50%	I4

En esta pregunta el énfasis está en la interpretación y determinación del valor de un parámetro, para los estudiantes universitarios, y en la interpretación de la variable como número general y como incógnita para los estudiantes de secundaria. Como se observa en los datos, en general, muchos de los alumnos tienen dificultades para interpretar el número general o el parámetro en una expresión (G2). Un porcentaje muy bajo de los estudiantes de secundaria logró resolver este problema y trabajar con los aspectos de las variables involucradas. Entre los universitarios se observa que los que lograron interpretar el parámetro como número general (G2), pudieron manipular la expresión (G4) y fueron capaces de reconocer el parámetro como incógnita (I1, I2), pero no todos pudieron determinar su valor (I4), ya que no consideraron el doble signo de la raíz cuadrada. La tendencia más generalizada que se observó entre los estudiantes universitarios que no pudieron resolver este problema consistió en que asignaban un valor específico al parámetro o lo ignoraban.

Los resultados obtenidos en esta pregunta muestran claramente las dificultades de los alumnos para integrar la incógnita con el número general y en particular la debilidad de los alumnos universitarios para integrar los parámetros con los diferentes usos de la variable. Aquellos estudiantes que han superado el problema de interpretación no tienen dificultades para integrar los usos de la variable y pasar flexiblemente de uno a otro. También queda claro a partir de los datos que hay un cambio en la interpretación del número general y de los parámetros con el nivel de escolaridad, aunque no es suficiente para tener éxito en los cursos universitarios.

Pregunta 4 para universitarios – no hubo pregunta equivalente para secundaria

Pregunta 4 para universitarios	Análisis
¿Cuál es el significado de las literales en la expresión $\lim_{x \to a} (3x - b)$? Calcula el valor del límite y explica tu *procedimiento* lo más claramente posible.	El cálculo del límite que se presenta requiere, en primer lugar, la interpretación de las variables x como número general (G2), a como parámetro (G2) e interpretar la expresión $3x-b$ como una correspondencia entre variables (F1). Para encontrar el valor del límite es necesario calcular el valor de la variable dependiente dado el de la independiente (F2) y reconocer el resultado como una relación funcional en la que el valor del límite depende del valor del parámetro (F4).

Porcentajes de aciertos Pregunta 4
(no se preguntó en secundaria)

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
	41%	100%	G2
	41%	100%	G2
	41%	100%	F1
	41%	100%	F2
	18%	60%	F4

En los resultados obtenidos para esta pregunta se observa que los estudiantes que inician la universidad tienen mucho más problemas que los estudiantes más avanzados con la interpretación de las variables en relación funcional y con los parámetros. Menos de la mitad de los estudiantes principiantes pudieron interpretar la variable y los parámetros como números generales, reconocer la relación funcional entre la variable x y uno de los parámetros y encontrar el valor de la variable dependiente dado el valor de la independiente (G2, F1, F2). La gran mayoría de los estudiantes principiantes y un número considerable de estudiantes avanzados mostraron dificultades para reconocer la variación conjunta de las variables en relación funcional (F4).

Estos resultados muestran claramente las dificultades de los estudiantes que inician la universidad con la interpretación de los parámetros, pero se observa una clara diferencia entre ellos y los de nivel avanzado. También se aprecia un cambio en la capacidad de reconocer la variación conjunta de dos variables, si bien no la deseada para este nivel educativo.

Pregunta 5 para universitarios - Pregunta 4 para secundaria

Pregunta 4 para secundaria	Análisis
Un hortelano vende el kilogramo de tomate a \$12.00 y le cuesta \$240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar \$4 500.00?	En este problema se requiere identificar la relación funcional entre el número de kilogramos de tomate que se venden y la ganancia obtenida, tomando en consideración el costo de la cosecha (F1). Simbolizar la relación funcional (F6). Sustituir el dato proporcionado (F2) para obtener una ecuación en la que es necesario interpretar una de las variables como incógnita (I1), manipularla (G2, G4) y encontrar su valor (I4). Este problema también puede resolverse utilizando una estrategia de graficación de funciones.
Pregunta 5 para universitarios	**Análisis**
Un hortelano calcula que, si siembra 60 árboles en su huerta, obtendrá 35 kg por árbol de cosecha de manzanas, y los expertos le dicen que por cada árbol adicional que siembre por encima de 60, debido a la sombra que los árboles hacen unos sobre otros, obtendrá 1/2 kg menos de rendimiento por árbol. A él le interesa obtener una cosecha de 2 112 kg, pues es lo que se ha comprometido a vender en el mercado de la ciudad cuando tenga la cosecha. ¿Cuántos árboles le conviene sembrar?	Resolver este problema implica reconocer la correspondencia (F1) entre el número de árboles y los kilogramos de manzanas y establecer la relación funcional (F6). Reconocer la incógnita del problema (I1) y establecer la ecuación (I5) sustituyendo el dato proporcionado (F2). Llevar a cabo las manipulaciones (G2, G4) necesarias para resolver la ecuación (I4).

Porcentajes de aciertos Pregunta 5

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
77%	6%	20%	F1
38%	6%	20%	F6, F2, I5
15%	6%	20%	G2, G4
23%	0%	30%	I1
15%	0%	30%	I4

Los resultados de esta pregunta muestran que los alumnos de secundaria tienen mucho más desarrollada la idea de correspondencia (F1) que los alumnos más avanzados. Sin duda se trata de una idea intuitiva que les permite abordar problemas simples, mientras que parece ser que los estudiantes que inician la universidad no son capaces de recurrir a la intuición ante una situación ligeramente más compleja. La simbolización de la relación funcional (F6), aun en las situaciones en las que los estudiantes la plantean en términos de una ecuación (I5) resulta muy difícil para los estudiantes de los tres niveles estudiados. Sin embargo, encontramos que los estudiantes universitarios que son capaces de simbolizar la expresión que representa la situación del problema son capaces también de ver la variable como número general y manipularla (G2, G4). No sucede lo mismo con los estudiantes de secundaria, ya que menos de la mitad de los que pudieron simbolizar la expresión pudieron ver la variable como número general y manipularla. Hubo estudiantes de secundaria y universitarios avanzados que pudieron identificar la incógnita del problema (I1) y determinar su valor (I4), aunque muchos lo hacen por métodos aritméticos y no algebraicos. Sin embargo, ninguno de los estudiantes que iniciaban la universidad pudo identificar la incógnita y, en consecuencia, determinar su valor. El desarrollo de la capacidad de integrar los usos de la variable en esta pregunta es muy poco, lo que lleva a que únicamente un porcentaje muy pequeño de los estudiantes avanzados pueden responder satisfactoriamente a la pregunta.

