Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto

Vicenç Font

Resumen: En la primera parte de este trabajo se aplican las nociones teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática al análisis de un episodio de aula que se utiliza como contexto de reflexión. Dicho análisis muestra que, en muchas de las tareas propuestas a los alumnos, están presentes conjuntamente cuatro de los aspectos más característicos de la actividad matemática y del surgimiento de sus objetos: la dualidad particular/general, la representación, la metáfora y la contextualización/descontextualización. En la segunda parte, se argumenta que dichos instrumentos de conocimiento comparten un mismo aire de familia, en el sentido de que, de alguna manera, hacen intervenir la relación *A* es *B*.

Palabras clave: metáfora, representación, contexto, particularización, generalización.

Abstract: In the first part of this study we apply the theoretical notions of the onto-semiotic approach to mathematics knowledge to the analysis of a classroom situation. This analysis shows that many of the tasks set to students present four of the characteristic aspects of mathematical activity and of the emergence of mathematical objects: the duality of the particular and the general, representation, metaphor, and contextualization/decontextualization. In the second part we argue that these instruments of knowledge have a family-resemblance, in that, in some way, they involve the relation *A* is *B*.

Keywords: metaphor, representation, context, particularization, generalization.

INTRODUCCIÓN

Buena parte de las dificultades observadas en el aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con aspectos característicos de la actividad matemática como son: *1)* el hecho de que los objetos matemáticos se presentan siempre por medio

Fecha de recepción: 30 de octubre de 2006.

de sus representaciones o *2)* que en el razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general, es necesario pasar por lo particular. La importancia de estos aspectos ha sido observada por ilustres pensadores. Valga, a modo de ejemplo, la siguiente frase de Peirce:

> Pero para demostrar los teoremas, o, por lo menos, los teoremas principales, se requiere otro tipo de razonamiento. Aquí no basta con limitarse a términos generales. Hace falta sentar o imaginar algún esquema o diagrama particular y determinado: en geometría, alguna figura compuesta por líneas nombradas por letras; en álgebra alguna disposición de letras en la que se repiten una o varias. Este esquema se construye de tal modo que sea conforme con alguna hipótesis enunciada en términos generales en la tesis del teorema. El matemático se esfuerza por construir el esquema o diagrama de tal modo que, en cualquier situación posible, pueda admitirse la existencia de algo muy parecido y a lo cual puede aplicarse la descripción hipotética contenida en la tesis del teorema; y también se esfuerza por construirlo de tal modo que no contenga otras características que puedan influir en el razonamiento. Una de las cuestiones que tendremos que considerar es la siguiente: *¿cómo puede ser que aunque el razonamiento se basa en el estudio de un esquema particular resulte al mismo tiempo necesario, es decir, aplicable a todos los casos posibles?* (Peirce, "The Essence of Mathematics", *CP* 4, pp. 228-243).

Los dos aspectos acabados de comentar tienen una característica en común, que no es otra que el carácter subrogatorio o vicarial que podemos observar en ambos casos. Las representaciones están en lugar de los objetos y lo "particular" en lugar de lo "general" (o viceversa). En ambos casos podemos observar la existencia de un primer tipo de entidades que se utilizan para comprender un segundo tipo de entidades, a partir de las acciones que realizamos sobre las primeras (las cuales se consideran, al menos en algún aspecto, diferentes de las segundas). Esta característica de usar entidades "vicariales" o "subrogatorias" está presente, aunque no exactamente de la misma manera, en otros procesos que también son muy importantes en la actividad matemática. Nos referimos, además de la representación y de la dualidad particular/general, a los procesos metafóricos y a la contextualización, entre otros. Estos cuatro procesos, esenciales en la actividad matemática, de alguna manera hacen intervenir la relación *A* es *B*, y, por tanto, se pueden considerar como *instrumentos de conocimiento* que comparten un aire de familia (Wittgenstein, 1953).

Muchas de las dificultades observadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con el hecho de que los objetos matemáticos institucionales presentan una complejidad de naturaleza intrínsecamente matemática, la cual está íntimamente relacionada con esta "familia de instrumentos de conocimiento". Dicha complejidad se puede describir en términos "ontosemióticos". Es decir, en términos de las entidades intervinientes y de las relaciones que se establecen entre ellas. Por tanto, y de acuerdo con este punto de vista, consideramos que las herramientas teóricas elaboradas por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática permiten afrontar la complejidad que presenta la investigación sobre esta familia de instrumentos de conocimiento.

La estrecha relación entre estos cuatro instrumentos de conocimiento y su presencia conjunta se puede observar en muchas de las tareas propuestas a los alumnos. Por este motivo, consideramos conveniente presentar primero un episodio de clase en el que se puede observar su presencia conjunta (apartado 2). En el apartado 3 sintetizamos las herramientas básicas del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática, algunas de las cuales serán utilizadas en el apartado 4 para analizar el episodio de clase utilizado como contexto de reflexión. A continuación, en el apartado 5, se justifica que estos cuatro instrumentos de conocimiento comparten un aire de familia y, por último, en el apartado 6 se presentan algunas reflexiones finales.

UN EPISODIO DE CLASE COMO CONTEXTO DE REFLEXIÓN

A continuación se describe un episodio de clase (Font, Godino y D'Amore, 2007) que será utilizado como contexto de reflexión. Se trata de un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de bachillerato del sistema educativo español (17 años) como parte de un proceso de estudio de la derivada, y dos respuestas correctas de estudiantes al apartado *c*. En este episodio podemos observar la presencia de los cuatro aspectos sobre los cuales nos proponemos reflexionar (la dualidad particular/general, la representación, la metáfora y el contexto).

Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

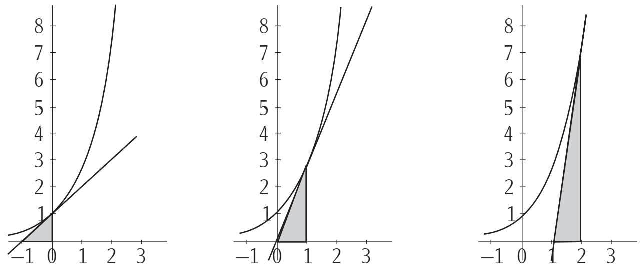

Figura 1

b) Calcula $f'(a)$

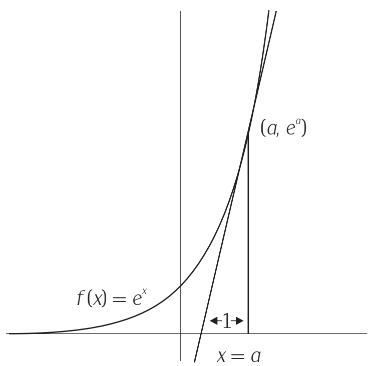

Figura 2

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$.

