Cuadrículas de variación estructurada para explotación y desarrollo de las capacidades matemáticas de los jóvenes aprendices

John Mason

Resumen: En este trabajo, se presenta un dispositivo denominado cuadrículas de variación estructurada (SVG), que pueden utilizarse para poner en contacto al aprendiz, no sólo con la aritmética y el álgebra, sino con una justificación del porqué $(-1)\times(-1) = 1$, basada en las capacidades naturales del alumno para imaginar y expresar lo que es imaginado, para detectar y hacer conjeturas sobre patrones, para ejemplificar y generalizar; y así para todas las capacidades que constituyen el pensamiento matemático. Dichas cuadrículas están disponibles en una amplia variedad, que van desde la ley distributiva para los números enteros hasta las operaciones con fracciones en la factorización de expresiones cuadráticas y la identificación de formas bilineales.

Palabras clave: Aprendizaje de la aritmética y el álgebra, cuadrículas de variación estructurada.

Abstract: A device called Structured Variation Grids (SVGs) are presented. They can be used to bring learners into contact not only with arithmetic and algebra, including justification for $(-1)\times(-1) = 1$, but with the use of their own natural powers, such as imagining and expressing what is imagined, detecting and conjecturing patterns, specialising and generalising, and so on: all the powers which constitute mathematical thinking. SVGs are available which span from the distributive law for whole numbers through operations on fractions to the factoring of quadratics and the identification of bilinear forms.

Keywords: Arithmetic and algebra learning, patterns, structured variation grids.

INTRODUCCIÓN

Cuando ingresan por primera vez a la escuela los niños pequeños, ya han mostrado tremendas capacidades naturales para entender el mundo con el que se

Fecha de recepción: 5 de junio de 2006.

topan. Una cuestión vital para los maestros es si los aprendices fueron expuestos a situaciones en las cuales se ignoraron esas capacidades o si se aprovecharon, se desarrollaron y se ampliaron. La capacidad central es la imaginación (la cual no está presente manifiestamente) y la expresión de lo que se imagina en acciones, palabras, dibujos y símbolos. Una capacidad muy cercana a ésta tiene que ver con la detección y ampliación de patrones que hacen énfasis en algunos aspectos y, por consiguiente, la omisión de otros. Esto es lo que Caleb Gattegno (1987) identificó como la esencia de la generalización y lo que hace que el lenguaje funcione. Es la manera como un organismo funciona. Desde un punto de vista matemático, la identificación y exploración de patrones se basan en el par de procesos de especialización y generalización, como subrayó, en particular, George Polya (1962). Ver lo particular en lo general (especialización o particularización), y ver lo general a través de lo particular, es vital para caminar y hablar, así que no es de sorprender que ambos procesos sean el corazón del pensamiento matemático. Sin embargo, no es suficiente haber ampliado un patrón o reconocido algo como un caso particular de algo más general para decir que el aprendizaje se ha dado. El aprendizaje incluye una transformación de aquello a lo que se presta atención, se discierne o se nota, de ahí la naturaleza o estructura de esa atención (Mason, 2003). La percepción se basa en algo que cambia cuando otra cosa permanece (relativamente) invariante, y el aprendizaje cognitivo sigue un proceso similar si se trata de un patrón más abstracto. Haber aprendido algo es ver de diferente modo, ya sea literal o figurativamente, es decir, para discernir lo que previamente no se diferenciaba.

Según Ference Marton (Marton y Booth, 1997; Marton y Tsui, 2004; Marton, inédito), la esencia del aprendizaje radica en volverse consciente de la variación, de lo que puede cambiar sin afectar la situación total. De ahí que la apreciación de un concepto incluya el conocimiento de cuáles aspectos de un ejemplo pueden cambiar sin convertirse en contraejemplo; la apreciación de una técnica incluye el conocimiento de cuáles aspectos de un problema o situación pueden cambiar sin alterar la efectividad de la técnica. A estos aspectos que pueden cambiar Marton los denominó *dimensiones de la variación*. Anne Watson y yo (Watson y Mason, 2005, 2006) ampliamos esta noción a las *dimensiones de la posible variación*, para remarcar el hecho de que personas diferentes son conscientes de diferentes dimensiones. Es más, aun un experto puede volverse consciente de aspectos que pueden cambiar y que previamente no fueron detectados, de ese modo puede aprender. También introducimos la noción asociada de *rango del cambio aceptable*, porque muy a menudo en matemáticas, el maestro y los estudiantes tienen conocimientos algo distintos del alcance o rango del cambio que es aceptable. Por ejemplo, dada la situación

$$12 = \square + \square$$

algunos aprendices pueden ser conscientes sólo de los números naturales como los candidatos para llenar los *cuadritos*, mientras que otros podrían pensar en fracciones, decimales, negativos o aun más allá de ellos. De manera similar, al considerar fracciones, muchos aprendices podrían no pensar en excluir el 0 del denominador. Por lo que nos es útil, como profesores, que nos recuerden las posibles diferencias de lo que los aprendices ven como variable y sobre cuál rango.

Marton (*ibid*) ha argumentado que, a fin de detectar la variación, es útil tener varias instancias en una rápida ocurrencia, de modo que las instancias sean vistas como variaciones más que como sucesos aislados y distintos. Es más, parece evidente que si demasiados aspectos están variando a la vez, los aprendices no puedan verlos como variaciones sino como objetos distintos, mientras que si sólo algunos pocos aspectos están variando, los aprendices podrían enfadarse y volverse dispersos (Watson y Mason, 2005).

El aprendizaje podría afectar para discernir con más detalle, o para ser consciente de más o diferentes relaciones en una situación, o para ser consciente de las propiedades que podrían aplicarse en otras situaciones. Todo eso depende del uso natural de las capacidades para destacar o ignorar, para imaginar y expresar, para particularizar o generalizar, no siempre necesaria y conscientemente.

Las cuadrículas de variación estructurada proporcionan un formato para usarlas con los aprendices y pueden invocar esas capacidades naturales, produciendo una apreciación apropiada y razonada de la estructura de la aritmética y el álgebra. El propósito de este artículo es describir algunas cuadrículas y modos apropiados de trabajar con ellas, así como dar lugar a preguntas de investigación pertinentes a nuevos estudios.