Pregunta 6 para universitarios – no hubo pregunta equivalente para secundaria

Pregunta 6 para universitarios	Análisis
Escribe utilizando símbolos: los números reales que después de multiplicarlos por una constante se suman a 4 para obtener un múltiplo de 5. Explica el significado de cada uno de los símbolos que hayas introducido.	Simbolizar un enunciado general usando números generales (G5). Interpretar las variables como números generales (G2).

Porcentajes de aciertos Pregunta 6
(no se preguntó en secundaria)

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
	6%	50%	G5
	12%	60%	G2

El objetivo de esta pregunta se centró en la posibilidad de los estudiantes universitarios de simbolizar un enunciado general (G5) sin tener que relacionarlo con una situación específica. Se observa que los estudiantes que inician la universidad muestran grandes dificultades para interpretar el número general (G2) y más aún para simbolizar este tipo de enunciados (G5). En comparación, se observa que alrededor de la mitad de los alumnos más avanzados ya logran hacerlo.

Estos resultados, junto con los de la pregunta 5, sugieren que, gracias a los cursos que los estudiantes reciben en la universidad, logran mejorar su capacidad de interpretar la variable en cualquiera de sus usos. También mejora su capacidad de simbolización, sobre todo cuando se enfrentan a enunciados específicos como el de la pregunta 6.

Pregunta 7 para universitarios - Pregunta 4 para secundaria

Pregunta 4 para secundaria	Análisis
Un hortelano vende el kilogramo de tomate a \$12.00 y le cuesta \$240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar \$4 500.00?	En este problema se requiere identificar la relación funcional entre el número de kilogramos de tomate que se venden y la ganancia obtenida, tomando en consideración el costo de la cosecha (F1). Simbolizar la relación funcional (F6). Sustituir el dato proporcionado (F2) para obtener una ecuación en la que es necesario interpretar una de las variables como incógnita (I1), manipularla (G2, G4) y encontrar su valor (I4). Este problema también puede resolverse utilizando una estrategia de graficación de funciones.
Pregunta 7 para universitarios	**Análisis**
Lorenza entrenó para una carrera de bicis subiendo y bajando por una colina cercana a su casa, viajando a 8 km/h al subir la montaña y a 17 km/h al bajar. El entrenamiento duró 2 horas y media empezando y terminando en el mismo lugar. ¿Cuánto tiempo tardó Lorenza en subir la colina y cuántos kilómetros recorrió en total? Recuerda que la relación entre la velocidad, la distancia y el tiempo está dada por $d = vt$.	En este problema se requiere reconocer la incógnita del problema (I1), simbolizarla (I5) y establecer las ecuaciones (I5). Llevar a cabo las manipulaciones (G4) necesarias para resolver las ecuaciones (I4). Reconocer la correspondencia (F1) y la variación conjunta (F4).

Porcentajes de aciertos Pregunta 7

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
23%	0%	40%	I1
77%	0%	40%	F1, F4
38%	0%	40%	F6
38%	0%	40%	I5
15%	0%	40%	G4
15%	0%	40%	I4

Los datos del cuadro muestran que los estudiantes que inician la universidad tienen serias dificultades para reconocer (I1) y simbolizar la incógnita (I5); para manipular la expresión algebraica (G4) y determinar el valor de la incógnita (I4); para reconocer la correspondencia (F1) y la variación conjunta en una relación funcional (F4) y simbolizarla (F6); cuando la situación que se les presenta es ligeramente más compleja que aquella que son capaces de resolver los estudiantes de secundaria. Los alumnos más avanzados, en cambio, muestran menos dificultades con estos aspectos en estas situaciones, si bien sólo 40% resuelve este problema, mientras que el restante 60% deja la pregunta sin contestar.

Los alumnos avanzados muestran una mejoría en la capacidad para integrar los distintos usos de la variable, cuando los comparamos con sus colegas que inician la universidad, ante un problema que no tiene una solución directa. El trabajo de manipulación e interpretación requerido en los cursos avanzados de matemáticas parece fortalecer un poco esta capacidad de integración. Sin embargo, llama la atención que los adolescentes de 3º de secundaria ya muestran esta capacidad en porcentajes muy próximos a los universitarios avanzados cuando se enfrentan, claro está, a problemas menos complejos, pero que involucran los mismos aspectos de la variable.

Pregunta 8 para universitarios – no hubo pregunta equivalente para secundaria

Pregunta 8 para universitarios	Análisis
Escribe utilizando símbolos: las rectas que tienen pendiente constante –2. Explica el significado de cada uno de los símbolos que hayas introducido.	La intención de esta pregunta es profundizar en la idea que tienen los estudiantes de los parámetros y su posibilidad de distinguirlos de las otras variables que aparecen en los problemas matemáticos. Para resolverlo, es necesario simbolizar un enunciado (G5), interpretar los símbolos *x* e *y* como números generales (G2) y el parámetro como otro número general que desempeña un papel diferente al de las otras variables en el problema (G2).