Respuestas al apartado c):

Víctor
La función derivada de $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$, porque la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en este punto.

La pendiente se consigue dividiendo $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, en esta función $x_2 - x_1$ siempre da 1, y al dividir el aumento vertical, que es e^x por el aumento horizontal que es 1, nos da e^x

Rocío

$$f'(x) = \frac{f(x)}{sub\tan gente};\text{ es } f(x) = e^x;\ f'(x) = \frac{e^x}{1} = e^x$$

Si observamos los tres apartados del cuestionario anterior (cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e*) podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general.

Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes (tienen una longitud igual a 1). Este software dinámico estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica (entendida como un camino)" (Font y Acevedo, 2003).

En el cuestionario, por una parte, podemos observar que hay representaciones que la literatura describe como externas (gráficas, expresiones simbólicas, etc.). Por otra parte, la diferencia entre las respuestas de los alumnos permite suponer la existencia de representaciones, consideradas normalmente como internas, que están relacionadas con las distintas respuestas de cada alumno.

En relación con el contexto, se observa que se trata de una tarea que suele recibir diferentes tipos de calificativos: "situación intramatemática", "situación de contexto matemático", "situación descontextualizada", etc. Por otra parte, el episodio que se describe forma parte de una larga secuencia de actividades que comienza con la "emergencia" del objeto "función exponencial" a partir del estudio de diferentes situaciones de contexto extramatemático (desintegración de una sustancia radioactiva, etcétera).

EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

En esta sección sintetizaremos las herramientas básicas del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005; Font y Ramos, 2005; Font y Godino, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhelmi, 2006; Ramos y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y D'Amore, 2007). A partir de ahora utilizaremos el acrónimo EOS para referirnos a dicho enfoque.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto y significado (personal e institucional), a fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido y, por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

Sistemas de prácticas operativas y discursivas asociadas a tipos de problemas

En el enfoque ontosemiótico se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Las prácticas pueden ser idiosincráticas de una persona o bien ser compartidas en una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Tipos de significados institucionales

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la figura 3. En relación con los significados institucionales se proponen los siguientes tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.

- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta, este significado de referencia será una parte del significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Tipos de significados personales

Respecto de los significados personales se proponen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluidas tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales, que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

En la parte central de la figura 3 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Asimismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

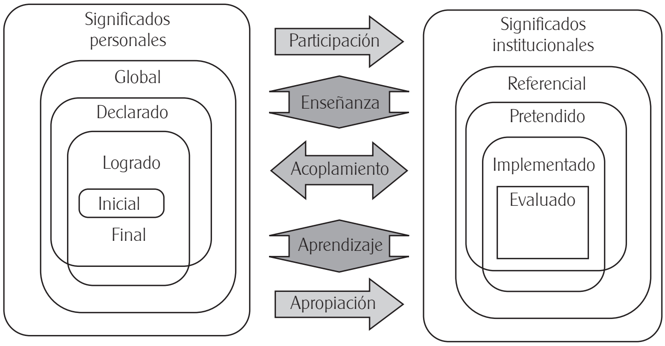

Figura 3 Tipos de significados institucionales y personales

Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas surgen nuevos objetos que provienen de ellas y dan cuenta de su organización y estructura.[1] Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales",[2] mientras que, si tales sistemas corresponden a una persona, los consideramos como "objetos personales".[3] La noción de emergencia se puede relacionar, desde el punto de vista de los objetos personales, con los procesos cognitivos que Sfard (1991) describe como interiorización, condensación y reificación, mientras que, desde el plano institucional, se relaciona con los procesos de comunicación, simbolización y regulación. La emergencia de los objetos también está relacionada con la metáfora ontológica (Lakoff y Núñez, 2000), que lleva a considerar acontecimientos, actividades, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.). Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

[1] "El discurso matemático y sus objetos son mutuamente constitutivos" (Sfard, 2000, p. 47).

[2] Esta formulación de los objetos institucionales concuerda con el modo de concebir los "objetos conceptuales culturales" en la semiótica cultural (Radford, 2006): "Los objetos matemáticos son formas conceptuales de actividad reflexiva mediada histórica, social y culturalmente encarnada" (p. 57).

[3] Los "objetos personales" incluyen los constructos cognitivos tales como concepciones, esquemas, representaciones internas, etcétera.

- *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual...)
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extramatemáticas, ejercicios...)
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función...)
- *Proposiciones* (*enunciados* sobre conceptos...)
- *Procedimientos* (*algoritmos,* operaciones, técnicas de cálculo...)
- *Argumentos* (*enunciados* usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo...)

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta, sino que es relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido de cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etcétera).

Configuraciones de objetos

Los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos están relacionados entre sí formando *configuraciones* (figura 4), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre ellos. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. La constitución de estos objetos y relaciones (configuraciones), tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos.

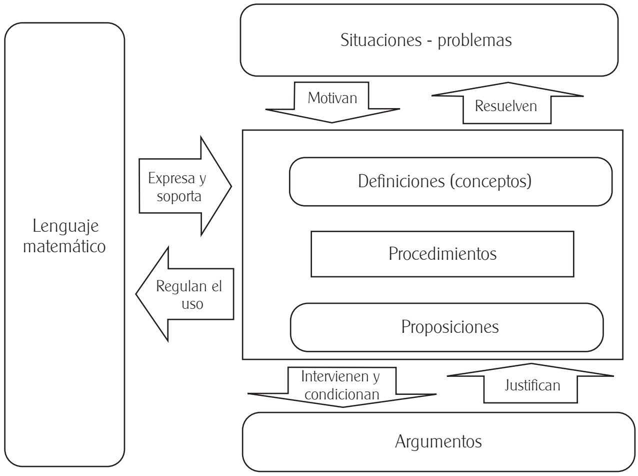

Figura 4 Componentes y relaciones en una configuración epistémica

Facetas duales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de éstas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona, se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática.
- *Ostensivo - no ostensivo*. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mis-

mos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos...).

- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica (Eco, 1995). La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.
- *Extensivo – intensivo (ejemplar – tipo)*. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = x^2 + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = ax^2 + bx + c$). La dualidad extensivo/intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005).
- *Unitario – sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias, mientras que en otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

Las facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos a través de los siguientes *procesos cognitivos/epistémicos:* institucionalización/ personalización; generalización/particularización; descomposición/reificación; materialización/idealización; representación/significación.