CUADRÍCULAS DE VARIACIÓN ESTRUCTURADA

$(-1) \times (-1)$

Los aprendices a menudo quedan impresionados con consignas simples que pretenden comunicar lo que necesitan saber. Por desgracia, “menos veces un menos es un más" es una de ésas. Sin embargo, se reconoce ampliamente que la mera memorización no es suficiente como educación, aun cuando baste para aprobar los exámenes. Lo que realmente queremos es que los aprendices desarrollen una práctica de simplificar correctamente los cálculos que incluyen productos de números negativos cuando es apropiado. Los estudiantes no necesitan ser conscientemente explícitos, sino ser mucho más conscientes; digamos, de que precisamente "hay un problema cuando multiplicas signos". Los aprendices algunas veces se inclinan a usar una variante, tal como la adición en lugar de la multiplicación, para demostrar el fenómeno de que la conducta entrenada no siempre se usa apropiadamente. Ésta es la razón por la que es esencial combinar la educación de la conciencia con el entrenamiento de la conducta. En este contexto se utiliza algunas veces el lema "enseñanza para el entendimiento", pero es difícil imaginar a un maestro que no quiera enseñar para el entendimiento, aun cuando crean que el entendimiento emergerá después de que la práctica se haya realizado y haya funcionado. El punto aquí es que no hay una fórmula mágica de precedencia entre la práctica y el entendimiento. En lugar de eso, los dos procesos suelen darse simultáneamente. El problema es que, una vez que la enculturación se convierte en el hábito de "esperar a que se les diga qué hacer", los aprendices pierden capacidad para un aprendizaje eficiente y sustantivo.

Los patrones estructurales que "fortalecen", y de ahí justifican el hecho de que $(-1) \times (-1) = 1$, son fundamentales para la aritmética. Por varias razones (véase la sección sobre los orígenes históricos), la noción de extender secuencias simples a cuadrículas de dos dimensiones surgió y ha quedado manifiesta en Flash "applets", y tres de ellos nos llevan, entre otras cosas, al producto de los números negativos. Las cuadrículas ofrecen un enfoque estructurado para la variación de dos parámetros; permiten al maestro retar y motivar, tal como parece requerirse. Una vez que los aprendices las utilizan para saber cómo operan, pueden mostrar pensamiento y razonamiento matemático complejo.

Cuadrícula para los números

Imagina una malla o cuadrícula de celdas. Cada celda está dividida en una mitad superior y una inferior. La mitad inferior típicamente contiene una operación y la mitad superior una respuesta a ella o una versión alternativa de ella. Las celdas se extienden infinitamente en todas direcciones. Ahora imagina una ventana sobrepuesta a la cuadrícula, de modo que las celdas en la ventana sean visibles.

Se muestran los contenidos de algunas celdas. En el caso que aquí se ilustra, se pueden ver todas las mitades superiores.

Number Grid

7	14	21	28	35	42	49
6	12	18	24	30	36	42
5	10	15	20	25	30	35
4	8	12	16	20	24	28
3	6	9	12	15	18	21
2	4	6	8	10	12	14
1	2	3	4	5	6	7

¿Qué es lo que te imaginas que estará a la derecha, en porciones del mismo color de las celdas superiores? Mediante la conducción de la atención del aprendiz, hacia arriba de una columna o hacia la derecha de una fila, los aprendices serán capaces de predecir lo que aparecerá. Esto puede confirmarse usando los botones con las flechas, los cuales mueven la ventana en la dirección indicada sobre toda la cuadrícula que está como fondo. Por supuesto que nunca puedes estar absolutamente seguro: podría haber algún cálculo muy complicado que rompe el patrón detectado en alguna parte. Las cuadrículas se basan en la aritmética simple y ordinaria, y se proponen para hacer uso de las capacidades naturales de los aprendices para detectar y expresar patrones; pueden utilizarse otras tareas para trabajar sobre la diferencia entre un patrón generado por una regla y un patrón impuesto por el observador respecto a una situación.

La predicción de las siguientes entradas involucra la detección y expresión de patrones. Anne Watson (2000) describe lo anterior como ir con el hilo, utilizando la metáfora de cortar madera: esto divide fácilmente con el hilo, mientras se corta a través de él se manifiesta la estructura. Las matemáticas significativas se desarrollan cuando te detienes y vas a través del hilo a fin de volverte consciente y expresar las relaciones estructurales. Aquí puede uno pedir a los aprendices que expresen reglas generales para las entradas de una celda en una fila o columna específica, quizá no visible en la ventana desde el inicio. Una vez que estas articulaciones se vuelven fluidas y confiables, los aprendices pueden tratar de expresar la entrada de una celda para la que no se ha especificado ni la fila ni la columna y comprobar la conjetura en algunos casos extremos.

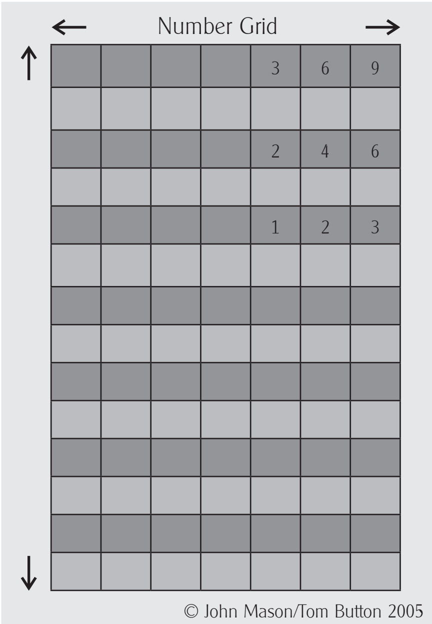
La característica de dar un clic y mostrar u ocultar las cuadrículas permite que el grupo utilice las flechas para mover la ventana a una posición desconocida sobre la cuadrícula, luego se muestre el contenido de algunas de ellas y se trate de predecir las celdas restantes o, por lo menos, la celda superior derecha. Un reto es encontrar el menor número de celdas que es necesario mostrar para predecir el contenido de todas las demás celdas visibles en la ventana.

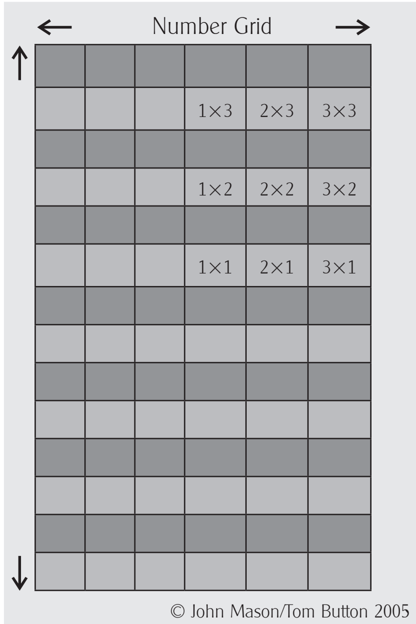
El mismo enfoque puede usarse, quizás en otra ocasión, con los contenidos de las celdas amarillas, pero es posible que los aprendices también reconozcan la estructura en las entradas de las celdas superiores y se den cuenta de que están mirando una tabla de multiplicar, en el momento en el que las partes gris claro también puedan mostrarse.