Porcentajes de aciertos Pregunta 8 (no se preguntó en secundaria)

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
	24%	50%	G5, G2
	12%	50%	G2
	12%	50%	G2

La capacidad de integración de los aspectos relacionados con el número general es importante para la solución de múltiples problemas algebraicos. Los datos relativos a esta pregunta muestran que los estudiantes universitarios tienen dificultades con esta integración (G2, G5). Nuevamente, la aparición de parámetros en las expresiones algebraicas es fuente de dificultades que los estudiantes no son capaces de superar. Los estudiantes avanzados muestran mayor capacidad de integración de estos aspectos del número general, aunque mucho menos de lo que se esperaría en este nivel de estudios.

Aun cuando se observa en los datos que hay un desarrollo de la posibilidad de los estudiantes para integrar algunos aspectos relacionados con el número general en un problema que suele ser típico en varios de los cursos universitarios, se puede concluir que el avance logrado está aún lejos del requerido.

Pregunta 9 para universitarios - Pregunta 3 para secundaria

Pregunta 3 para secundaria	Análisis
Sabemos que $x + y = 10$ y además que $xy = 7$. Halla los valores de x y de y.	Esta pregunta puede resolverse siguiendo distintas estrategias. La más sencilla requiere identificar las dos expresiones dadas como ecuaciones, y las dos variable x e y como incógnitas (I1, I2). Para manipular estas expresiones, es necesario interpretar las variables x e y como números generales (G2) y manipular una de las ecuaciones para obtener una expresión equivalente en términos de una sola variable (G4). Posteriormente, se ha de interpretar esta expresión como una ecuación en la que hay una incógnita (I1), encontrar su valor (I4) y sustituirlo en la otra expresión (I2, G3, G4). Otra estrategia consiste en identificar las expresiones como relaciones funcionales, graficarlas y, a partir de la gráfica, encontrar los valores correspondientes.
Pregunta 9 para universitarios	**Análisis**
Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparecen la función $y(t)$ y su derivada $y'(t)$. Se dice que una ecuación diferencial tiene una solución de equilibrio si $y'(0) = 0$ para toda t. Si tienes la siguiente ecuación diferencial, $y'(t) = 2y(t)^2 + ay(t) + 10$. ¿Para cuáles valores de a no tiene solución de equilibrio la ecuación diferencial?, ¿para cuáles tiene sólo una solución de equilibrio y para cuáles tiene más de una solución de equilibrio? Justifica tu respuesta.	La solución de esta pregunta requiere la identificación de la función $y(t)$ como la incógnita de la ecuación (I2) y la interpretación de la variable a como parámetro (G2). Posteriormente, manipular la expresión para encontrar la solución $y(t)$ (G4). Enseguida, es necesario interpretar al parámetro a como una incógnita (I2), manipular y encontrar su valor (I4).

Porcentajes de aciertos Pregunta 9

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
0%	0%	30%	I1, I2
23%	0%	30%	G2
8%	0%	30%	G4
8%	0%	30%	I2
8%	0%	30%	I4

Una vez más se observa que los alumnos que inician la universidad tienen serias dificultades con la interpretación de los parámetros y también con la interpretación de una función o de un parámetro como incógnita y con su manipulación (I1, I2, G2, G4). Los alumnos más avanzados muestran las mismas dificultades, si bien con un nivel de generalidad menor. Llama la atención que los alumnos de secundaria obtengan mejores resultados en un problema equiparable que los que inician la universidad. Si bien el nivel de complejidad de la pregunta 3 del cuestionario para secundaria era mucho menor, implicaba, sin embargo, los mismos aspectos de la variable. Una posible explicación al fracaso de los estudiantes que inician la universidad puede ser que, en los cursos que los alumnos reciben en el bachillerato, no hay una labor adecuada para que les sea posible enfrentar con éxito situaciones un poco más complicadas, aun cuando las matemáticas que se enseñan sean más complejas. Otra posible explicación es el desconcierto que puede causar el hecho de que la pregunta esté planteada en el contexto de las ecuaciones diferenciales, desconocidas para los alumnos de nivel inicial, pero no para los avanzados; aunque en realidad el conocimiento de esta materia no es necesario para la solución del problema, dicho desconcierto pudo haberles impedido enfocar el problema en términos de variable.

La información que proporciona esta pregunta confirma lo que se ha mencionado anteriormente. Cuando en las expresiones algebraicas aparecen parámetros, los estudiantes tienen muchas dificultades para integrar los distintos usos de la variable y también los aspectos relacionados con cada uno de sus distintos usos. Si bien se observa un ligero cambio entre quienes inician la universidad y los estudiantes más avanzados, la capacidad para integrar los diferentes usos de la variable puede considerarse como incipiente.

Pregunta 10 para universitarios - Pregunta 6 para secundaria

Pregunta 6 para secundaria	Análisis
Los datos de la tabla representan el precio al que se venden los jugos en el puesto del mercado. Encuentra la gráfica que describe la relación entre la cantidad de jugo que compras y el precio. Describe con tus propias palabras qué pasa con el precio cuando compras más jugo. ¿Cuánto costaría comprar 2 $^1/_4$ vasos de jugo? Escribe una ecuación que represente cuánto tienes que pagar dependiendo del número de vasos de jugo que compres. ¿Cuánto tendrías que pagar por 9 vasos de jugo?	Para resolver este problema, es necesario interpretar las variables que representan los datos de la tabla como variables en correspondencia (F1). A partir de ellos, es necesario graficar la función (F6) e interpretar la información contenida en ella en términos de la variación entre las variables (F4). En seguida hay que interpretar la relación funcional (F1) y simbolizarla (F6). Una vez que se cuenta con esta relación, es necesario sustituir los datos proporcionados en la relación funcional (F2) para obtener una ecuación en la que se debe reconocer la incógnita (I1, I2) y manipularla (G4) para encontrar su valor (I4).