Procesos matemáticos

En la figura 5 representamos algunos de los constructos que se han explicado de manera concisa. La actividad matemática tiene un papel central y es modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas surgen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de éstas, según el juego de lenguaje en el que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales. Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos de la figura 5.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso", ya que hay muchas clases diferentes de procesos, se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor "tiempo" y, en menor medida, el de "secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente". Por tanto, en el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los de la figura 5), sin pretender incluir en ella todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera todos los más importantes, entre otros motivos, porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelación) más que procesos son hiper o megaprocesos:

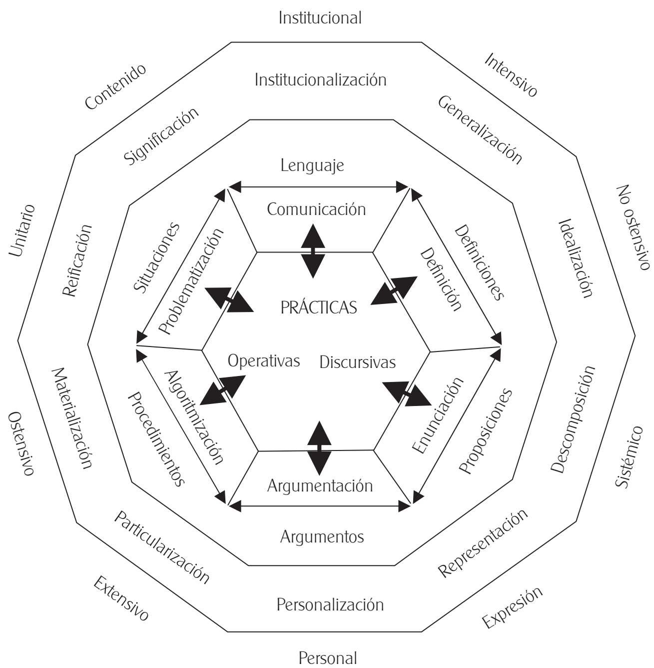

Figura 5 Modelo ontosemiótico de los objetos y procesos matemáticos

Comprensión

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Font, 2001; Godino, Batanero y Font, 2007). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la didáctica de las matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas), lo cual implica concebirla también como "conocimento y aplicación de las normas" que regulan la práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales ocurren aquéllas.

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Esta manera de entender la comprensión resulta especialmente útil para hacer análisis "microscópicos" de textos matemáticos como el que se realiza en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005).

Idoneidad didáctica

Las nociones teóricas anteriores se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

- Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

- Idoneidad cognitiva, expresa el grado en el que los significados pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza/aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar las dificultades potenciales de los alumnos (que se puedan detectar *a priori*), y por otra parte permiten resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza/aprendizaje.
- Idoneidad emocional, grado de implicación (interés, motivación...) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica, grado en el que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

La idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza/aprendizaje.

ANÁLISIS DEL EPISODIO

Comenzaremos el análisis del cuestionario del apartado 2, dirigiendo nuestra atención hacia las representaciones activadas en su resolución.

REPRESENTACIONES

En los diferentes programas de investigación en didáctica de las matemáticas podemos encontrar, entre otros, dos usos del término representación. Por una parte, se usa este término para describir la cognición de las personas, en cuyo caso suele ir acompañado del término "mental" o "interna". Por otra parte, es normal utilizar el término representación para referirnos a los sistemas de signos públicos (ostensivos) que son las herramientas indispensables para la actividad matemática. Cuando el término "representación" se utiliza con este objetivo suele ir acompañado del término "externa".

En el caso descrito en el apartado "Un episodio de clase como contexto de reflexión" (p. 97), es evidente que, por una parte, hay representaciones que la literatura describe como externas (gráficas, expresiones simbólicas, etc.). Por otra parte, la diferencia entre las respuestas de los alumnos permite suponer la existencia de representaciones, consideradas normalmente como internas, que están relacionadas con las distintas respuestas de cada alumno.

Esta primera clasificación en representaciones mentales o internas y representaciones externas no es en absoluto una clasificación transparente. Por ejemplo, Kaput, en relación con esta clasificación, se pregunta "¿Qué es una representación mental? ¿Qué se quiere decir cuando afirmamos que 'representa' a algo? ¿Para quién? ¿Cómo? ¿Cuál es la diferencia entre la experiencia de una representación interna y la correspondiente a una representación externa? ¿Una representación externa es un sistema constituido social o personalmente?" (Kaput, 1998, p. 267).

En el EOS la clasificación interna/externa, además de problemática, se considera poco operativa y, por ello, se propone reconvertirla en dos dualidades o atributos contextuales que, en nuestra opinión, son más útiles. Nos referimos a las dualidades ostensivo/no ostensivo y personal/institucional. Consideramos que la dualidad interno/externo no da cuenta de la dimensión institucional del conocimiento matemático, confundiendo en cierto modo dichos objetos con los recursos ostensivos que sirven de soporte para la creación o emergencia de las entidades institucionales. Esto tiene consecuencias graves para entender los procesos de aprendizaje, ya que no se modela adecuadamente el papel de la actividad humana y la interacción social en la producción del conocimiento matemático y en el aprendizaje.

El análisis de las respuestas de los alumnos al apartado *c* del cuestionario de la sección 2, permite suponer diferencias relevantes entre los procesos mentales que "ocurrieron" en la mente de cada uno de ellos. Ahora bien, consideramos fundamental, antes de reflexionar sobre sus procesos mentales, tener en cuenta primero la dualidad personal/institucional. No basta con reflexionar sobre los procesos cognitivos que han permitido a estos alumnos responder a las preguntas del cuestionario, realizando una conversión desde una representación gráfica a una representación simbólica, cuando todavía no sabían cuál era la función derivada de la función exponencial de base *e*. Hay que tener en cuenta, sobre todo, el proceso de instrucción que han seguido dichos alumnos si deseamos aportar una explicación de los aprendizajes logrados.

El análisis de las respuestas, si bien detecta diferencias importantes entre ellas, permite observar que los alumnos aplican el mismo tipo de práctica para calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$. La técnica que utilizan consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1), lo que permite calcular su pendiente. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera.

Para contestar este cuestionario, además de utilizar la gráfica de la función, se ha de utilizar que la expresión simbólica de la gráfica es $f(x) = e^x$. Por tanto, esta técnica relaciona los siguientes ostensivos:

Gráfica de $f(x)$ y Expresión simbólica de $f(x) \Rightarrow$ Expresión simbólica de $f'(x)$

Con este esquema, simbolizamos que el punto de partida de las acciones de los alumnos para hallar una condición que cumplen todas las tangentes es la gráfica de la función. La expresión simbólica de $f(x)$ es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de $f'(x)$. Si los alumnos han practicado el cálculo de la pendiente de una recta y el significado geométrico de la derivada en un punto, pueden llegar a obtener la expresión simbólica de $f'(x)$ sin mucha dificultad.