Number Grid

7	14	21	28	35	42	49
1×7	2×7	3×7	4×7	5×7	6×7	7×7
6	12	18	24	30	36	42
1×6	2×6	3×6	4×6	5×6	6×6	7×6
5	10	15	20	25	30	35
1×5	2×5	3×5	4×5	5×5	6×5	7×5
4	8	12	16	20	24	28
1×4	2×4	3×4	4×4	5×4	6×4	7×4
3	6	9	12	15	18	21
1×3	2×3	3×3	4×3	5×3	6×3	7×3
2	4	6	8	10	12	14
1×2	2×2	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2
1	2	3	4	5	6	7
1×1	2×1	3×1	4×1	5×1	6×1	7×1

Una vez que los aprendices se sienten seguros con la manera como trabajan las celdas al desplazarse hacia arriba y a la derecha, puede introducirse el reto de continuar yendo de la izquierda hacia abajo. Hay selecciones por hacerse, por ejemplo, primero si trabaja en las mitades superiores o en las inferiores o en ambas a la vez. Todo depende de lo que el maestro quiera fortalecer en particular: cuáles entradas se considerarán o cuáles implicaciones se harán, por el hecho de que las partes de cálculo y el resultado de cada celda están relacionados. Desplazándose hacia abajo se introduce la multiplicación por números negativos, así como si se va hacia la izquierda. Una vez que esto está firmemente establecido, hay una cuestión sobre qué sucede cuando vas a la izquierda y luego hacia abajo, o hacia abajo y después a la izquierda: ¿obtienes las mismas operaciones? y ¿las mismas respuestas?; y ¿qué dicen esas respuestas acerca del producto de dos números negativos?





Es sorprendentemente fácil perderse cuando se oprime sobre las flechas sin obstáculos, así que es útil tener un botón para reestablecer. También es útil poder cubrir todas las celdas de modo que puedas empezar de nuevo. Se proporcionan varios botones para lograr esas metas. La nube es un botón que da acceso a los parámetros que pueden cambiarse.

Number Grid

36	45	54	63	72	81	90
4×9	5×9	6×9	7×9	8×9	9×9	10×9
32	40	48	56	64	72	80
4×8	5×8	6×8	7×8	8×8	9×8	10×8
28	35	42	49	56	63	70
4×7	5×7	6×7	7×7	8×7	9×7	10×7
24	30	36	42	48	54	60
4×6	5×6	6×6	7×6	8×6	9×6	10×6
20	25	30	35	40	45	50
4×5	5×5	6×5	7×5	8×5	9×5	10×5
16	20	24	28	32	36	40
4×4	5×4	6×4	7×4	8×4	9×4	10×4
12	15	18	21	24	27	30
4×3	5×3	6×3	7×3	8×3	9×3	10×3

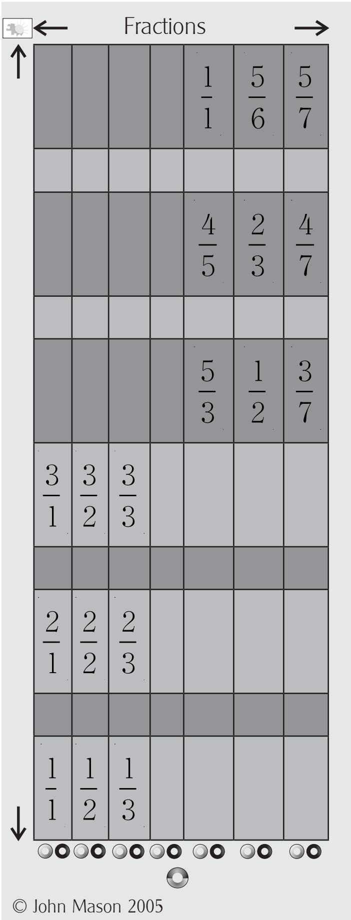
Uso de los paréntesis

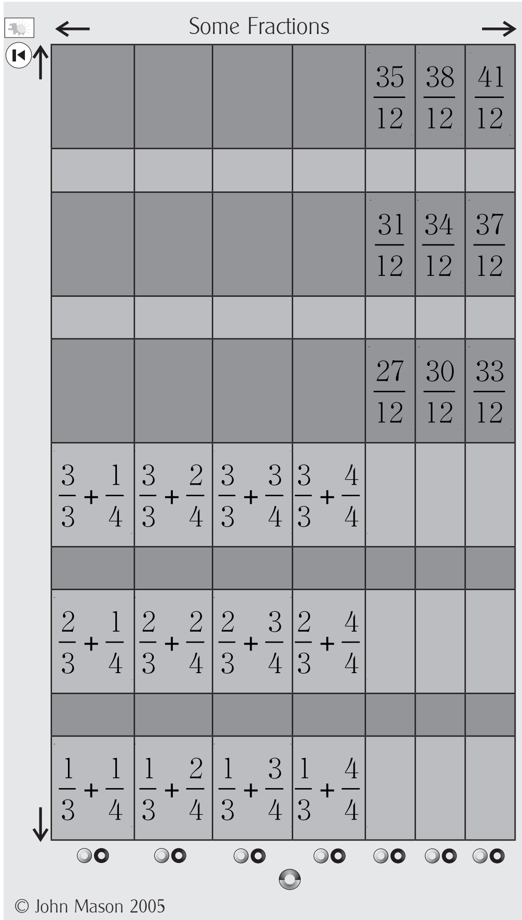
Una simple cuadrícula se basa en el mismo principio pero con diferente contenido de celdas. Los contenidos típicos son 5(2 + 1) y 15 en las partes inferior y superior de una celda, respectivamente. Una vez que los aprendices pueden articular la relación entre las dos mitades de esas celdas y en general pueden expresar la regla cuando la fila cambia o cuando la columna cambia o cuando ambas cambian, el usuario puede cambiar el multiplicador exterior. De nuevo, el potencial infinito de la cuadrícula subyacente y la oportunidad para moverse entre los negativos y ver varios cálculos a la vez exponen a los aprendices a patrones en aritmética, y de ahí a la estructura de la aritmética. En el proceso de articular dicha estructura, los aprendices usan álgebra para expresarse por sí mismos y al mismo tiempo expresan las reglas del álgebra.

Si al predecir la siguiente celda en una secuencia (que podría ser una fila o una columna, pero podría ser una diagonal) viene a la mente que el proceso es como *ir con el hilo*, entonces esta imagen puede actuar como un recordatorio para provocar en los aprendices *ir a través del hilo* mediante la búsqueda y expresión de la relación entre las dos partes de las celdas como una estructura, no sólo como celdas individuales y particulares, sino como todas las celdas en general, aun aquéllas cuyas entradas son demasiado grandes para ser visibles en las celdas.