Cantidad de vasos (*x*)	Precio en pesos (*y*)
1	2
1.5	3
2	4
2.5	5
3	6
3.5	7
4	8
4.5	9

Pregunta 10 para universitarios - Pregunta 6 para secundaria (continuación)

Pregunta 10 para universitarios	Análisis
A partir de los datos que se presentan en la tabla y que representan la ganancia que obtiene un fabricante de sillones, encuentra la gráfica que describe la relación entre las variables. Encuentra los valores para los que la ganancia crece cuando la cantidad vendida aumenta. Encuentra la relación entre la cantidad vendida y el precio, suponiendo que la ganancia tiene la forma $G = ax^2 + bx + c$ y verifica que cuando $x = 17$ la ganancia que obtiene el fabricante es la ganancia máxima que puede obtener. ¿Contradice este resultado al encontrado anteriormente?	Para resolver este problema, es necesario interpretar las variables que representan los datos de la tabla como variables en correspondencia (F1). A partir de ellos, es necesario reconocer la variación conjunta (F4) y graficar la función (F6), determinar los intervalos de variación (F5) y sustituir valores dados (I3). También requiere interpretar *a, b* y *c* como parámetros (G2) y después como incógnitas (I1,I2), resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene para determinar los valores de los parámetros (I4, G4) para, por último, encontrar el valor de la variable dependiente dado el de la independiente (F2).

Cantidad x	Ganancia G
2	0
5	162
10	352
15	442
20	432
25	322
30	112
32	0

Porcentajes de aciertos Pregunta 10

Secundaria	Principiantes	Avanzados	Aspectos involucrados
69%	47%	80%	F1
31%	47%	80%	F6
69%	12%	50%	F4
No aplica	6%	20%	F5
No aplica	6%	40%	G2
69%	6%	20%	I1, I2
No aplica	6%	20%	I3
69%	6%	20%	I4
69%	6%	20%	G4
69%	6%	40%	F2

En estos datos se observa que los estudiantes universitarios avanzados, así como un buen porcentaje de estudiantes de secundaria, son capaces de reconocer la correspondencia (F1). Pero, más de la mitad de los estudiantes que empiezan la universidad tienen dificultad para ello, cuando el problema al que se enfrentan es más complejo que el que se presenta a los estudiantes de secundaria. Al no reconocer la correspondencia, tampoco pueden graficar la función, mientras que éste no es el caso para los más avanzados (F6). Los estudiantes que inician la universidad también tienen dificultades para reconocer la variación conjunta (F4) y determinar intervalos de variación (F5). La posibilidad de interpretar variables en cualquiera de sus usos cuando se presentan parámetros en el problema, de manipular (G2, G4) y encontrar los valores de las incógnitas resulta difícil para todos los estudiantes universitarios (I1, I2, I3, I4). Por otro lado, un porcentaje interesante de alumnos de secundaria puede graficar la función, aunque pocos pueden simbolizar la relación funcional (F6). Un buen porcentaje de ellos puede reconocer la variación conjunta (F4), sustituir los datos para obtener una ecuación (F2), reconocer la incógnita (I1, I2) y proceder a determinar su valor (G4, I4).

Resultados relativos a los diferentes usos de la variable

Resultados relacionados con incógnita

El análisis de las respuestas dadas a los cuestionarios y en las entrevistas muestra que un poco más de 50% de los estudiantes de cada uno de los tres grupos de la muestra pudieron reconocer una incógnita cuando aparecía en una ecuación simple, por ejemplo la de la pregunta 2 o en problemas muy sencillos, como al que se llega en la pregunta 1. Sin embargo, sólo un pequeño porcentaje de los alumnos más avanzados fue capaz de identificar la incógnita en problemas más complejos como el de la pregunta 7 o cuando no se indicaba de manera explícita cuál era la incógnita de la ecuación como, por ejemplo, en la pregunta 9 en la que la incógnita es una función, o en la pregunta 10 en la que la incógnita es primero un parámetro y posteriormente la variable x de la ecuación. Si bien hay un ligero avance en la interpretación del símbolo, cuando la incógnita está asociada a un parámetro o a una función, los estudiantes tienen mayores dificultades para reconocerla. Se encontró además que, a pesar de que los estudiantes eran capaces de identificar la incógnita, no siempre lograban determinar su valor.

En un porcentaje alto de estudiantes, se nota, además, persistencia en el uso de acercamientos aritméticos para resolver los problemas.

De estos datos puede concluirse que, si bien los estudiantes universitarios manejan mejor que los alumnos de secundaria las situaciones en las que aparece la incógnita, el avance no es significativo.

Resultados relacionados con el número general

Casi todos los alumnos que respondieron el cuestionario pudieron interpretar y manipular números generales cuando se presentaban en problemas simples. En problemas más complejos, sólo un poco más de la mitad de los estudiantes universitarios avanzados fueron capaces de hacerlo. Si bien hay muestras de algún progreso en la capacidad de interpretar los parámetros y en la capacidad de simbolizar expresiones generales entre los estudiantes universitarios avanzados, sólo alrededor de la mitad de ellos pudo simbolizar expresiones simples.

Resultados relacionados con las variables en relación funcional

Cuando se analizan las respuestas a las preguntas que involucran variables en relación funcional, se hace evidente que, en el caso de los problemas simples, la correspondencia entre variables no presenta problemas para la mayor parte de los estudiantes. Esto no es así cuando se trata de problemas más complejos, aunque se observa un avance cuando se compara el desempeño de los estudiantes que inician la universidad con los más avanzados. En cuanto a la capacidad para trabajar con la variación conjunta, la mayoría de los estudiantes presentó dificultades. Únicamente una tercera parte de los estudiantes universitarios avanzados pudo interpretarla adecuadamente.

Los resultados obtenidos sugieren también que los cursos avanzados que siguen los estudiantes en la universidad tienen un impacto sobre su capacidad de determinar intervalos y de simbolizar relaciones más complejas. Sin embargo, consideramos que, a pesar de los cursos, hay aún demasiados estudiantes que tienen dificultades con estos aspectos. También queremos señalar que muchos estudiantes de este nivel recurren todavía a procedimientos aritméticos en sus procesos de solución.