Al decidir incluir el cuestionario 2 en el proceso de instrucción, se está optando por incorporar al significado pretendido prácticas que forman parte de la evolución epistemológica del objeto derivada (significado de referencia) y que, normalmente, no suelen formar parte del significado pretendido para el objeto derivada. Se trata, pues, de proponer a los alumnos una secuencia de actividades que está a mitad de camino entre el problema de la tangente y su inverso –no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de la función–. Realizar la construcción con computadora facilita las acciones de los alumnos sobre dicha construcción y les permite encontrar una condición que cumplen todas las tangentes (utilizando el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, o bien otro semejante). Construcciones de este tipo permiten que los alumnos calculen funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites, siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto. Se trata de un método, sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow.

Este método tiene un campo de aplicación limitado ya que, previamente, el alumno ha de descubrir una propiedad que cumplen todas las rectas tangentes. Ahora bien, se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta, y también a las funciones exponenciales y logarítmicas. El hecho de que se pueda aplicar este método para calcular la derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas permite una organización de la unidad didáctica sobre derivadas que tiene importantes consecuencias curriculares (por ejemplo, permite prescindir del estudio de la indeterminación 1^∞).

Contexto

El camino seguido hasta el momento ha sido el siguiente: primero se ha comenzado analizando las representaciones presentes en el cuestionario 2, después se ha visto que el uso conjunto de las expresiones simbólicas y de las representaciones gráficas hace viable una determinada técnica para el cálculo de la función derivada de la función $f(x) = e^x$ y, finalmente, hemos visto cómo esta técnica puede vivir en un entorno en el que no es necesario que "viva" la indeterminación 1^∞. Esta última consideración pone en primer plano la perspectiva ecológica del "contexto".

En relación con el término contexto, hay básicamente dos usos (Ramos y Font, 2006); uno consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, mientras que el otro consiste en enmarcarlo en el entorno. En el primer caso, se trata de ver que la situación problema cae dentro del campo de aplicación de un objeto matemático. En el segundo caso, se trata de un "uso" que vamos a llamar, metafóricamente, "ecológico".

El uso del contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático se observa claramente en los procesos de instrucción en los que se proponen situaciones-problema extra matemáticas, pensadas para la emergencia de nuevos objetos matemáticos. En los procesos de descontextualización a partir de contextos extra matemáticos se sigue el siguiente proceso: se parte de una situación de contexto extra matemático *S*, que podemos poner en relación (*R*) con la situación *S´*, la cual, a su vez, se considera como un caso particular del objeto matemático *OM* (*S´* es *OM*). La relación *R*, que permite relacionar *S* con *S´*, puede ser de muchos tipos diferentes, ahora bien, en todos los casos se suele terminar considerando *R* como una relación de representación, entendida ésta en términos de instrumento de conocimiento (*S´* es una representación de *S*). El contexto, entendido como un ejemplo particular de un objeto matemático, está presente en el episodio que se describe, ya que éste forma parte de una larga secuencia de actividades que comienza con la "emergencia" del objeto "función exponencial" a partir del estudio de diferentes situaciones de contexto extra matemático (desintegración de una sustancia radioactiva, etc.). Se trata de problemas como el que sigue a continuación:

1. En un laboratorio se trabaja con un tipo de levadura que tiene un ritmo de reproducción muy especial: cada día su masa es igual al doble de la del día anterior. Nos disponemos a comprobar esta propiedad; supongamos que en el momento de iniciar la observación hay 1 g de esta levadura.
   a) ¿Cuántos gramos de levadura tendremos un día después? ¿Y el segundo día? ¿Y el tercero? ¿Y al cabo de una semana?
   b) Elabora una tabla ordenada que relacione el tiempo para los cuatro primeros días y la masa de la levadura en gramos.
   c) ¿Qué masa había un día antes de iniciar la observación? ¿Y dos días antes?
   d) Completa la tabla del apartado *b* con los valores correspondientes a los dos días anteriores al inicio de la observación. Para ello, considera estos días como negativos.
   e) Representa gráficamente esta relación entre el tiempo y la masa.
   f) Halla la fórmula que permita calcular los gramos de levadura a partir del número de días que han pasado.

El uso ecológico del término "contexto" queda claro cuando se dice, por ejemplo, que el contexto del gorila es la selva. Ahora bien, puesto que el contexto del gorila también puede ser el zoológico, podemos entender que hay un uso ecológico del término contexto que permite situar el objeto matemático en diferentes "lugares", por ejemplo, diferentes instituciones (universidad, secundaria, etc.). Estos "lugares" no tienen por qué ser sólo instituciones, pueden ser también, por ejemplo, diferentes programas de investigación o diferentes "juegos del lenguaje".

El constructo "configuración epistémica" propuesta por el EOS es una herramienta que permite visualizar la vertiente ecológica del término "contexto" (Font y Godino, 2006; Ramos y Font, 2006). El cuestionario del apartado 2 hay que pensarlo formando parte de una configuración epistémica que el profesor pretendió implementar. Algunos elementos de dicha configuración epistémica se pueden describir brevemente mediante el siguiente esquema:

Cuadro 1 Configuración epistémica "emergente" para el cálculo de la derivada de $f(x) = e^x$

Lenguaje	
Verbal • Función, derivada *Gráfico* • Gráfica de la función con la recta tangente en un punto *Simbólico*: $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(a)$, $x = a$, (a, e^a), $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$	
Situaciones	**Conceptos**
• El cuestionario 2 es un problema descontextualizado cuyo objetivo es el cálculo de la derivada de la función exponencial de base e.	*Previos* • Gráfica de una función, coordenadas de un punto, abscisa, ordenada, imagen, función exponencial, derivada en un punto, función derivada, tangente, subtangente, punto de tangencia, pendiente, etcétera. *Emergentes* • Derivada de la función exponencial de base e.
Procedimientos	**Proposiciones**
Previos • Cálculo de la pendiente. *Emergente* 1) Hallar una condición que cumplan todas las rectas tangentes, 2) Simbolizar dicha condición y 3) Hallar $f'(x)$ a partir de la condición anterior	*Previas* • La segunda coordenada del punto de tangencia se obtiene sustituyendo x por a en la fórmula de la función. *Emergente* • Todas las subtangentes de la función exponencial de base e valen 1.

