Conceptuaciones matemáticas en la modelación de un proceso físico

Claudia Rosario Muro Urista, Patricia Camarena Gallardo
y Rosa del Carmen Flores Macías

Resumen: En el artículo se analizan las conceptuaciones alrededor de la serie de Fourier de un grupo de estudiantes a través de sus representaciones matemáticas. El análisis se fundamenta en la teoría de los campos conceptuales bajo el argumento de que el grupo interactúa con un contenido conceptual enmarcado en situaciones y conceptos que se derivan del modelo de un proceso físico que se encuentra gobernado por el cambio en la proporción de transferencia de la propiedad de un material para alcanzar el equilibrio.

El indicador para identificar las conceptuaciones son las invariantes operatorias que se reflejan en la realización de una tarea propia de la situación en la que se desarrollan. El reconocimiento de las invariantes es importante porque es un referente para analizar el tránsito entre la conceptuación y la conceptualización de una noción, al pasar de un conocimiento informal a uno formal.

Palabras clave: conceptuaciones, serie de Fourier, situaciones, campos conceptuales.

Abstract: This article analyzes the conceptualization around a Fourier series by a group of students by means of their mathematical representations. The study was based in the theory of conceptual fields by Vergnaud, under the argument that students can solve problems in situations that have meaning for them.

To identify the knowledge of the students, their operational invariants were analyzed when the solved problems in this situation.

The identification of invariants is important, because they can help the researcher to analyze the transit between conceptualization and the conceptualization of a notion, when it goes from informal to formal knowledge.

Keywords: pragmatic knowledge, Fourier series, conceptual fields, situations.

Fecha de recepción: 8 de mayo de 2007.

INTRODUCCIÓN

Para proporcionar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en ingeniería, Camarena (1987, pp. 3-7, y 1997, pp. 5-6) propone como estrategia la vinculación de las matemáticas con las ciencias de la ingeniería. El eje central de su propuesta se basa en establecer el modelo matemático del contexto por analizar para establecer la relación entre ambos tipos de conceptos.

Biembengut (2006, pp. 1-25) considera que la modelación matemática propicia en el estudiante habilidades tales como: integración de la matemática con otras áreas del conocimiento, interés por la matemática frente a su aplicabilidad y estímulo a la creatividad en la formulación y resolución de problemas.

Para distinguir la modelación matemática en el área educativa, Marcela (2007, pp. 5-6) enuncia la diferencia entre la modelación y la modelización: la modelación es vista como una estrategia de aprendizaje de conceptos matemáticos que aborda los principios básicos de la modelización. En consecuencia, hablar de modelación en el aula implica la construcción de modelos matemáticos en el ámbito de los estudiantes en el salón de clase.

Vista de esta manera, la modelación constituye una alternativa y una herramienta motivadora en el aula que potencia el desarrollo de capacidades en el estudiante para posicionarse de manera crítica ante las diferentes demandas del contexto y resolver las situaciones problema con las cuales se enfrenta (Biembengut, 2006, p. 5).

En este sentido, se entiende que, para desarrollar modelaciones matemáticas en el aula, el docente debe conocer el avance cognitivo del estudiante y analizar de manera conjunta el tipo de situaciones que se van a plantear con la relación de los conceptos que se quieren resaltar. Por tanto, para llevar a cabo una modelación, el docente debe desarrollar un ambiente situacional basado en dos aspectos: primero el de descontextualización y segundo el de recontextualización, de tal manera que la situación, sin perder su esencia e intencionalidad, se transforme en una situación que propicie el aprendizaje de los estudiantes.

Estos procesos de descontextualización y recontextualización de un concepto matemático se asocian al consenso que existe en aceptar que los objetos científicos en su mayoría no pueden abordarse con el mismo nivel de desarrollo de la ciencia en el aula de clase, para lo cual se requiere que los docentes o investigadores en educación realicen un proceso de conversión del saber científico en un saber objeto de enseñanza.

De esta manera, es posible entender el proceso de modelación matemática como una “transposición didáctica” del proceso de modelización que, aunque no es directamente un objeto científico, sí se considera como una actividad científica (Marcela, 2007, p. 10).