Un resultado interesante es que, cuando se pregunta a los estudiantes de secundaria acerca de su interpretación de los datos de una tabla, manifiestan una clara noción intuitiva de la variación conjunta. Esta intuición parece haberse perdido en los estudiantes que inician la universidad. Tal parece que la intuición se pierde conforme se estudia álgebra en la escuela; sin embargo, gracias al trabajo que se realiza con funciones en los cursos universitarios, los estudiantes logran interpretar la variación conjunta, aunque en un grado menor al requerido en este nivel de estudios.

Resultados relacionados con la integración y diferenciación de los usos de la variable

Los resultados de este estudio muestran que cuando los problemas presentados a los estudiantes son sencillos, independientemente de su nivel escolar, son capaces de integrar los distintos usos de la variable, particularmente el número general y la incógnita, y de pasar flexiblemente de uno a otro en sus estrategias de solución. Cuando se les presentan problemas que son ligeramente más complicados, por ejemplo, problemas que contienen parámetros o que requieren la simbolización de una expresión que no sea una traducción directa, muchos de los estudiantes de secundaria y de los que inician sus estudios universitarios recurren a procedimientos aritméticos en lugar de utilizar el álgebra. Aun cuando los estudiantes avanzados mostraron mayor capacidad de integrar los distintos usos de la variable, todavía se encuentran demasiados casos de alumnos que tienen una capacidad muy limitada de pensamiento algebraico.

Los problemas complejos representaron un reto importante para casi todos los estudiantes de esta muestra. Muchos de ellos no fueron capaces de simbolizar expresiones, ni interpretar el papel de las variables involucradas en el problema ni establecer o manejar las relaciones entre variables. La mejoría encontrada entre los estudiantes avanzados no refleja una comprensión profunda del concepto de variable. Las preguntas utilizadas en los instrumentos involucran otros conceptos matemáticos además del de variable. Ello es inevitable, pues la variable nunca aparece por sí misma. Podría pensarse que algunas de las dificultades de los estudiantes señaladas hasta este momento pueden deberse a la falta de comprensión de esos otros conceptos y no del concepto de variable. Sin embargo, consideramos que estas posibles deficiencias no influyeron en el análisis de manera determinante, ya que, como se mencionó anteriormente, el análisis de las respuestas de los estudiantes consideró únicamente la manera en la que manejaban las variables. Además, en la entrevista se pudo constatar que, por ejemplo, los estudiantes universitarios tenían conocimiento del significado de límite, de derivada y de diferentes tipos de funciones básicas. También hay que tomar en consideración que en las propias preguntas se incluyeron las explicaciones necesarias para evitar que una comprensión deficiente de estos conceptos interfiriera en sus respuestas.

A continuación se muestran algunos ejemplos de respuestas a las entrevistas a estudiantes universitarios avanzados, las cuales ilustran cómo las dificultades de integración de los usos de la variable persisten en este nivel.

Durante la entrevista y en el cuestionario, Julián muestra que es capaz de interpretar la variable y que puede integrar y diferenciar los distintos usos de la variable cuando es necesario. A pesar de que muestra solidez en sus estrategias de solución, en la pregunta 1, por ejemplo, no identifica inicialmente la ecuación resultante como la de una parábola y, al preguntársele por la variación, tarda en responder y finalmente dice: *"cuando* x *aumenta, el área aumenta y si* x *disminuye, disminuye la base y entonces también disminuye el área"*. Cuando se le cuestiona por qué duda y aunque dice *"...es que es una parábola"*, tiene dificultades para expresar la variación y concluye *"... creo que aunque es una parábola sólo esta parte entra aquí* (refiriéndose a los valores positivos de x*) y entonces si* x *aumenta, el área aumenta"*. En la pregunta 7 Julián interpreta claramente el problema y plantea las ecuaciones $s = 8t$, $D = s + b$, $8(2.5 - t) + 17T = D$, $s = b$, en las que s es la distancia de subida, t el tiempo de subida, b la distancia de bajada, T el tiempo de bajada y D la distancia total. Una vez que plantea las ecuaciones dice: *"Tengo que encontrar* t*, el tiempo de subida, y* D*, la distancia recorrida, pero no sé, porque tengo muchas variables, las puedo combinar pero siempre me va a quedar más de una variable y no voy a poder despejar ninguna de las dos incógnitas"*, y no es capaz de hacer más.

Patricia muestra en sus respuestas que no tiene problemas con la manipulación de la variable independientemente de la dificultad de los problemas, mientras éstos no incluyan parámetros. Cada vez que éstos aparecen, sus respuestas indican dificultad para interpretar su significado. Por ejemplo, ante la función $G(x) = ax^2 + bx + c$, manipula y utiliza su conocimiento de cálculo diferencial para encontrar que el máximo de la función está en $x = -b/2a$. Cuando es necesario sustituir los datos de la tabla para encontrar los valores de los parámetros, no puede relacionarlos con la ecuación para la ganancia: *"esto se puede hacer... a lo mejor con los datos... pero no sé cómo"*, y es incapaz de plantear las ecuaciones necesarias para lograrlo. Muestra en sus respuestas que, si bien puede manipular la expresión y considerar las literales que en ella aparecen como números generales, no es capaz de asignarles el significado de incógnita cuando ello se requiere. En el problema 9, Patricia encuentra otra vez dificultades con los parámetros. Reconoce, en primer término, que la ecuación dada tendrá una solución de equilibrio cuando la derivada de la función sea cero y la ecuación quede como una ecuación cuadrática. Dice: *"Aquí ya tengo esta ecuación con* $y' = 0$ *y la tengo que resolver para* y". Utiliza la fórmula para la ecuación cuadrática correctamente, pero le queda una expresión en términos del parámetro, ante lo que expresa confusión: *"Ya no sé qué pasa, porque la* y *es lo que tengo que encontrar, pero tengo esa* a *que no conozco",* el entrevistador le pregunta *"Pero, en la pregunta ¿qué es lo que se pide?"* y ella responde *"Los puntos de equilibrio, pero es que esa* a *no me permite encontrarlos, porque no sé cuánto vale"*. Patricia enfoca su atención en la variable *y,* la considera una incógnita, lo cual es correcto, en un primer momento, pero posteriormente, no es capaz de reconocer al parámetro como incógnita y considerar las especificaciones del problema para encontrar su valor.