Fracciones

Cuadrículas similares están disponibles para simplificación de fracciones por adición y por multiplicación de ellas. La idea es que uno de estos modos de encontrar se vuelva convincente y, de ese modo, interiorizar y recordar las operaciones con fracciones es encontrar y expresar patrones en secuencias de cálculos. Aquí no hay intención para justificar el cálculo o para proporcionar entendimiento a través de una metáfora ni proveer un fondo de imagen apropiado (como subdividir un rectángulo, tanto horizontal como verticalmente). La meta es simplemente complementar dicho trabajo mirando, expresando y entonces generalizando los patrones de la manera como se realizaron los cálculos.

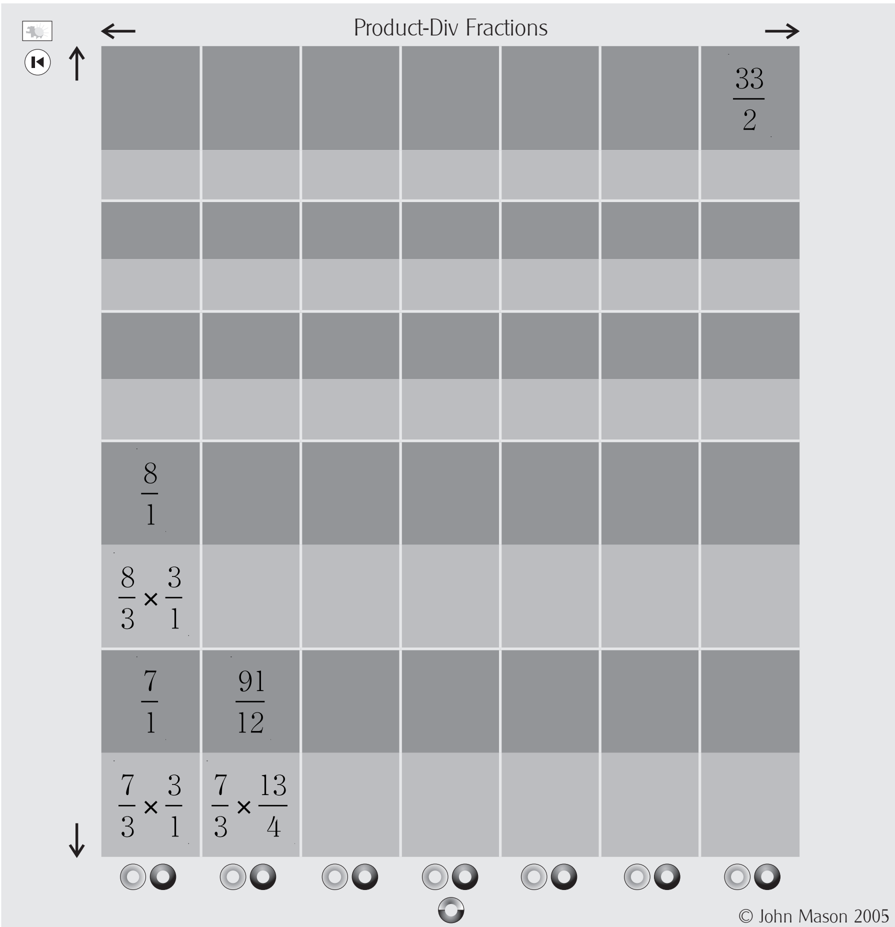




En la cuadrícula de fracciones equivalentes de la izquierda, las mitades superiores muestran la versión simplificada, la mitades inferiores la versión no simplificada. Los botones de la parte inferior permiten que toda una columna de celdas superiores o inferiores se visualice con un clic, y que todas las entradas de las celdas puedan ocultarse con un solo clic del botón inferior.

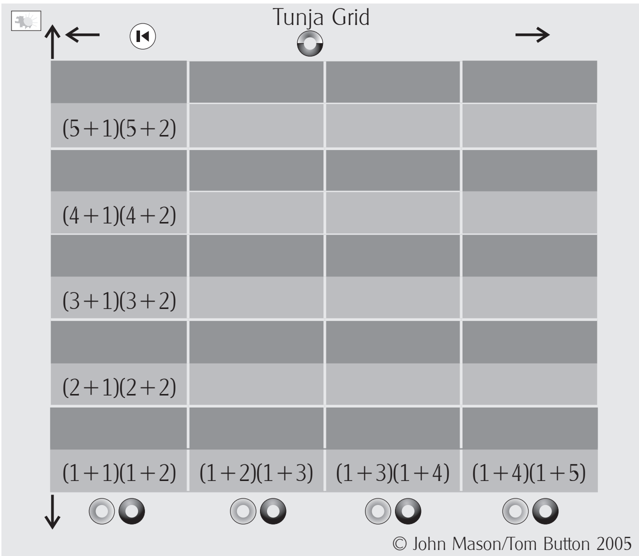
El botón de la nube permite hacer cambios. Por ejemplo, si tienes en mente un destino particular en la cuadrícula para la ventana, puedes cambiar la fracción o fracciones que aparecen en el botón de la esquina izquierda, la cual puede usarse preferentemente a las teclas de flechas. En la cuadrícula de la derecha puedes cambiar las operaciones de sumar por restar, así como cambiar si se muestran las fracciones simplificadas o no simplificadas. El botón de reestablecer regresa la ventana a su posición inicial sobre la cuadrícula. También hay otra cuadrícula para multiplicar y dividir fracciones.

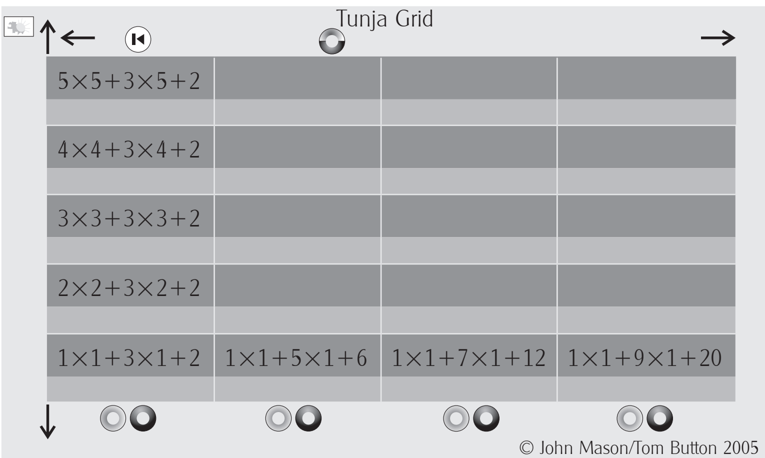
Puede ser muy desafiante el mover la ventana hacia alguna ubicación no identificada en la cuadrícula (ya sea usando las flechas o preestableciendo con el botón de la nube) y luego revelar tres o cuatro celdas, especialmente cuando las fracciones se muestran en el modo simplificado. Por ejemplo, ¿cuáles entradas pertenecen a la mitad inferior de la celda superior derecha, y por qué?