En Muro (2004, pp. 72-128) se encuentra un planteamiento acerca del desarrollo de situaciones oportunas en la enseñanza de la matemática en la Ingeniería Química. Se considera que su uso en el nivel superior apoya el establecimiento de significados biunívocos entre los conceptos matemáticos y los conceptos contextuales, precisamente por el ambiente situacional propio del área de trabajo del estudiante. Sobre la base de este argumento, se realiza la modelación de un proceso físico como una estrategia situacional de un fenómeno de transferencia de masa en la que se encuentra presente la serie de Fourier como concepto significativo del comportamiento del fenómeno. Y se establece que la modelación en el aprendizaje de la matemática es el puente de construcción del significado de un concepto en otro.

Por otro lado, Muro (2001, p. 5, y 2002, pp. 4-5) manifiesta que, al incorporar la modelación de la serie de Fourier en la enseñanza de la matemática, es posible que se puedan superar algunos obstáculos en el aprendizaje de este concepto, ya que las situaciones que modela permiten el tránsito del significado de un concepto a otro.

Sobre la interacción del estudiante con situaciones problema, García (2000, pp. 113-129) señala que, a través de hallar la solución de problemas referidos a una situación, el estudiante desarrolla capacidades de comprensión conceptual de una noción matemática, al distinguir los conceptos necesarios para resolverlos.

García subraya que el uso adecuado de las nociones conduce a hallar la solución del problema y su transferencia ayuda a explicar y predecir otros fenómenos semejantes, lo que implica un aumento progresivo en el nivel de significado de los conceptos.

Tomando como base los argumentos descritos y los resultados de Muro, se rescata el interés de realizar un estudio cognitivo para estudiar si en estas condiciones las situaciones de modelación se convierten en una herramienta para que el estudiante establezca relaciones alrededor del concepto y su significado, dando paso a su conceptualización matemática. Por consecuencia, es necesario identificar cuáles son las situaciones que enmarcan el significado de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa y cuáles son las acciones que determinan el comportamiento del estudiante en éste ámbito situacional de modelación.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Se plantea una investigación centrada en la modelación de un proceso físico dentro de un estudio cognitivo. Se analiza el efecto en el conocimiento del estudiante sobre conceptos que constituyen esta estructura matemática.

El sustento de este estudio lo establece la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990, pp. 101-125, y 1996, pp. 219-240), al enmarcar el análisis de la actuación del estudiante en situaciones derivadas del contenido conceptual de la serie de Fourier-transferencia de masa.

El análisis del conocimiento que fija esta teoría se basa en el entendimiento del proceso pragmático de la conceptuación del estudiante a través del reconocimiento de las variaciones existentes en sus representaciones, que son identificadas por las invariantes operatorias.

En este sentido, el conocimiento conceptual al que se hará referencia no trata aspectos teóricos formales, sino la acción del estudiante ante situaciones que contienen diferentes nociones en estrecha relación con la serie de Fourier y el proceso que modela.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Dentro de las investigaciones de la Matemática Educativa sobre la serie de Fourier en vinculación con un proceso de transferencia, se registran estudios sobre el análisis de la difusión del calor que hace Fourier en su obra (1822, pp. 296-300) y la relación entre las temperaturas finales que alcanza un cuerpo en la etapa estable de la difusión, marcando la implicación que tiene la convergencia de la serie en este concepto (Ulín, 1984, pp. 55-63; Farfán, 1995, pp. 99-125).

En ambos trabajos se resalta el estado estacionario de la conducción de calor vinculado al estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita y se sintetiza este concepto en la relación que tiene que encontrar el estado estacionario con la verificación de la convergencia de la serie.

El mismo análisis tiene lugar en los fenómenos de transferencia de masa. Su comportamiento define diversas situaciones de la Ingeniería Química, como las operaciones unitarias difusionales (Hines, 1995, p. 97). Este tipo de operaciones tiene una base teórica común; en cada una de ellas se transfiere masa de una fase fluida a otra a través de una interfase.

La expresión que determina la transferencia de masa en la dirección x para un tiempo t corresponde a una ecuación diferencial en derivadas parciales presentada en (1) (Foust, 1996, p. 171).

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \tag{1}$$

En donde D es la constante de difusión de material que se transfiere y C representa la concentración de la propiedad transferente.

Hallar la solución de la ecuación (1) implica establecer la función $C(x,t)$ que, a su vez, representa el cambio de concentración de la propiedad que describe el movimiento de moléculas en el tiempo, en ciertas condiciones limitantes del fenómeno.