Al resolver el problema 1, Roberto interpreta la correspondencia entre las variables, pero no la variación y no identifica la relación resultante como la ecuación de una parábola. Su respuesta indica que interpreta la fórmula para el área de manera global y estática *"El área está dada por esta fórmula...* x *puede tomar valores de 1 a 3, para cada valor, si sustituyes, tienes el área, y sí es el máximo, porque si sustituyes encuentras ese valor"*. Además, sus respuestas parecen indicar que interpreta la relación como una ecuación en la que es necesario conocer el valor del área para poder calcular un valor específico para la variable x. Muestra, además, una fuerte tendencia a utilizar procedimientos aritméticos a lo largo de toda la entrevista. En el problema 5 calcula la cosecha sucesivamente para cada número de árboles, desde 60 hasta que llega a un número cercano al que requiere el hortelano y concluye: *"éstos son los árboles que tiene que sembrar"*. En la pregunta 7, calcula la velocidad promedio y dice *"la velocidad total es de 12.5 km/h y como son 2 horas lo que tardó entonces son 25 km la distancia"* y no puede hacer más ante el cuestionamiento del entrevistador. En la pregunta 10, dibuja punto a punto la gráfica con los datos de la tabla y comenta: *"ésta es la ecuación, para G, pero, bueno puedo derivar y encontrar el máximo ...pero no, porque no sé* a, b *y* c*... ni idea"*.

Es interesante destacar que los estudiantes universitarios avanzados son capaces de resolver problemas algebraicos complejos cuando se encuentran en el contexto de las clases de matemáticas, por ejemplo, en el contexto de un curso de Ecuaciones Diferenciales, pero, cuando ellos mismos abordan las preguntas simples de álgebra que se les presentaron en este estudio, sus respuestas no muestran la profundidad de comprensión que se esperaría. La única diferencia entre las dos situaciones es que, cuando abordan los problemas de este trabajo, los estudiantes se encuentran fuera del contexto de una clase de matemáticas, lo que parece indicar que no son capaces de utilizar su conocimiento matemático en condiciones distintas a las escolares. En estas condiciones, o bien regresan al uso de procedimientos aritméticos, como en el caso de Rodrigo, presentado anteriormente, o no son capaces de llegar a una solución, como muestra el caso de Patricia. Una pregunta que surge de estos resultados es ¿cómo explicar la imposibilidad de transferencia del conocimiento algebraico?

DISCUSIÓN

Las dificultades que los estudiantes muestran a lo largo de este estudio no son sorprendentes a la luz de la investigación en Matemática Educativa. Varios estudios han informado a lo largo de los años (Boero y Bazzini, 2004; Ainely *et al.*, 2004; Gram y Thomas, 2000) que los alumnos muestran serios problemas en el aprendizaje del álgebra y, en particular, en la comprensión del concepto de variable (Ambrosio, 2006; Ursini y Trigueros, 2006; Bills, 2001, 2004; Trigueros *et al.*, 2002; Bloedy-Vinner, 2001;Warren, 1999). Aunque en algunos de estos estudios se ha trabajado con estudiantes universitarios, en ellos no se han incluido estudiantes universitarios tan avanzados como los que participaron en esta investigación. La comparación entre el nivel de aprendizaje de alumnos de secundaria y estos estudiantes pone de relieve que cursar más materias de matemáticas no resuelve el problema fundamental de la comprensión de la variable.

Con el afán de profundizar en los problemas que pueden estar implicados en esta falta de comprensión o en la falta de transferencia del conocimiento, se procedió a realizar una búsqueda de resultados de estudios en el ámbito de las ciencias cognitivas, a fin de encontrar alguna posible explicación.

Los avances en tecnología han posibilitado el estudio de la actividad cerebral cuando una persona resuelve problemas de matemáticas. Estos estudios son recientes y no es pertinente intentar obtener de ellos conclusiones globales todavía; pero entre los resultados hay algunos que conviene tomar en consideración en la investigación en Matemática Educativa y en la enseñanza de las matemáticas. Algunos indican que la comprensión está contextualizada en las experiencias que le dan origen y que se estructura con base en analogías y asociaciones (Davis y Sumara, 2006; Calvin, 1996; Clark, 1997; Zull, 2002). En el marco del presente estudio, estos resultados apuntarían a que la pobreza en las respuestas de los estudiantes podría tener relación, como se mencionó anteriormente, con el hecho de que el estudio se hizo fuera del contexto de la clase y, en esas circunstancias, los estudiantes no son capaces de establecer las asociaciones necesarias para utilizar su conocimiento algebraico. Pero, ¿cómo lograr en la escuela que el conocimiento pueda ser transferible? Los mismos estudios indican que, para que esto ocurra, es necesario que el aprendizaje haga referencia a contextos diversos y, sobre todo, que se comprendan los conceptos a profundidad para que los alumnos sean capaces de aquilatar sus posibilidades y limitaciones, aunque hace falta mucha investigación a este respecto.

Por otra parte, en la psicología cognitiva se ha desarrollado una teoría que ha probado ser útil en el análisis de datos de algunas situaciones en enseñanza de matemáticas. Esta teoría, llamada teoría del proceso dual (Kahneman, 2002; Stanovich y West, 2002, 2003), puede proporcionar elementos para interpretar algunos resultados empíricos de los errores de los estudiantes o de sus dificultades y, en el marco del trabajo que aquí se presenta, puede permitir entender cómo es que los estudiantes que han pasado por muchos cursos de matemáticas y responden de manera correcta en los exámenes de esos cursos y son inteligentes parecen no tener el conocimiento necesario para resolver correctamente preguntas simples como las que se plantean en este estudio.