Cuadro 1 (*conclusión*)

Argumentos
Tesis: La función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$. Demostración deductiva en la que se usan los siguientes argumentos: Argumento 1: Justificación visual de la propiedad "Todas las subtangentes de la función exponencial de base e valen 1". • Argumento 2: (a, e^a) es el punto de tangencia. • Argumento 3: la pendiente de la recta tangente es e^a. • Argumento 4: la derivada $f'(a)$ es e^a porque la derivada es la pendiente de la recta tangente. • Argumento 5: lo que se ha dicho para el punto (a, e^a) es válido para cualquier otro punto.

Esta configuración epistémica visualiza cómo la situación problema del cuestionario del apartado 2 es la punta de un iceberg en el que, además de los diferentes tipos de representaciones (primer aspecto considerado) y el procedimiento de cálculo seguido (segundo aspecto), aparecen otros objetos matemáticos. Dicho de otra manera, el cuestionario 2 sitúa el objeto derivada de la función $f(x) = e^x$ en un determinado contexto, entendido como entorno, en el que, por ejemplo, no es necesaria la definición de función derivada como límite de las tasas de variación media.

A continuación, vamos a tener en cuenta otros factores que hacen el cuadro más complejo. Entre otros, la dualidad particular/general o las metáforas utilizadas en el discurso del profesor y en el de los alumnos.

PARTICULAR/GENERAL

Una de las características cruciales de la actividad matemática es el uso de elementos genéricos. El razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general hace intervenir una fase intermedia que consiste en la contemplación de un objeto individual. Este hecho plantea un grave dilema: si el razonamiento se ha de aplicar a un objeto concreto, es preciso que se tenga alguna garantía de que se razona sobre un objeto cualquiera para que quepa justificar la generalización en la que termina el razonamiento. Además, puesto que el objeto concreto va asociado a su representación, aparece el problema de si la representación es de un elemento concreto o bien del concepto general.

La introducción de la dualidad extensivo/intensivo en el EOS puede ayudar a esclarecer el problema del uso de elementos genéricos. En relación con este problema hay que considerar tres cuestiones conexas pero distintas, a saber:

1. ¿Por qué se hace intervenir en la demostración de una proposición matemática (el enunciado de una definición, etc.), una fase intermedia que se refiere a un objeto particular?
2. ¿Cómo es posible que un razonamiento en que intervenga semejante fase intermedia pueda, pese a ello, dar lugar a una conclusión universal?
3. El elemento particular normalmente forma parte de una cadena en la que los eslabones anteriores son elementos genéricos. A su vez, el elemento particular, al ser considerado como genérico, se convertirá en el eslabón previo de un nuevo caso particular, y así sucesivamente.

La faceta extensivo/intensivo resulta un instrumento esencial para analizar la complejidad asociada a estos tres aspectos. Dicho de otra manera, el uso del elemento genérico lleva asociada una compleja trama de funciones semióticas (y por tanto, de representaciones) que relacionan intensivos con extensivos. Mostraremos esto con el análisis del episodio que estamos considerando.

Si observamos los tres apartados del cuestionario, podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general. En el apartado *a* se pide calcular la derivada para tres valores concretos (0, 1 y 2). En el apartado *b* se pide calcular la derivada para un valor concreto "*a*" y en el apartado *c* para un valor cualquiera. Es decir, el tránsito de lo extensivo a lo intensivo ha estado muy presente en el diseño del cuestionario. En este proceso, podemos considerar que los objetos extensivos "representan" a los intensivos.

Si consideramos la técnica de cálculo de la derivada que se ha de aplicar en el cuestionario, y sin entrar en un análisis detallado como los que se realizan en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005), se puede considerar *a priori* la siguiente trama de funciones semióticas.

Para calcular la función derivada a partir de una condición que cumplen todas las tangentes, el alumno ha de:

1. Tratar separadamente las variables relacionadas por la fórmula y la gráfica de la función exponencial de base *e*. Para ello, ha de entender el objeto función exponencial de base *e* como un proceso en el que intervienen otros objetos, uno de los cuales es x y el otro es f(x). Aquí se establece una función semiótica que relaciona el objeto f(x) con el objeto x.
2. Asociar a x la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x. Esta relación se puede considerar una función semiótica que relaciona el objeto x con el objeto "pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x".

3. Asociar la expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x con $f'(x)$. En este caso tenemos una función semiótica que relaciona una notación con otra diferente pero equivalente.
4. Considerar x como una variable. En este caso tenemos una función semiótica que relaciona un objeto con una clase a la cual pertenece.
5. Entender la función que ha obtenido como un caso particular de la clase "función derivada". En este caso tenemos una función semiótica que relaciona un objeto con la clase a la cual pertenece.

Si nos fijamos en el cuestionario que se ha presentado a los alumnos podemos observar que la secuencia de apartados tiene por objetivo facilitar el establecimiento de estas funciones semióticas. El uso de la letra *a* y de la igualdad $x = a$ en el apartado *b* del cuestionario tiene la función de introducir un elemento concreto en el razonamiento del alumno y facilitar el paso 1. La opción de utilizar conjuntamente la gráfica y la fórmula y el uso de la notación simbólica para el punto de coordenadas (a, e^a) tiene por objetivo que el alumno realice los pasos 2 y 3. Los pasos 4 y 5 se pretenden conseguir a partir de la pregunta del apartado *c*.

Este ejemplo permite ilustrar un fenómeno que consideramos muy relevante: *el alumno, para la realización de la mayoría de las prácticas matemáticas, ha de activar una trama compleja de funciones semióticas y los ostensivos utilizados son determinantes, tanto para reducir o aumentar la complejidad de esta trama, como para la realización efectiva de la práctica*. Por ejemplo, si en el cuestionario que estamos considerando se hubiera eliminado el apartado *b*, seguiríamos pretendiendo que el alumno aplicara la técnica de cálculo de la función derivada que estamos comentando y continuaríamos utilizando gráficos (los de la actividad previa con la computadora y los del apartado *a*) y expresiones simbólicas (apartado *c*), pero la complejidad de la trama de funciones semióticas que tendría que hacer el alumno aumentaría notablemente y, con ello, las posibilidades efectivas de resolver la tarea.

Si bien el análisis semiótico que acabamos de realizar es *a priori* y sirve para detectar conflictos semióticos hipotéticos, queremos destacar que las funciones semióticas que hemos utilizado en su descripción detallada no se pueden desligar de la reflexión que hemos hecho sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y de la observación de episodios de aula en los que se fijan sus reglas de uso. Hay que resaltar, pues, que, para justificar que la comprensión se puede describir mediante una trama de funciones semióticas, hemos de recurrir a entender también la comprensión como el uso competente que se deriva del conocimiento y aplicación de normas. Por tanto, otro factor, tanto o más importante que el tipo de representación utilizado, que interviene de manera determinante en la complejidad de las tramas de funciones semióticas asociadas al uso de elementos genéricos, son las reglas del juego de lenguaje en el que nos situamos. Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos un ostensivo como un elemento genérico, estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se entiende que nos interesan sus características generales y prescindimos de los aspectos particulares.