A partir de $C(x,t)$, se pueden obtener diferentes comportamientos del fenómeno: cuando el fenómeno se sitúa a una profundidad determinada del espacio en que se mueven dichas moléculas, se pueden obtener curvas de diferente concentración para cada tiempo, representadas por la función: $T(t) = C$. Mientras que para un tiempo determinado se podrían obtener curvas que definan la función que representa el cambio dado por: $Z(x) = C$, definido por el movimiento de moléculas en la dirección x correspondiente al espacio de transferencia.

Considerando el cambio de C en ambas variables x y t, la función resultante es el producto de estas dos funciones como: $Z(x)T(t)$, que proporciona la solución de (1) por variables separables, como la función $C(x,t)$ dada en términos de una serie de Fourier (Hines, 1995, pp. 98-107).

Por tanto, hallar $C(x,t)$ implica determinar el significado que deriva del comportamiento del fenómeno de transferencia de masa en términos de una serie (Muro, 2002, pp. 159-163).

Matemáticamente, de acuerdo con la teoría de Fourier, la convergencia de la serie se refiere a la función $C(x,t)$ que describe el proceso difusivo de masa en el estado estable (Heinrich, 1980, pp. 1048-1050).

Los aspectos descritos acerca del fenómeno constituyen la modelación del proceso de transferencia, cuyo significado se establece por la relación de un conjunto de conceptos integrados en un contendido conceptual y diversas situaciones que modelan al fenómeno de transferencia de masa (Muro, 2004, pp. 45-70).

El conjunto de situaciones y conceptos referidos a la serie de Fourier en ese contexto puede constituir un medio de interacción para que el estudiante construya su concepción sobre el significado que conservan estas dos nociones (Muro, 2004, pp. 59-84).

A su vez, el análisis de los resultados de dicha interacción puede proporcionar al investigador información de cómo es que los conceptos que entran en juego adquieren significado para el sujeto mediante su conceptuación. En la explicación que hace Vergnaud en su teoría de los campos conceptuales (1996, pp. 109-112), se entiende que el sujeto conceptúa una noción por su actuación en diferentes situaciones.

En este marco, la base de la propuesta de Muro se refiere a determinar el proceso de comprensión del fenómeno de transferencia de masa en situaciones específicas que son alusivas a él, de acuerdo con el planteamiento de Vergnaud (1996, p. 110).

Los trabajos de Vergnaud se fundamentan en la descripción de la representación del conocimiento matemático implícito en el esquema del niño cuando se enfrenta a situaciones relativas a problemas de adición y sustracción del nivel escolar básico, mostrando que es en las representaciones donde se identifican las invariantes operacionales que dan carácter de conceptuación a la expresión escrita y oral del niño.

Vergnaud (1991, pp. 253-254) expone que el inicio del desarrollo de un conocimiento es incipiente y no puede ser llamado conceptual, pero constituye la base del conocimiento formal. El conocimiento incipiente informal puede describirse en términos de las conceptuaciones por medio de las invariantes operacionales como teoremas y conceptos en acto. Los teoremas en acto se explican como proposiciones que son sostenidas como verdaderas por un sujeto en ciertas situaciones. El sujeto hace aplicaciones implícitas de los axiomas matemáticos mediante teoremas en acto. Los conceptos en acto se refieren a categorías (objetos, propiedades y transformaciones) que permiten al sujeto clasificar la realidad en distintos elementos y aspectos, seleccionando la información apropiada y acorde con la situación en la que se mueve.

Los teoremas y conceptos en acto pueden ser inferidos de la observación de la actividad en una tarea y es posible que no puedan ser expresados por el sujeto, es decir, que no sean explícitos por él mismo. Su existencia es probada por las diferencias observadas entre sus conductas (Vergnaud, 2000, pp. 5-6).

La interpretación del planteamiento de Vergnaud revela que el funcionamiento cognitivo del sujeto debe ser estudiado alrededor de sus representaciones en situaciones-problema, distinguiéndose en éstas las invariantes operacionales.