Ante un problema similar, Kahneman y Frederick (Kahnemann, 2002, p. 451; Kahneman y Frederick, 2005, p. 273) se preguntaron cuáles pueden ser los mecanismos que están detrás de la información experimental de que muchas personas resuelven incorrectamente problemas sencillos de matemáticas cuando tienen un conocimiento que podría suponerse profundo de esta disciplina. En su respuesta utilizaron la teoría del proceso dual.

De acuerdo con esta teoría, nuestra cognición y nuestra conducta operan en paralelo en dos diferentes modos, a los que denominan Sistema 1 y Sistema 2, que podrían corresponder, aunque no exactamente, a nuestro sentido común de pensamiento intuitivo y analítico. Esos dos modos tienen diferentes orígenes evolutivos, operan de manera diferente y se activan por el funcionamiento de partes distintas del cerebro. El sistema S2 es más reciente en términos evolutivos y refleja en gran parte la evolución cultural. Esta teoría se ha desarrollado recientemente en las ciencias cognitivas y tiene importantes consecuencias para la interpretación de algunos resultados en la investigación educativa. Los procesos S1 se caracterizan por ser rápidos, automáticos, sin esfuerzo, baratos en términos del uso de recursos de memoria, inconscientes e inflexibles, es decir, difíciles de cambiar o superar. Los procesos S1 van más allá de la pura percepción, ya que pueden estar mediados por el lenguaje y pueden relacionarse con acontecimientos que no suceden aquí y ahora, es decir acontecimientos que pueden suceder en lugares distantes o que tienen que ver con el pasado o el futuro. Los procesos S2, en contraste, son lentos, conscientes, involucran recursos de la memoria y son relativamente flexibles, además funcionan como monitores y críticos de las respuestas rápidas y automáticas de S1, y tienen una especie de autoridad sobre ellos que les permite tomar el control de la situación cuando es necesario. Según esta misma teoría, el sistema S1 no se puede entrenar, pero el sistema 2, sí. En muchas situaciones, S1 y S2 trabajan concertadamente, pero en otras, S1 produce una respuesta automática rápida y no necesariamente correcta respecto al contexto en el que se da. En otras situaciones, S2 actúa como mecanismo de control, pondera la situación y permite dar una respuesta diferente.

El hecho de que los estudiantes cometan a menudo cierto tipo de errores algebraicos y que estos errores aparezcan incluso en estudiantes universitarios avanzados que han llevado varios cursos de álgebra, como es el caso del presente estudio, podría abordarse utilizando la teoría del proceso dual: Los atributos superficiales del problema provocan, probablemente, una respuesta inmediata del sistema S1, la cual estaría basada en los aspectos más sobresalientes de la pregunta y muchos estudiantes, sin importar su nivel, aceptan este tipo de respuesta de manera poco crítica. En el caso de los estudiantes que responden de manera correcta, se podría decir que el sistema S1 se activa también inmediatamente con el mismo tipo de respuesta, pero, enseguida, el sistema S2 interfiere críticamente, lo que permite que los alumnos reconsideren los elementos de la pregunta de manera más crítica y puedan así dar una respuesta correcta.

Es interesante notar que, aunque es normal que en las situaciones cotidianas las personas prefieran respuestas rápidas, aproximadas y que vienen pronto a la mente, se esperaría que las horas dedicadas al estudio por parte de los estudiantes universitarios hubieran sido útiles para entrenar su pensamiento metodológico de manera que pudieran analizar las situaciones críticamente y corregir, en caso necesario, su respuesta inmediata.

Los resultados aquí presentados, vistos a la luz de esta teoría, podrían indicar que estudiantes de distintos niveles son atraídos fuertemente por las características superficiales de los problemas. Esto sucederá siempre, pero el papel de la enseñanza de las matemáticas en la escuela, por ejemplo cuando se enseña álgebra, debe ser el de entrenar el sistema de control de los alumnos mediante la introducción de múltiples oportunidades de reflexión sobre el concepto de variable en diferentes contextos, de tal manera que, cuando requieran utilizar sus conocimientos dentro o fuera del contexto escolar, sean capaces de responder críticamente y de dar explicaciones sólidas a sus respuestas.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este trabajo sugieren que los cursos de matemáticas avanzadas tienen un impacto positivo en la capacidad de los estudiantes para usar las variables. Sin embargo, el avance es mucho menor que el que se requiere en dichos cursos. Sugieren también que, durante el paso por la escuela, los estudiantes han aprendido más técnicas, pueden aplicar algoritmos con mayor fluidez y mejoran en la posibilidad de interpretar las variables en las expresiones. Es claro, por otra parte, que la gran mayoría de ellos no utilizan las variables como herramienta poderosa para analizar y resolver problemas. Cuando enfrentan problemas complejos, todos los estudiantes, incluidos los avanzados, suelen evitar el acercamiento algebraico y regresan a utilizar procedimientos aritméticos.

Los datos encontrados sugieren que la capacidad de pensamiento algebraico de los estudiantes no está tan desarrollada como sería deseable y que, aunque los estudiantes de secundaria ya muestran cierta capacidad para integrar los distintos usos de la variable y sus distintos aspectos, esta capacidad no se desarrolla en su paso por la escuela. Esto se debe probablemente a que ni en los programas de estudio ni en los textos escolares se hace énfasis en la integración de los distintos usos de la variable. Si bien a lo largo de la enseñanza secundaria los alumnos enfrentan problemas que requieren trabajar con cada uno de los tres usos mencionados, sea de manera separada o integrada (Benitez, 2004), no hay, en los textos escolares, apoyos deliberados suficientes que les ayuden a desarrollar una comprensión integrada del concepto de variable. Por lo general, los estudiantes tampoco reciben este tipo de apoyos por parte de los profesores, ya que los propios profesores también carecen, en muchas ocasiones, de una comprensión adecuada del concepto de variable (Juarez, 2001).