Factorización y desarrollo de productos cuadráticos

Como se indicó al inicio de la sección anterior, la idea de cuadrículas de variación estructurada surgió del trabajo con sucesiones formadas por factorizaciones familiares de expresiones cuadráticas. Una de esas cuadrículas aprovecha esta idea para dar acceso a toda suerte de secuencias cuya generalización es la expresión de la factorización de una expresión cuadrática.





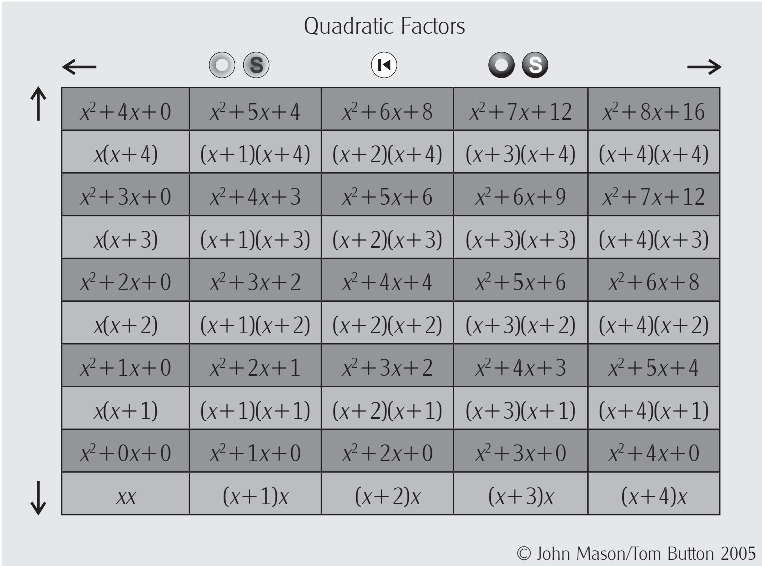
Si se atiende únicamente a las formas factorizadas (la mitades inferiores de las celdas), es más o menos fácil predecir la entrada de la celda superior derecha. Al prestar atención sólo a las mitades superiores de las celdas, si se miran primero en una columna las entradas de una secuencia y luego se detectan los patrones en una fila, no es demasiado difícil predecir la entrada de la celda superior derecha. Desplazarse a través del hilo significa expresar la forma general de cada columna, o en cada renglón. Finalmente, y sólo quizá cuando se logra la predicción de columnas y filas con facilidad, las mitades superiores e inferiores de las celdas pueden trabajarse conjuntamente. El hecho de que sean iguales puede revisarse aritméticamente. Desplazarse a través del hilo involucra ahora expresar el fuerte sentido de que las dos generalizaciones (una para las mitades superiores y otra para las inferiores) deben ser siempre iguales.

Un enfoque alternativo, con el cual empecé, es exponer ambas mitades de las celdas al mismo tiempo. Aun los aprendices que han sido clasificados como de bajo rendimiento pueden comprobar la aritmética (quizá con una calculadora); pueden detectar y expresar patrones, no sólo como las relaciones entre las mitades superiores y las inferiores, sino entre ambas.

Una vez que los aprendices tienen desarrollada con fluidez estas generalizaciones, las ideas de factorizar o desarrollar los paréntesis serán ambas significativas y serán, simplemente, una articulación de lo que los aprendices ya saben.

El botón de la nube posibilita cambiar los signos en uno de los paréntesis de la suma a la resta, o en ambos, y también pueden alterarse las diferencias entre las últimas entradas de cada par de paréntesis.

Como se podría esperar, los aprendices que han realizado generalizaciones para las expresiones cuadráticas estarán en posición de moverse en las secuencias hechas con esas expresiones, como en la cuadrícula de factores cuadráticos:

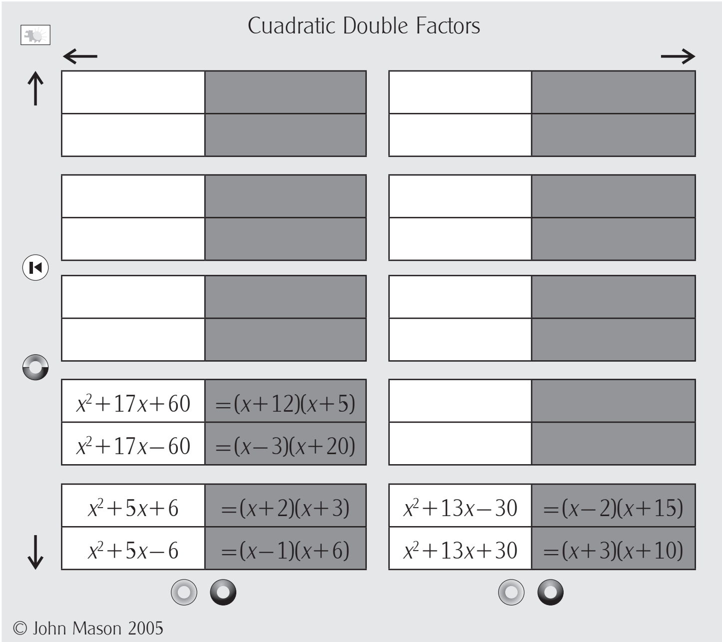


Quadratic Factors

x^2+4x+0	x^2+5x+4	x^2+6x+8	$x^2+7x+12$	$x^2+8x+16$
$x(x+4)$	$(x+1)(x+4)$	$(x+2)(x+4)$	$(x+3)(x+4)$	$(x+4)(x+4)$
x^2+3x+0	x^2+4x+3	x^2+5x+6	x^2+6x+9	$x^2+7x+12$
$x(x+3)$	$(x+1)(x+3)$	$(x+2)(x+3)$	$(x+3)(x+3)$	$(x+4)(x+3)$
x^2+2x+0	x^2+3x+2	x^2+4x+4	x^2+5x+6	x^2+6x+8
$x(x+2)$	$(x+1)(x+2)$	$(x+2)(x+2)$	$(x+3)(x+2)$	$(x+4)(x+2)$
x^2+1x+0	x^2+2x+1	x^2+3x+2	x^2+4x+3	x^2+5x+4
$x(x+1)$	$(x+1)(x+1)$	$(x+2)(x+1)$	$(x+3)(x+1)$	$(x+4)(x+1)$
x^2+0x+0	x^2+1x+0	x^2+2x+0	x^2+3x+0	x^2+4x+0
xx	$(x+1)x$	$(x+2)x$	$(x+3)x$	$(x+4)x$

Pares factorizables

Una de las cuadrículas va más allá de lo anterior, invita al usuario a localizar y expresar generalidades relativas a los factores de expresiones cuadráticas como $x^2 + 5x \pm 6$. Sólo se proporcionan dos columnas debido a la complejidad de las expresiones, pero es suficiente para desafiar a la mayoría de los aprendices en la escuela secundaria.