Alrededor del trabajo de Vergnaud, Flores (2002, pp. 70-135) analiza las representaciones de un grupo de niños cuando interaccionan con situaciones de problemas de adición. Flores distingue dos etapas en la solución de un problema:

aquellas en las que se muestra el entendimiento o no del problema y aquellas en las que se muestra la solución o no de éste. Para ello, establece dos tipos de representaciones: *a)* las que son canónicas y las que no lo son, entendiéndose como canónicas las representaciones que corresponden al planteamiento del problema, y *b)* en la solución, las que son algorítmicas y las que no lo son.

Flores explica que la combinación de estos dos tipos de representaciones, tales como: *1)* canónicas algorítmicas, *2)* canónicas no algorítmicas, *3)* no canónicas algorítmicas, y *4)* no canónicas no algorítmicas, puede proporcionar un panorama amplio acerca del saber del niño, con elementos útiles para identificar su actuación cuando se enfrenta a problemas matemáticos (Flores, 2002, pp. 68-70).

Retomando el modelo teórico de Vergnaud surgido de estudios escolares básicos para su adaptación al nivel superior, se obtiene un marco de investigación para analizar el conocimiento de estudiantes de ingeniería en situaciones que contienen la vinculación de la serie de Fourier en el modelado del proceso de transferencia, considerando dos aspectos:

1. El conjunto de situaciones y conceptos que integran un campo de conocimiento como base para estudiar la actuación del sujeto.
2. En la actuación del sujeto, la distinción de las invariantes operacionales expuestas en sus representaciones y categorizadas por el entendimiento y solución del problema para caracterizar sus conceptuaciones.

Lo anterior, en el entendido de que las invariantes operacionales aportan información acerca de las conceptuaciones del sujeto como un conocimiento informal que pudiera sentar bases para que, en el mismo marco de la investigación, se sigan buscando situaciones y problemas en los que el sujeto llegue a formalizar y encontrar el significado de un concepto matemático acorde con la situación de análisis.

MÉTODO

El método que hay que seguir para llevar a cabo el análisis del conocimiento relativo al contenido conceptual de la serie de Fourier en situaciones alusivas al contexto de la transferencia de masa es el siguiente:

1. Caracterización de las situaciones problema y el contenido conceptual con los que habrá de interactuar el estudiante.

2. Análisis de la variación en sus representaciones.
3. Identificación de las invariantes operatorias en el análisis de la variación de sus representaciones.
4. Caracterización de las conceptuaciones.

Las situaciones relativas a la serie de Fourier provienen del contexto de la transferencia de masa como sistema de estudio. Puesto que este fenómeno se presenta en diferentes operaciones de la ingeniería, se selecciona un proceso de esa área en donde tenga lugar este fenómeno para su modelación.

Con base en la modelación del proceso seleccionado se establecen las situaciones, se caracterizan y se identifican los conceptos presentes en ellas para integrar el contenido conceptual que sustenta dichas situaciones.

Con la obtención del contenido conceptual y situacional se definen las actividades y tareas-problema dirigidas al estudiante. Las tareas se implementan en reuniones consecutivas en las que se lleva un registro de la actuación cognitiva de los estudiantes en términos de su actividad oral y escrita en sus representaciones.

La recolección de datos representativos de las actividades se realiza a través de la observación y sesiones en profundidad o grupo de enfoque durante ocho sesiones de trabajo.

Las sesiones fueron aproximadamente de tres horas según la situación y la complejidad de la tarea. El grupo de trabajo corresponde a un grupo de Ingeniería Química que ya cursó las asignaturas de fenómenos de transporte y matemáticas V, donde el contenido temático de esta última incluye la serie de Fourier.

En la conducción de las sesiones fue preponderante la intervención del investigador para propiciar la participación del grupo bajo una conducción andamiada con implementación inclusive de preguntas y actividades improvisadas en relación con la situación trabajada.

El análisis de datos obtenidos se realizó mediante un estudio cualitativo. La información recolectada fue interpretada y ordenada de acuerdo con las invariantes operatorias localizadas en las diferentes representaciones del estudiante.

Las representaciones fueron categorizadas sobre el entendimiento y solución del problema de acuerdo con Flores (2002, pp. 68-70).

Finalmente las conceptuaciones se caracterizaron según las invariantes.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las situaciones y su contenido conceptual se determinaron y caracterizaron con base en el contexto fenomenológico de la transferencia de masa, seleccionando como situación general el proceso de secado de un material húmedo en el que se pierde líquido por la acción de aire caliente.