Para ayudar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento algebraico, sería necesario, a la luz de los resultados de este trabajo, ofrecerles un mayor número de oportunidades para reflexionar sobre las ideas algebraicas involucradas en distintos tipos de problemas y llevarlos a tomar conciencia de ellas para tratar así de fortalecer el desarrollo de mecanismos internos de control. De esta manera, los alumnos podrían profundizar en su comprensión de las variables hasta llegar a utilizarlas de manera autónoma, esto es, sin necesidad de apoyos externos, así como monitorear y criticar las respuestas automáticas que provocan las características superficiales de los problemas. El uso de problemas complejos que pueden verse como un reto para los estudiantes podría aprovecharse con el mismo fin.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ainely, J., L. Bills y K. Wilson (2004), "Constructing meanings and utilities within algebraic tasks", en M. Johnsen y A. Berit (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education,* Bergen, Noruega, vol. 2, pp. 1-8.

Ambrosio, J. (2006), *Uso de un modelo teórico para el estudio de la comprensión del concepto de parámetro en el álgebra,* tesis de Licenciatura, Universidad Veracruzana.

Benitez, E. (2004), *Los usos de la variable en algunos libros de texto de matemáticas para la escuela secundaria,* tesis de Maestría en Ciencias, DME-Cinvestav, México.

Bills, L. (2001), "Shifts in the meanings of literal symbol", en M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, Países Bajos, vol. 2, pp. 161-168.

Bloedy-Vinner, H. (2001), "Beyond unknown and variables – Parameters and dummy variables in high school algebra", en R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (eds.), *Perspectives on school algebra,* Boston, MA, Kluwer, pp. 177-189.

Boero, P. y L. Bazzini (2004), "Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives", en M. Johnsen y A. Berit (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education,* Bergen, Noruega, vol. 1, pp. 139-143.

Calvin, W. (1996), *How brains think: evolving intelligence then and now,* Nueva York, Basic Books.

Clark, A. (1997), *Being there: outing brain, body and world all together again,* Cambridge, Mass.,The MIT Press.

Davis, B. y D. Sumara (2006), *Complexity and Education: Inquiries into Learning, Teaching and Research,* New Jersey, Lawrence Erlbaum.

Graham, A. y M. Thomas (2000), "Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 41, pp. 265-282.

Jacobs, S. (2002), "Advanced placement BC calculus students' ways of thinking about variable", tesis inédita de Doctorado, Arizona State University, Arizona, EUA.

Juárez, J.A. (2001), *La comprensión del concepto de variable en profesores de secundaria*, tesis de Maestría en Ciencias, DME-Cinvestav, México.

Kahneman, D. y S. Frederick (2005), "A Model of Heuristic Judgment", en K.J. Holyoac, y R.J. Morrison (eds.), *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 267-293.

Kahneman, D. (2002), "Maps of bounded irrationality: a perspective on intuitive judgment and choice", ponencia presentada en la ceremonia del Premio Nobel, en T. Frangsmyr (ed.), *Les Prix Nobel*, pp. 416-499. Website: http://www.nobel.se/economics/laureates/2002/kahnemann-lecture.pdf.

Montes, D. (2003), *Iniciación al álgebra a través de la variable: una aplicación didáctica del Modelo 3UV*, tesis de Maestría en Ciencias, DME-Cinvestav, México.

Sokolowski, C. (2000), "The variable in linear inequality: College students' understandings", en M. Fernández (ed.), *Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Columbus, OH, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, pp. 141-146.

Stanovich, K.E. y R.F. West (2003), "Evolutionary versus instrumental goals: how evolutionary psychology misconceives human rationality", en D.E Over (ed.), *Evolution and the Psychology of Thinking. The Debate*, Psychology Press, pp. 171-230.

—— (2002), "Individual differences in reasoning. Implications for the rationality debate", *Behavioral and Brain Sciences*, vol. 23, pp. 645-726.

Trigueros, M. y S. Ursini (2003), "First-year Undergraduates' Difficulties in Working with Different Uses of Variable", en Annie Selden, Ed Dubinsky, Guershon Harel y Fernando Hitt (eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 12. Research in Collegiate Mathematics Education V*, American Mathematical Society in cooperation with Mathematical Association of America, vol. V, pp. 1-29.

—— (2001), "Approaching the study of algebra through the concept of variable", en Helen Chick, Kaye Stacey, Jill Vincent y John Vincent (eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, Australia, The University of Melbourne, vol. 2, pp. 598-605.

Trigueros, M., S. Ursini y L. Lozano (2000), "La conceptualización de la variable en la enseñanza media", *Educación Matemática*, vol. 12, núm. 2, pp. 27-48.

Ursini, S., F. Escareño, D. Montes y M. Trigueros (2005), *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas.

Ursini, S. y M. Trigueros (1997), "Understanding of different uses of variable: A study with starting college students", *Proceedings of the XXI PME Conference*, Lahti, Finlandia, pp. 4-254-4-261.

—— (2001), "A model for the uses of variable in elementary algebra", en M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Países Bajos, vol. 4, pp. 327-334.

—— (2004), "How do high school students interpret parameters in algebra?", en M. Johnsen y A. Berit (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education*, Bergen, Noruega, vol. 4, pp. 361-369.

—— (2006), "Students' evolution in the understanding of variable", en *Proceedings of 8th ICTM*, Estambul, Turquía.

Warren, E. (1999), "The concept of a variable; gauging students' understanding", en O. Zaslovsky (ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education*, Haifa, Israel, vol. 4, pp. 313-320.

Zull, J.E. (2002), *The art of changing the brain: enriching the practice of teaching by exploring the biology of learning*, Steerling, VA, Stylus.

DATOS DE LAS AUTORAS

Sonia Ursini
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav) del IPN, México
soniaul2002@yahoo.com.mx

María Trigueros
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), México
trigue@itam.mx