Para conocer los detalles sobre las características de este juego del lenguaje, y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre profesores y alumnos relacionados con el uso de elementos genéricos, como por ejemplo el que sigue a continuación (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005, p. 179):

> Después de que el profesor hubiera introducido en clases anteriores la derivada en un punto como $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ y justo después de haber introducido la función derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se produjo el siguiente diálogo:
>
> *Alumna* (Laura): ¿Qué diferencia hay entre la definición de función derivada y la definición de derivada en un punto?
>
> *Profesor*: La derivada en un punto es $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, en esta expresión la *a* es fija, no varía, lo que varía es la *h*. En cambio, en el caso de la función derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, primero has de suponer que la x no varía y que sólo varía la *h* para obtener $f'(x)$, y después has de suponer que la x varía. Por tanto, cuando calculas la derivada en un punto, el resultado es un número, mientras que cuando calculas la función derivada, el resultado es una fórmula de una función.

La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para conformar la trama de funciones semióticas asociadas a las prácticas en las que interviene el elemento genérico.

Metáforas

Los alumnos, antes de contestar el cuestionario, habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes (tienen una longitud igual a 1). La emergencia de esta propiedad es el resultado de una abstracción diferente a la empírica, a saber, de una abstracción "reflexiva" (en términos de Piaget). Se trata de un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados. Este tipo de abstracción produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y "existencia" a partir de ella. Hay que destacar que se llega a una generalización intensiva (lo que no varía) a partir de: *1)* ignorar aspectos de lo concreto (lo que varía) y *2)* de considerar que lo que es válido para un objeto (variable en este caso, puesto que estamos trabajando con un programa dinámico) es válido para todos, es decir se razona con elementos genéricos (dinámicos en este caso). Ahora bien, el uso de este software dinámico, además de permitir la generalización que se pretende, produce otros efectos; uno de los más importantes es que estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino (la gráfica)" (Font y Acevedo, 2003). Véase cuadro 2.

Por otra parte, en el apartado *b* del cuestionario se ha de poner en funcionamiento una metáfora conceptual sobre las gráficas de tipo conjuntista; nos referimos a la metáfora conceptual: "La gráfica de una función es el conjunto de pares ordenados $(a, f(a))$". Véase cuadro 3.

Esta metáfora conceptual de tipo *linking,*[4] que sirve para conectar la teoría de conjuntos con las gráficas de funciones, se superpone sobre una metáfora de

[4] Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas conceptuales: *1)* "Conectadas a tierra" (*grounding*). Son las que relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas. Por ejemplo: "Las clases son contenedores", "los puntos son objetos", "una función es una máquina", etc. Estas metáforas sirven para organizar un dominio de llegada matemático (por ejemplo las clases) a partir de lo que sabemos sobre un dominio de partida que está fuera de ellas (lo que sabemos sobre los contenedores), y *2)* De enlace (*linking*): Tienen su dominio de partida y de llegada en las propias matemáticas. Por

Cuadro 2 "La gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino"

Dominio de partida Camino	Dominio de llegada Gráficas de funciones
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen de la gráfica (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo, más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Cuadro 3 "La gráfica de una función es el conjunto de pares (a, $f(a)$)"

Dominio de partida Conjuntos	Dominio de llegada Gráficas de funciones
Conjunto de pares (a, $f(a)$)	Gráfica de la función
Miembros del conjunto	Puntos de la gráfica
La relación de pertenencia	Ser un punto de la gráfica
Un subconjunto de un conjunto más grande	Dominio, rango, puntos de corte, máximos mínimos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento o decrecimiento, etcétera

tipo *grounding* que tiene como dominio de salida los esquemas de imágenes "parte/todo" y "contendor" y como dominio de llegada las curvas. Dicha metáfora de tipo *grounding* se puede observar en los trabajos de Leibniz y es claramente rechazada por Newton cuando dice:

> No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que éstas sean, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas no son descritas y engendradas por la yuxtaposición de sus partes,

ejemplo, "los números reales son los puntos de una recta", las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc. Las metáforas de enlace proyectan un campo de conocimientos matemáticos sobre otro distinto.

> sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de las líneas; los sólidos por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de los lados; los tiempos por un flujo continuo. Considerando, pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según que lo hagan con mayor o menor velocidad, busqué un método para determinar las magnitudes partiendo de las velocidades de los movimientos o aumentos que las engendran. Llamando fluxiones a las magnitudes engendradas, di, hacia los años 1665-1666, con el método de fluxiones, del que haré uso en la cuadratura de curvas. (extraído de Lacasta y Pascual, 1998, pp. 28-29).

En este párrafo, Newton se posiciona a favor de las metáforas dinámicas y en contra de las estáticas (formadas por partes). Hay que tener en cuenta que Leibnitz, a diferencia de Newton, considera la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve. Para Newton, las gráficas de funciones eran consideradas no como un agregado estático de infinitesimales, sino como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se puede expresar mediante una fórmula (generalmente en forma implícita). Esta manera de entender las gráficas de funciones es muy evidente en la obra de Newton, en la cual podemos hallar constantes referencias a un punto que se mueve sobre una parábola, una hipérbola, etc. Además de considerar que la grafica se puede interpretar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica, considera que el punto que genera la gráfica viene determinado por dos segmentos (abscisa y ordenada), cada uno de los cuales es generado por un punto que se mueve en función del tiempo.

Por otra parte, como ya hemos comentado anteriormente, actualmente hay programas informáticos, fácilmente utilizables en el aula, que facilitan, aunque sea de manera inconsciente, este tipo de metáforas dinámicas. Pero no sólo los programas informáticos facilitan estructurar las gráficas como trazas de puntos, la misma manera de hablar, el discurso que se realiza sobre las gráficas, puede llevar a entender las gráficas de funciones de esta manera (Font y Avecedo, 2003; Bolite, Acevedo y Font, 2005). En muchos casos, el discurso metafórico del profesor puede inducir al alumno a entender el punto de una gráfica como un punto determinado sobre un camino que se recorre o una línea por la cual se transita. Frases como “antes de”, “después de” pueden producir este efecto en el alumno. En dicha metáfora, se sugiere una organización espacial, se tiene un origen (“de”), un camino (“pasa por”, “aquí”, “a lo largo”), y un fin (“a”, “hasta”) y además se contempla algo que se mueve (punto, objeto, etc.) y que se puede localizar en un momento dado.