La humedad se debe al agua contenida en el material y se refiere a la propiedad transferente. Se entiende que esta propiedad cambia por la transferencia de masa del agua a través del sólido y hacia el exterior de éste.

Para delimitar el problema, se parte de un material que tiene forma rectangular; sus dimensiones son grandes en comparación con su espesor, de tal modo que el área superficial de sus dos caras es mayor que el área a lo largo del espesor. Con estas características se supone que durante el secado, el contenido de humedad X se desplaza en una sola dirección x a través de su espesor L, perpendicular a las caras.

La propuesta de la situación y el problema general se establecen de la siguiente manera.

Situación general: secado de un sólido

Problema general: Se desea secar un sólido homogéneo de forma rectangular, sus dimensiones son grandes en comparación con su espesor L, de tal manera que el área superficial de sus dos caras es mayor que el área a lo largo de su espesor. La cara superior del sólido se expone a una corriente de aire seco. Su humedad inicial es uniforme y esta dada por X_i. La humedad se debe al contenido de agua que existe en el interior, la cual se transfiere a través del sólido por transporte molecular con una difusibilidad de masa constante. *a)* Determinar el perfil de humedad para cualquier tiempo en el que la superficie del sólido ha estado expuesta al aire, y *b)* determinar la humedad en equilibrio, considerando que, durante el secado, el contenido de humedad X se desplaza en una sola dirección x a través de su espesor L perpendicular a las caras.

Para dar respuesta al problema, es necesario considerar que el mecanismo del movimiento de humedad se rige por un movimiento difusional en la dirección x, que en este proceso no hay reacción química y que la ecuación (1) puede describir la transferencia de masa del agua del material. El cambio en la propiedad de transferencia se refleja en la disminución en el contenido de humedad en el sólido que, de acuerdo con lo planteado, ocurre en esa dirección a lo largo de L, con $L = 2\ell$ o bien x comprendida en el intervalo $-\ell < x < \ell$, en un tiempo determinado t en el que el secado alcanza el equilibrio.

En este caso, la representación de la ecuación (1) adaptada a las condiciones del problema, se da en la expresión (2).

$$k_g \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial t} \tag{2}$$

Con k_g como la difusividad del agua que tiene lugar desde el interior del sólido hacia su superficie.

También es necesario incorporar al problema las condiciones que lo limitan. Para ello se consideran los aspectos siguientes: *a)* en el arranque del secado, el sistema inicia con un valor determinado de humedad X_i, siendo uniforme en todo el espesor del sólido para $t = 0$; *b)* el cambio de humedad es cero para una posición $x = 0$, en cualquier tiempo t; *c)* en la superficie del sólido, la humedad es $X = 0$ y se mantiene constante por el continuo reemplazo y secado de ésta, al transferirse el agua del interior hasta la superficie después de iniciado el secado.

La representación matemática de las condiciones limitantes dadas en *a, b, c,* respectivamente, son las siguientes:

a) $X = X_i$ a $t = 0$ para $-\ell < x < \ell$ con X_i = humedad inicial

b) $\dfrac{\partial X}{\partial x} = 0$ para $x = 0$ en todos los valores de t

c) $X = 0$ en $x = \ell$ para $t > 0$

El problema y sus condiciones limitantes se deben ajustar al criterio para usar el método de separación de variables en la solución de (2) considerando que k_g es constante durante el proceso.

Si el cambio referido depende tanto del tiempo como del espacio donde se lleva a cabo la transferencia, la solución debe corresponder a la función humedad $X(x,t)$, la cual se puede determinar realizando las sustituciones y operaciones respectivas en (2) para obtener la expresión (3):

$$X(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Bn \left[\cos \frac{(2n+1)\,\pi x}{2\ell} \right] \exp \left[-\frac{(2n+1)^2\,\pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right] \tag{3}$$

El segundo miembro de (3) corresponde al desarrollo de una serie de Fourier que converge a la función $X(x,t)$. Esta función describe la transferencia de masa en términos del cambio en el contenido de humedad con respecto a la posición de la humedad en el espesor y el tiempo en los que el secado alcanza el equilibrio; este comportamiento es el que determina el marco para identificar el conjunto de situaciones-problema del fenómeno descrito.