MODOS DE TRABAJO CON LAS CUADRÍCULAS DE VARIACIÓN ESTRUCTURADA (SVG)

Las cuadrículas no están planeadas para el uso de una sola persona. La tentación de hacer clic y revelar es ciertamente muy grande. Las cuadrículas están propuestas para el uso de toda la clase o para grupos de aprendices que trabajan bajo la disciplina de no-clic hasta que todos lo acuerden, y hay por lo menos una conjetura sobre lo que sucederá después del clic.

Un modo de trabajar es mostrar una gran cantidad de un cierto tipo de celdas y preguntar a los aprendices “qué ven”, o “¿puedes ver un ejemplo de...?”, donde el objeto de la búsqueda es una relación entre elementos visibles. El objetivo es promover el discernimiento de los detalles y las relaciones; escuchar lo que los otros disciernen para llegar a discernir por uno mismo esos aspectos. Pueden hacerse conjeturas sobre cómo siguen los patrones y esto puede comprobarse usando los botones para las flechas. Otro modo de trabajar es mostrar una secuencia de celdas o pares vinculados de celdas, quizás al principio en una línea horizontal o vertical, pero después en una diagonal o incluso, esporádicamente, preguntando las conjeturas de los aprendices sobre lo que se va a mostrar una vez que algunas celdas iniciales aparezcan. Los botones para las flechas y para reestablecer pueden utilizarse para colocar la ventana en un lugar inusual o desconocido. Por ejemplo, el objetivo podría ser deducir los contenidos de las celdas de las esquinas.

Una cuadrícula podría utilizarse por un periodo extendido de tiempo, pero podría también usarse efectivamente por un corto tiempo en varias ocasiones, o quizá con la ventana colocada en nuevas posiciones en cada ocasión. La meta sería adiestrar a los aprendices para detectar y expresar patrones, hacer conjeturas y probarlas, así como justificar a otros esas conjeturas. De esta manera, el trabajo con las cuadrículas no sólo apoya aspectos de la manipulación aritmética y algebraica, sino que también promueve el pensamiento matemático (Mason *et al,* 1982).

Las dos estrategias se aplican a cualquiera de las cuadrículas. Lo más importante es que se invita a los aprendices a pasar cierto tiempo en *ir a través del hilo,* es decir, a entender el sentido del hecho de que las mitades de cada celda, para el cálculo y el resultado, estén relacionadas. Sólo cuando los aprendices puedan expresar la relación general, habrán hecho un uso completo de la cuadrícula.

Hay muchas variaciones de las estrategias que pueden utilizar los maestros con los aprendices para que detecten y expresen los patrones de las relaciones y las consideren como propiedades de la cuadrícula. Por ejemplo, el maestro puede anunciar que tienen un número de fila en mente, pero que no lo van a decir, quizás ocultar un poco para denotar que "lo que estoy pensando acerca de" es, por ejemplo, "¿cuál es la entrada de la columna del lado derecho visible, en esa fila?" Quizás uno de los aprendices podría escoger un número de fila pero no decirnos cuál es. Lo mismo podría hacerse con las columnas. Algunas cuadrículas funcionan bien cuando se utilizan las diagonales para producir una secuencia.

Otra estrategia para solicitar generalización es mencionar que hay un amigo que necesita conocer la entrada de alguna celda, pero lo que aún no sabemos es cuál celda tiene en mente (quizá va estar en el teléfono más tarde). ¿Podríamos encontrar una manera de decirle cómo calcularla cuando sepa cuál celda necesita? Desarrollar la fluidez y la facilidad en expresiones de este tipo puede tomar varias semanas dependiendo de la edad y experiencia de los aprendices, pero ese tiempo es bien empleado, ya que es el fundamento de todo el trabajo futuro de la aritmética y el álgebra, no es sólo trabajar con las cuadrículas.

PRÁCTICA CON LAS CUADRÍCULAS

Como cualquier presentación novedosa de viejas ideas, las SVG se han aceptado con un entusiasmo considerable, pensando, por supuesto, sólo en los entusiastas que avanzaron más tomándolas en serio en sus salones de clase.

Un maestro usó una cuadrícula de multiplicación para introducir la tabla de multiplicación a los estudiantes de tercer grado, e informó un gran entusiasmo. Un profesor subrayó, después de intentar con las cuadrículas de factorización, que nunca volvería a enseñar la factorización del modo antiguo. Una clase de maestros novatos se propuso la tarea de intentar ellos mismos con varias cuadrículas. Entre ellos, varios indicaron que intentaron usarlas con los aprendices y que les parecieron extremadamente útiles. Algunos maestros han informado el surgimiento de una atmósfera positiva de competencia para predecir correctamente el contenido de una celda en particular. Muchos expresaron su apreciación de la manera como los aprendices hallaron la estructura matemática a través del uso de cuadrículas. Es más, la mayoría inventó cuadrículas posibles, algunas de las cuales eventualmente aparecerán en la Web, desde donde se las puede descargar (Mason *et al.*, 2005).

Una de las características de las cuadrículas es que los aprendices que trabajan a diferentes velocidades pueden encontrarlas desafiantes. Mientras que algunos están trabajando con los contenidos de celdas particulares, otros pueden estar generalizando por sí mismos. Éstos pueden ir más lejos y tratar de caracterizar las entradas que son posibles en cualquier parte de la cuadrícula, o dentro de una ventana situada en una posición particular.

Donde los maestros han invitado a los aprendices a llenar cuadrículas impresas, ha habido oportunidad para subrayar la diferencia entre ir con el hilo al trabajar a lo largo de una fila o ir hacia abajo llenando una columna, con entradas invariantes o con un cierto patrón. Por ejemplo, para copiar y completar una fila como

$$5(2 + 3)\ 5(2 + 4)\ 5(2 + 5)\ \ldots$$

puede ser atractivo y también eficiente hacer todo lo referente al 5 inicial y entonces todos los paréntesis, después los números 2, luego los signos de adición + y entonces la secuencia de los números 3, 4, 5, ..., o alguna variación de ella. La práctica de solicitar a los aprendices que copien y completen una tabla de valores en sus libros de ejercicio, es probablemente más que sólo pedirles que copien sin pensar. La noción de *ir a través del hilo* puede servir como un recordatorio para el maestro (y si el maestro es explícito acerca de esto, finalmente también lo será para los aprendices), para detenerse y hacer que los aprendices vayan a través del hilo, que entiendan el sentido de los patrones que han detectado y que los relacionen con la estructura matemática implícita. Potencialmente está disponible una realización más importante; nos referimos a que los aprendices podrían empezar a apreciar el valor de la excelente recomendación de George Polya: especializar, algunas veces sistemáticamente pero algunas veces esporádicamente (Polya, 1962); prestando atención a lo que sucede cuando trabajas en casos particulares, pues en éstos podría sugerirse una generalidad que puedes explotar expresando y después justificando (en Mason *et al*, 2005, esta estrategia se denomina como *mira lo que haces*).