El uso de las metáforas dinámicas tiene sus ventajas, pero también sus inconvenientes, como se muestra en la investigación explicada en Font (2000). En dicha investigación se describe una situación de enseñanza/aprendizaje en la que alumnos de 17 años utilizan software dinámico con el objetivo de ayudarles a entender que la recta tangente es la recta a la cual se aproximan las rectas secantes. En este contexto (Font, 2000, p. 122) se observó que el hecho de que el profesor utilizara de manera inconsciente un discurso dinámico producía la siguiente dificultad en los alumnos:

> (...) observamos que había alumnos que, cuando movían el punto A, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto A y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho, es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación.

Este fenómeno también está documentado en otras investigaciones, por ejemplo en Bolite Frant *et al*. (2004).

UNA FAMILIA DE INSTRUMENTOS DE CONOCIMIENTO QUE COMPARTEN UN AIRE DE FAMILIA

En el apartado anterior hemos observado y analizado la presencia conjunta de los procesos de representación, metafóricos y los de particularización/generalización (en los que englobamos los procesos de contextualización). A continuación expondremos primero que esta relación se puede entender en términos de "aire de familia" puesto que, de alguna manera, dichos procesos hacen intervenir la relación *A* es *B*. Después utilizaremos las facetas duales del EOS para explicar cómo se relacionan los miembros de dicha familia, utilizando como contexto de reflexión una de las metáforas más fructíferas en la historia de las matemáticas: la interpretación de las curvas del plano como conjunto de puntos que son solución de una ecuación.

Si consideramos la estructura *A* es *B* como una línea difusa (figura 5), en un extremo podemos situar claramente la relación de subcategorización (particular/general) y en el otro extremo la metáfora. La representación, entendida como instrumento de conocimiento, se sitúa en una posición intermedia:

- Particular/general (subcategorización)
- El elemento *A* cumple las condiciones que cumplen todos los elementos de *B*. (Podemos conocer *A* a partir de conocer *B* y viceversa)
- Representación
- "*Aplicación de la teoría o las ideas de un sistema* B *en otro sistema* A, *para poder utilizar el aparato teórico o conceptual de* B *como instrumento de análisis de* A." (Ibarra, 2000, p. 25)
- Metáfora (p.e., la gráfica es la traza de un punto que se mueve sobre un camino)
- Estructuramos el campo de conocimientos *A* (gráfica) en términos de la estructura que tiene *B* (experiencias sobre el movimiento). (Conocemos *A* en términos de *B*):

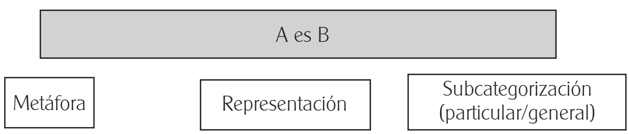

Figura 6

En el EOS, una de las maneras de estudiar la relación entre los procesos que presentan este aire de familia consiste en situar el proceso que nos interesa (en este caso los procesos metafóricos) en el centro de la figura 5 para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y los procesos relacionados con las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales (institucionalización/personalización; generalización/particularización; descomposición/reificación; materialización/idealización; representación/significación). A continuación aplicaremos a los procesos metafóricos sólo las diferentes miradas que posibilitan dos de las facetas duales (intensivo/extensivo y expresión/contenido).

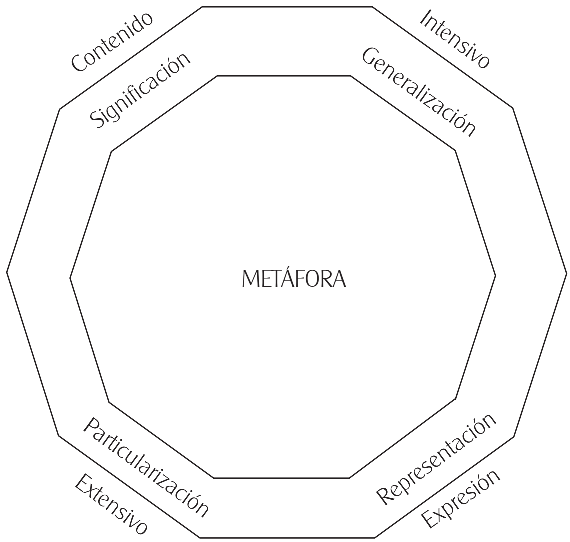

Figura 7

La metáfora en relación con la dimensión dual "extensivo/intensivo"

A continuación vamos a considerar una de las metáforas más fructíferas en la historia de las matemáticas: la interpretación de las curvas del plano como conjunto de puntos que son solución de una ecuación y comentaremos el proceso que convierte esta metáfora en una subcategorización (particular/general). De entrada, la curva geométrica para Descartes es la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla es trasmitido por las diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. Por ejemplo:

- Una circunferencia *es* la curva geométrica que se obtiene a partir de la traza que deja la punta del compás.

En este caso actúa la dualidad particular/general (*A* es *B*), es decir *A* (una circunferencia concreta) es un elemento de la clase *B* (curvas que se obtienen a partir de la traza que deja la punta del compás). En este caso actúa una metáfora fosilizada (las curvas son trazas de puntos que se mueven sujetos a determinadas condiciones). Dicho de otra manera, la metáfora fosilizada se ha transformado en la dualidad particular/general.

Descartes, en la Geometría, introduce una de las metáforas más creativas de la historia de las matemáticas:

- La circunferencia que se obtiene al trazar la punta del compás *es* el "conjunto de puntos que son solución de una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$".[5]

Se trata de una metáfora que permite entender la clase *B* desde otro punto de vista (*B* es *B´*, o *B* ~ *B´*, o *B* c *B´*). Gracias a esta metáfora, podemos estructurar nuestro conocimiento de las curvas de la geometría sintética en términos de nuestro conocimiento del álgebra.

Con el paso del tiempo, se considera que lo que hacemos es representar las curvas de la geometría sintética por medio de ecuaciones:

- La expresión $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se considera como la *representación* de una circunferencia.

Este proceso se cierra con el olvido de *B*. Es decir, *A* es *B* pasa a un segundo plano o incluso *A* es *B* se sustituye completamente por *A* es *B´*. De esta manera, con el paso del tiempo *A* es *B´* se convierte en una metáfora fosilizada que se interpreta en términos de particular/general.

- Una circunferencia *es* el conjunto de puntos que son solución de una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (o simplemente una circunferencia *es* una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$).