Las condiciones que caracterizan al problema definen la expresión que representa a B_n, considerando que el fenómeno se desarrolla en el tiempo como una operación de evolución que toma el estado inicial $X(x,0)$, en el que la condición inicial se plantea para un tiempo de transferencia cero y una posición en el espesor dada por x. Esta condición puede llevar a otras más durante el proceso, las cuales corresponden a diferentes estados del secado del material. Matemáticamente son representados por la función $X(x,t)$ hasta que el proceso alcance el equilibrio.

El significado que la solución provee al cambio de X en (x,t) se da en términos de una serie compuesta por una suma de funciones que sigue un patrón sinusoidal y se atenúa gradualmente hasta que el cambio es uniforme en todo el material. Cuando la suma de la serie converge a $f(X) = X(x,t)$ en un intervalo $-\ell < x < \ell$, correspondiente a L, la función $f(X)$ representa el final de la etapa del estado inestable del secado y el inicio del estado estable de éste y, con esto, el equilibrio que guarda el sistema en estudio.

De esta manera, del conjunto de conceptos que se encuentran presentes en la situación general, se distinguen dos tipos de nociones: las matemáticas y las del contexto. Ambos tipos determinan el comportamiento del mecanismo de difusión de transferencia del líquido en el secado de materiales y constituyen el contenido conceptual de las situaciones. La clasificación de los conceptos se presenta a continuación:

Matemáticos: Ecuaciones diferenciales parciales, funciones exponenciales, funciones trigonométricas, condiciones limitantes y de frontera, métodos de solución de ecuaciones diferenciales parciales, suma de funciones, límites, series infinitas y convergencia de series infinitas.

Relativos al contexto: Determinación del contenido de humedad en el material para cualquier tiempo; tipos de humedades presentes en el proceso: humedad inicial, humedad crítica, humedad libre y humedad en equilibrio; tiempo de secado; espacio de secado; mecanismo de difusión del líquido del material; difusividad de un líquido en un sólido; relación de los distintos tipos de humedades presentes durante el secado; su dependencia con el tiempo y el espacio, y estado permanente y transitorio en el proceso de secado.

Con la identificación del conjunto conceptual, se establece a su vez el conjunto de situaciones con problemas estructurados en cada una, en donde se encuentran implícitos dichos conceptos.

Según los resultados obtenidos en la implementación de las situaciones, éstas se distinguen por clases de situaciones según los conocimientos y competencias que se identifican en el grupo de estudiantes. Estos resultados se presentan en el cuadro 1.

Los resultados del cuadro 1 indican que no todos los conocimientos son del dominio del grupo y que se encuentran con serias dificultades para resolver los problemas.

Debido a la complejidad de las situaciones, el contenido conceptual que entra en juego y las dificultades detectadas por los estudiantes, resulta preponderante el andamiaje del investigador para continuar trabajando con el grupo de investigación.

Para aclarar estos hechos, del conjunto de situaciones obtenidas, se presentan algunas de las que se consideran relevantes por los resultados obtenidos y por las representaciones que se generan. También se muestran algunas de las representaciones.

Situación 1. Cambio de humedad en el sólido en el estado inestable hasta alcanzar el equilibrio

Problema planteado: establecer la ecuación diferencial que describe el cambio de humedad del sólido que se va a secar para cualquier tiempo y en cualquier posición dentro del espacio de secado hasta alcanzar el equilibrio.

Contenido conceptual matemático correspondiente al problema planteado: relación del cambio que se define con respecto a dos variables en una ecuación diferencial parcial de segundo orden en términos de x y de t.

Contenido conceptual del contexto correspondiente al problema planteado: cambio en el contenido de humedad con el tiempo y espacio debido a la transferencia de masa del agua a través del sólido, estado inestable y equilibrio en el contenido de humedad.

Representaciones que genera el grupo de estudiantes acerca del problema

Representación canónica no algorítmica

Esquema presente en el entendimiento del problema. **Canónico:** el esquema de entendimiento refleja la comprensión acerca de que existe una relación