CUADRÍCULAS DE VARIACIÓN ESTRUCTURADA COMO DISPOSITIVOS

Objetos físicos y virtuales son insuficientes por sí mismos para producir aprendizaje. Los bloques de Dienes, las barras de Cuisenaire, los bloques de bases múltiples, los abanicos de números, las balanzas, los cubos y los miles de otros dispositivos que se utilizan con los niños no constituyen en sí mismos una experiencia matemática. Es posible que un matemático o un educador matemático pueda interpretar acciones con los objetos, así como relaciones estructurales entre los objetos, entre objetos y acciones o entre acciones como ejemplificaciones de estructuras matemáticas, pero a menos que el aprendiz atienda a los objetos de una manera similar, es poco probable que logren otra cosa que un sentido de "qué haces con esos objetos". En Inglaterra, los inspectores escolares, especialmente del nivel secundario, y este impulso viene desde Platón (Hamilton y Cairns, 1961, pp. 353-384), que encomió a los egipcios por usar señales (signos) en la enseñanza inicial de los números. Pero hay poca evidencia de que el dispositivo por sí solo sea efectivo.

Jerome Bruner (1966) planteó lo anterior al sugerir tres modos de representación, los cuales considero como tres mundos de la experiencia: activo (conductual), icónico (con vínculos a lo emotivo) y simbólico (con vínculos al conocimiento). Para Bruner, un icono tiene la apariencia de lo que representa, como lo tiene un dibujo de una balanza o de algunos bloques que apoyan el acceso a experiencias cinestésicas previas al mecanismo en cuestión. Mis colegas y yo recomendamos un cambio gradual desde una instrucción directa y específica de los aprendices para practicar conductas específicas (primero tú... entonces tú... entonces...), con recordatorios cada vez menos explícitos, hasta que los aprendices estén pensando espontáneamente por sí mismos. Nombramos a este proceso como *directo-recordado-espontáneo*; una versión más sucinta fue recomendada por Bruner y sus colegas y fue descrito como andamiaje (Wood *et al*, 1976), el cual fue extendido a *andamiaje y disminución* (Brown *et al*, 1989). Después de un periodo de trabajo con el actual dispositivo, los materiales se colocan fuera del alcance y el trabajo cambia con dibujos y diagramas, quizá cada vez más gráficos. Finalmente, los instrumentos se desechan y lo gráfico se convierte paulatinamente en formalizado y simbólico. Se espera que el significado de los signos se haya desarrollado de modo que el aprendiz tenga vínculos entre las imágenes y lo físicamente ejecutado. Si al aprendiz le encantó, es posible que regrese a los instrumentos, ya sea mentalmente como imágenes y diagramas, o más físicamente. Pero el proceso educativo es independizar al aprendiz de los actuales instrumentos después del dibujo, de modo que los símbolos le hablen al aprendiz, total y sustancialmente.

Los mismos principios se aplican al uso de las cuadrículas. Ellas son simplemente imágenes en la pantalla con botones que se oprimen para que ocurran los cambios. Presionar muchas veces los botones para mostrar varias celdas es probable que resulte una pérdida de tiempo; a menos que se establezca el carácter distintivo; por ejemplo, los botones sólo se oprimen cuando se han planteado las conjeturas, y cuando se ha oprimido un botón, la conjetura se revisa, se modifica o se hace más explícita, según convenga.

INVESTIGACIÓN ULTERIOR

Me ha complacido coleccionar anécdotas sobre el impacto que las SVG han tenido en diferentes salones de clase. Sería muy útil considerarlas para una indagación metodológica de cómo las percepciones de los aprendices (y de los maestros) de matemáticas cambian con el uso de varias cuadrículas al cabo de un periodo de tiempo; también cómo se desarrolla su confianza y facilidad con los cálculos correspondientes. Las cuadrículas no reemplazan otras formas de abordar la aritmética y el álgebra, porque no proveen una justificación. Están pensadas, simplemente, para develar los patrones aritméticos, estimular una atmósfera para hacer conjeturas y el uso de las capacidades de los aprendices para captar el sentido de las matemáticas.

Sería algo desafortunado el que los investigadores trataran de encontrar la mejor manera de introducir o usar las SVG con aprendices de diferentes edades, porque podría no haber "mejores" maneras. En el mejor de los casos, las cuadrículas proporcionan una estructura a través de la cual los maestros pueden comprometer a los aprendices, pueden alentar a los estudiantes a usar sus capacidades naturales para imaginar y expresar, para particularizar y generalizar, plantear conjeturas o convencer, y pueden exponer a los aprendices a la estructura matemática y a una forma matemática de trabajar con situaciones fascinantes.

ORÍGENES HISTÓRICOS DE LAS CUADRÍCULAS DE VARIACIÓN ESTRUCTURADA

Hace varios años asistí a una lección dada por Laurinda Brown basada en el juego de la función (Banwell *et al*, 1972, véase también Rubenstein, 2002, para un resurgimiento reciente). La clase fue conducida en completo silencio, con gran efecto. Se invitó a los participantes a que hicieran conjeturas sobre el resultado de aplicar una función desconocida a diferentes datos, basadas en ejemplos proporcionados por ella desde el inicio. Todo se hizo en silencio, con caras tristes o felices conforme coincidía o no el encargado de la regla con la conjetura escrita en el pizarrón. La única regla era que a nadie se le permitía decir lo que pensaba acerca de en qué consistía la regla. A los que sabían "la regla" se les invitaba a dar ejemplos que ayudasen a otros a tener la misma conjetura y también a tratar de probar y desafiar su conjetura. Además del silencio, el formato tiene resonancias fuertes con el juego *Eleusis*, descrito por Martin Gardner (1977; 2001, pp. 504-512). Gardner observa que las reglas proveen una analogía con la indagación científica, porque la naturaleza nunca te dice si tu regla para hacer conjeturas es correcta.

Me motivaron a buscar la primera oportunidad para trabajar en silencio y esto se dio en una clase con 300 estudiantes de la Universidad Abierta, en la cual presenté los primeros términos de la secuencia

$$2+2=2\times 2 \quad 3+1\frac{1}{2}=3\times 1\frac{1}{2} \quad 4+1\frac{1}{3}=4\times 1\frac{1}{3} \quad 5+1\frac{1}{4}=5\times 1\frac{1}{4}.$$

Me detuve en cada signo igual, y también al final de cada ecuación, y exageré los movimientos al hacer los cálculos por mí mismo a fin de alentar a la audiencia a revisarlos también. Después escribí un 6, miré a la audiencia y dije "sé que saben qué es lo que sigue". Desde entonces lo he hecho con miles de personas por muchos años. Cada vez, no importa cuáles personas estén, todo mundo parece saber cuál sería el siguiente término, aun si tienen dificultades con la aritmética para revisar la validez de su conjetura. A menudo, ellos expresan "1 y algo" pero los detengo y digo "qué es lo que sigue inmediatamente", en el momento en que alguien se da cuenta de que es un "+", subrayo la importancia de poner atención a todos los detalles, y al hecho de que todos, matemáticos o no, saben que lo que sigue es un signo de más.