Tal como muestra el ejemplo de la geometría analítica se trata de un proceso complejo que, por otra parte, puede llegar a necesitar mucho tiempo. Se trata de un proceso que conlleva que un objeto (la circunferencia en este caso) que "vivía" en un determinado programa de investigación (la geometría sintética) pasa a "vivir" también en otro programa de investigación (la geometría analítica).

En este último párrafo de manera implícita hemos estado considerando el "contexto", entendido éste de manera ecológica.

[5] Descartes utiliza el término "círculo" y una ecuación del tipo $y^2 = lx - x^2$.

La metáfora en relación con la dimensión dual "expresión/contenido"

Como se ha dicho antes, la metáfora de Descartes es una nueva metáfora (A es B') que permite entender la clase B desde otro punto de vista (B es B', o $B \sim B'$, o $B \subset B'$). Gracias a esta metáfora, podemos estructurar nuestro conocimiento de las curvas de la geometría sintética en términos de nuestro conocimiento del álgebra y con el paso del tiempo, se considera que lo que hacemos es representar las curvas de la geometría sintética por medio de ecuaciones. Visto de esta manera, se puede considerar que la expresión A es B' funciona de manera icónica con respecto al contenido B.

En el EOS, cuando se reflexiona sobre la metáfora desde la dimensión expresión/contenido, se coincide con el punto de vista de otros investigadores (Otte, 2001) que consideran que la metáfora actúa de manera icónica, puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto. En otras palabras, la metáfora es primero una "forma de hacer ver" que, al tener consecuencias inferenciales, también es una "forma de hacer saber".

REFLEXIONES FINALES

En este artículo hemos puesto de manifiesto que la dualidad particular/general, la metáfora, la representación y el contexto tienen un aire de familia. En los cuatro casos podemos observar la existencia de un primer tipo de entidades que se utilizan para comprender un segundo tipo de entidades, a partir de las acciones que realizamos sobre las primeras (las cuales se consideran, al menos en algún aspecto, diferentes de las segundas). Estos cuatro procesos, esenciales en la actividad matemática, de alguna manera hacen intervenir la relación A es B, y, por tanto, se pueden considerar como *instrumentos de conocimiento* que comparten un aire de familia (Wittgenstein, 1953). Por este motivo, consideramos importante para la educación matemática investigar conjuntamente su función en la emergencia de los objetos matemáticos como resultado de los procesos de instrucción. Incluso cuando el foco de atención es uno solo de ellos conviene hacerse la siguiente pregunta: ¿cómo se vincula el instrumento de conocimiento que nos interesa con los otros?

En este trabajo también hemos mostrado cómo las herramientas teóricas elaboradas por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática permiten afrontar la complejidad que presenta la investigación sobre esta familia de instrumentos de conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bolite Frant, J. *et al.* (2004), "Reclaiming Visualization: When Seeing does not Imply Looking", TSG 28, ICME 10, Dinamarca [http://www.icme-organisers.dk/tsg28/].

Bolite Frant, J., J. Acevedo y V. Font (2005), "Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções", *Boletim GEPEM*, núm. 46, pp. 41-54.

Contreras, A., V. Font, L. Luque y L. Ordóñez (2005), "Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 25, núm. 2, pp. 151-186.

Eco, U. (1995), *Tratado de semiótica general*, Barcelona, Lumen.

Font, V. (2000), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral inédita, Universitat de Barcelona.

——— (2001), "Processos mentals *versus* competència", *Biaix*, núm. 19, pp. 33-36

Font, V., y J.I. Acevedo (2003), "Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 21, núm. 3, pp. 405-418.

Font, V., y J.D. Godino (2006), "La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores", *Educaçao Matematica Pesquisa*, vol. 8, núm. 1, pp. 67-98.

Font, V., J. D. Godino y B. D'Amore (2007), "An Ontosemiotic Approach to Representations in Mathematics Education", *For the Learning of Mathematics*, vol. 27, núm. 2, pp. 2-7.

Font, V., y A.B. Ramos (2005), "Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales", *Revista de Educación*, núm. 338, pp. 309-346.

Godino, J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22, núms. 2/3, pp. 237-284.

Godino, J.D., y C. Batanero (1994), "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 14, núm. 3, pp. 325-355.

Godino, J.D., C. Batanero y R. Roa (2005), "An Onto-semiotic Analysis of Combinatorial Problems and the Solving Processes by University Students", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 60, núm. 1, pp. 3-36.

Godino, J.D., C. Batanero y V. Font (2007), "The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education", *ZDM-The International Journal on Mathematics Education,* vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135.

Godino, J.D., D. Bencomo, V. Font y M.R. Wilhelmi (2007), "Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas", *Paradigma,* vol. XXVII, núm. 2, pp. 221-252.

Godino, J.D., A. Contreras y V. Font (2006), "Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 26, núm. 1, pp. 39-88.

Godino, J.D., V. Font y M.R. Wilhelmi (2006), "Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta", *RELIME,* vol. especial, pp. 131-155.

Ibarra, A. (2000), "La naturaleza vicarial de las representaciones", en A. Ibarra y T. Mormann (eds.), *Variedades de la representación en la ciencia y en la filosofía,* Barcelona, Ariel, pp. 23-40.

Lacasta, E., y J.R. Pascual (1998), *Las funciones en los gráficos cartesianos,* Madrid, Síntesis.

Lakoff, G., y R. Núñez (2000), *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being,* Nueva York, Basic Books.

Otte, M. (2001), "Epistemologia matemática de un punto de vista semiótico", *Eduaçao Matemática Pesquisa,* vol. 3, núm. 2, pp. 11-58.

Peirce, C.S. (1965), *Collected papers,* Cambridge, MA, Harvard University Press.

Radford, L. (2006), "The Anthropology of Meaning", *Educational Studies in Mathematicas,* vol. 61, núms. 1-2, pp. 39-65.

Ramos, A.B., y V. Font (2006), "Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica", *La Matematica e la sua didattica,* vol. 20, núm. 4, pp. 535-556.

Sfard, A. (1991), "On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 22, pp. 1-36.

——— (2000), "Symbolizing Mathematical Reality into Being – Or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other", en

P. Cobb, E. Yackel y K. McCain (eds), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom,* Londres, LEA, pp. 37-97.
Wilhelmi, M.R., J.D. Godino y E. Lacasta (2007), "Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales", *Recherches en Didactique des Mathematiques,* vol. 27, núm. 1, pp. 77-120.
Wittgenstein, L. (1953), *Investigaciones filosóficas*, Barcelona, Crítica.

DATOS DEL AUTOR

Vicenç Font
Universidad de Barcelona, España
vfont@ub.edu