Cuadro 1 Conjunto de situaciones-problema distinguidas por clase

Clases de situaciones	Situación-problema
El estudiante dispone de conocimientos y de las competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.	*1.* Registrar el fenómeno de transferencia de masa mediante un proceso de secado de un material, cuya propiedad transferente es la humedad de la sustancia que se va a secar. Los cambios deben identificarse basados en esta propiedad. *2.* Obtener perfiles de humedad descritos por curvas de humedad en función del tiempo de secado y de la posición ocupada a largo del espesor del material. *3.* Identificar la serie que corresponde a la solución de la ecuación diferencial. *4.* Hallar la convergencia de la serie de Fourier.
El estudiante no dispone de todos los conocimientos ni de todas las competencias necesarias, lo que lo obliga a un tiempo de reflexión y de exploración de dudas y lo conduce finalmente al éxito o al fracaso.	*1.* Establecer la ecuación diferencial que describe el cambio de humedad del material que se va a secar en función del tiempo y del espacio de secado. *2.* Identificar las condiciones limitantes del problema y el método de solución de la ecuación diferencial. *3.* Establecer la solución de la ecuación diferencial. *4.* Establecer la relación entre la convergencia de la serie y el equilibrio del fenómeno de la transferencia de masa. *5.* Establecer el significado de la convergencia de la serie en el fenómeno de transferencia para el secado de un material.

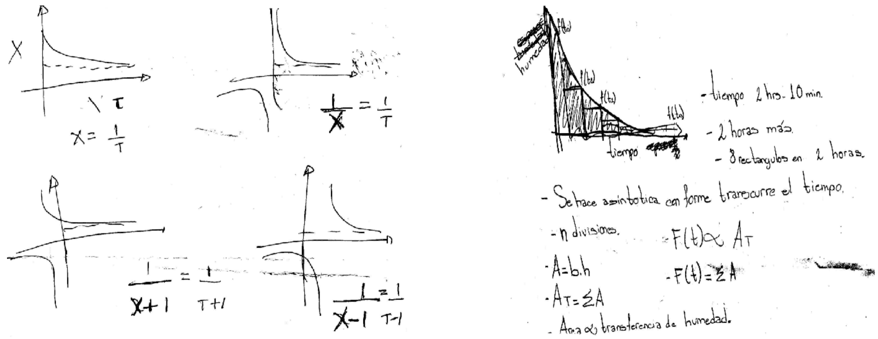
que describe el cambio en la transferencia de masa con el tiempo, a través del cambio de humedad del material en el secado. Las figuras 1a y 1b muestran las representaciones descritas.

Propósitos para hallar la solución del problema: encontrar una expresión matemática que represente el cambio de X en términos de dos variables x y t.

Esquema presente en la solución del problema. **No algorítmico:** el grupo relaciona el cambio de X en t mediante una gráfica donde trata de relacionar ambos cambios, indicando una posición y un tiempo en los que el fenómeno alcanza el equilibrio. Sin embargo, no proporciona la ecuación diferencial correspondiente y no se alcanza el objetivo de la tarea planteada en el problema.

Invariantes identificadas en las representaciones de la solución del problema: cambio de la humedad del material en función del tiempo.

Conceptuaciones identificadas en las representaciones de la solución del problema: relación asintótica del cambio de humedad del material en función del tiempo para alcanzar el equilibrio cuando $t \to \infty$.



a *b*

Figura 1 Representación canónica no algorítmica de la relación existente entre el cambio de humedad del sólido con el tiempo

Las figuras 1a y 1b corresponden a representaciones canónicas, identificadas por el entendimiento y la solución al problema planteado, lo cual indica que el grupo relaciona el cambio de humedad con el tiempo y el área de transferencia. No algorítmica, porque la representación para dar solución al problema es en forma gráfica, con algunos indicios algorítmicos.

Representación no canónica-algorítmica

Esquema presente en el entendimiento del problema. **No canónico:** refleja la intención de obtener la ecuación diferencial que relaciona el comportamiento del fenómeno con las variables descritas. Las diferenciales que proponen son ecuaciones ordinarias de primer orden.