He usado muchas secuencias como éstas, haciendo que los participantes representen el primer término en el formato de los otros, regresando hacia los negativos (iniciando con 0, después -1, -2, ...), para usar no sólo los números enteros sino también los racionales (empezando con $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{4}$), los irracionales (empezando con $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{7}$), y así sucesivamente de acuerdo con la complejidad de la audiencia. El principal impulso es hacia la expresión de la ecuación general y después a la justificación de ésta usando álgebra. Las secuencias como ésta pueden utilizarse para producir en los aprendices el deseo de manejar generalidades (letras), así como para proporcionar una fuente de reglas apropiadas para esa manipulación: las reglas del álgebra como generalizaciones de las reglas de la aritmética. Esto contrasta con el álgebra presentada simplemente como reglas del "alfabeto aritmético".

En 1998, algunos maestros en Tunja, Colombia, me pidieron que sugiriera cómo trabajar la factorización de expresiones cuadráticas con los aprendices que no tienen facilidad para ello o, aún más, para creer que $(-1) \times (-1) = 1$. Mi respuesta fue lo que desde entonces he denominado las *sucesiones de Tunja* (Mason, 1999, 2001), en las cuales utilicé el mismo principio para desarrollar una secuencia de casos específicos de una expresión cuadrática factorizada como

$$1^2 - 1^2 = (1-1)(1+1) \quad 2^2 - 1 = (2-1)(2+1) \quad 3^2 - 1 = (3-1)(3+1) \ldots$$

Aquí podría esperarse que los aprendices detectaran el patrón y lo expresaran, en general, verbalmente e incluso algebraicamente. Al exponer a los aprendices a una cantidad de esas secuencias, derivadas de las expresiones cuadráticas factorizadas, podría esperarse que los aprendices se volvieran adeptos a expresar y justificar la generalidad (el corazón, la raíz y el propósito del álgebra). Una vez generalizados, los aprendices pueden aplicar las reglas al desarrollar las expresiones dentro de los paréntesis y la factorización de expresiones cuadráticas, simplemente por el uso de sus capacidades naturales para detectar lo que está cambiando y lo que es invariante.

Recientemente, cuando escribía un libro sobre la enseñanza del álgebra (Mason *et al*, 2005), quise extender las sucesiones de Tunja para hacer que variara un segundo parámetro, de ahí fue que surgieron las cuadrículas de variación estructurada.

AGRADECIMIENTOS

A Rina Zazkis por los comentarios que me envió de sus maestros novatos sobre una tarea asignada para explorar, usar y desarrollar la idea de cuadrícula, y a Tom Button por iniciarme en Flash.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Banwell, C.S., K. Saunders y D.S. Tahta (1986), *Starting Points for Teaching Mathematics in Middle and Secondary Schools,* ed. rev. del trabajo original publicado en 1972, Norfolk, Reino Unido, Tarquin Publications.

Brown S., A. Collins y P. Duguid (1989), "Situated Cognition and the Culture of Learning", *Educational Researcher,* vol. 18, núm. 1, pp. 32-41.

Bruner, J. (1966), *Towards a Theory of Instruction,* Cambridge, MA, Harvard University Press.

Gardner, M. (1977), "Mathematical Games", *Scientific American,* octubre, pp. 18-25.

——— (2001), *The Colossal Book of Mathematics,* Nueva York, Norton.

Gattegno, C. (1987), *The Science of Education Part I: Theoretical Considerations,* Nueva York, Educational Solutions.

Hamilton, E. y H. Cairns (eds.) (1961), *Plato: the collected dialogues including the letters,* (trad. de W. Guthrie), Bollingen Series LXXI, Princeton, Princeton University Press, pp. 353-384.

Hart, K. 1993, "Confidence in success", en I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F-L. Lin, (eds.), *Proceedings of Psychology of Mathematics Education,* PME *XVII,* vol. 1, University of Tsukuba, Tsukuba, pp. 17-31.

Marton, F. y S. Booth (1997), *Learning and Awareness,* Hillsdale, EUA, Lawrence Erlbaum.

Marton, F. (inédito), Sameness and Difference in Transfer.

Marton, F. y A. Tsui, (eds.) (2004), *Classroom Discourse and the Space for Learning,* Mahwah, NJ, Erlbaum.

Mason, J. (2001), "Tunja Sequences as Examples of Employing Students' Powers to Generalize", *Mathematics Teacher,* vol. 94, núm. 3, pp. 164-169. Publicado originalmente como: Mason, J. (1999), "Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja", *Revista EMA,* vol. 4, núm. 3, pp. 232-246.

———, *Structured Variation Grids* (website mcs.open.ac.uk/jhm3) (hasta mayo 2006).

——— (2003), "Structure of Attention in the Learning of Mathematics", en J. Novotná (ed.), *Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching,* Praga, Charles University, pp. 9-16; reeditado como Mason, J. (2003), "On The Structure of Attention in the Learning of Mathematics", *Australian Mathematics Teacher,* vol. 59, núm. 4, pp. 17-25.

Mason, J., L. Burton y K. Stacey (1982), *Thinking Mathematically,* Londres, Addison Wesley.

Mason, J., con S. Johnston-Wilder y A. Graham (2005), *Developing Thinking in Algebra,* Londres, Sage (Paul Chapman).

Polya, G. (1962), *Mathematical Discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving* (edición combinada), Nueva York, Wiley.

Rubenstein, R. (2002), "Building Explicit and Recursive Forms of Patterns with the Function Game", *Mathematics Teaching in the Middle School,* vol. 7, núm. 8, pp. 426-431.

Watson, A. (2000), 'Going across the grain: mathematical generalisation in a group of low attainers', *Nordisk Matematikk Didaktikk (Nordic Studies in Mathematics Education),* vol. 8, núm. 1, pp. 7-22.

Watson, A. y J. Mason (2005), *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples,* Mahwah, Erlbaum.

——— (2006), Seeing an Exercise as a Single Mathematical Object: Using Variation to Structure Sense-Making, *Mathematical Thinking and Learning,* vol. 8, núm. 2, pp. 91-111.

Wood, P., J. Bruner y G. Ross (1976), "The Role of Tutoring in Problem Solving", *Journal of Child Psychology and Psychiatry,* vol. 17, pp. 89-100.

DATOS DEL AUTOR

John Mason
Departamento de Matemáticas, Open University, y Departamento de Estudios Educativos, Universidad de Oxford, Reino Unido
j.h.mason@open.ac.uk