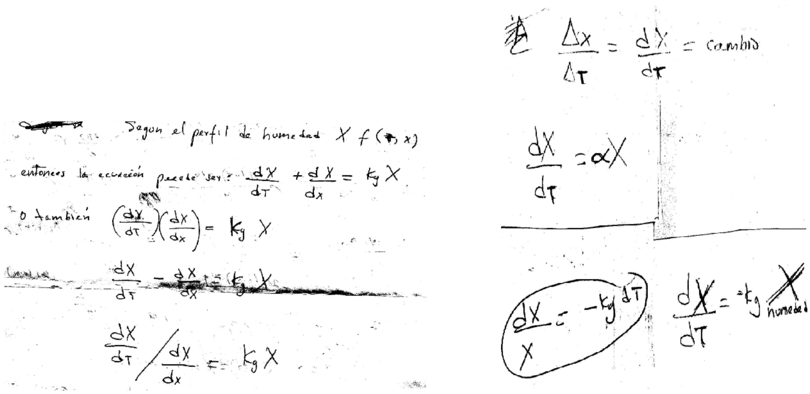
Propósitos para hallar la solución del problema: obtener la ecuación diferencial parcial de segundo orden que representa el cambio de la función $X(x,t)$ en el equilibrio.

Esquema presente en la solución del problema. **Algorítmico:** se plantea la idea del cambio de humedad en función del tiempo mediante incrementos y diferenciales, tratando de establecer una ecuación que relacione esas dos variables con el planteamiento de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para cada variable; el estudiante busca hacer operaciones con ecuaciones para establecer la expresión buscada. Una muestra de estas representaciones se encuentra en las figuras 2a y 2b.

Invariantes identificadas en las representaciones de la solución del problema: el cambio de humedad del material se establece mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Conceptuaciones identificadas en las representaciones de la solución del problema: la ecuación que proporciona el cambio de humedad en función de dos variables se obtiene a partir de alguna operación de dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

El esquema de entendimiento y solución no canónico del problema se observa en las representaciones de la figura 2, cuando el grupo trata de representar la ecuación diferencial correspondiente al cambio de humedad con el tiempo y el espacio de transferencia. Para ello, los estudiantes establecen como representación de ese cambio una ecuación diferencial ordinaria, considerando por separado una para el cambio en *t* y otra para el cambio en x. De tal modo que los estudiantes plantean operaciones entre esas ecuaciones, considerando que la resultante ya contendrá ambos cambios.



a *b*

Figura 2 Representación no canónica algorítmica de la ecuación diferencial que describe el cambio en la humedad del sólido

Situación 2. Función $X(x,t)$ que describe el cambio de humedad en términos de dos variables

Problema planteado: hallar la solución de la ecuación que refiere el cambio de humedad del sólido con respecto al tiempo y al espacio de transferencia.

Contenido conceptual matemático correspondiente al problema planteado: condiciones limitantes, métodos de separación de variables para resolver una ecuación diferencial parcial, series infinitas, función $X(x,t)$ dada a través de una serie compuesta por una suma de funciones.

Contenido conceptual del contexto correspondiente al problema planteado: perfiles de humedad en el secado del sólido, estado inestable, estado estable y equilibrio en el contenido de humedad.

Representaciones que genera el grupo de estudiantes acerca del problema

Representación no canónica algorítmica

Esquema presente en el entendimiento del problema. **No canónico:** el esquema de entendimiento refleja la búsqueda de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer grado. La solución que el grupo establece se muestra en la representación de la figura 3.

Propósitos para hallar la solución del problema: encontrar la solución de una ecuación diferencial ordinaria y de primer grado que represente el cambio de X en términos de dos variables t y x.

Esquema presente en la solución del problema. **Algorítmico:** el grupo determina la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer grado en el entendido de que esa ecuación es la que gobierna el cambio de humedad del sólido durante su secado. También identifica el valor inicial de X para $t = 0$ y lo utiliza como condición para resolver la ecuación diferencial (en la solución considera que el cambio se debe al tiempo).

No se alcanza el objetivo de la tarea planteada porque su entendimiento no canónico sobre la ecuación que describe el problema le trae como consecuencia un entendimiento no canónico sobre su solución.

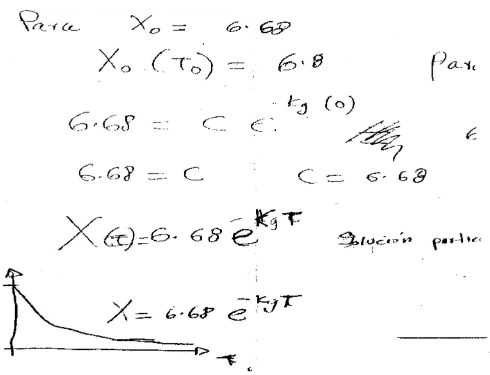


Figura 3 Representación no canónica algorítmica de la solución de una ecuación diferencial ordinaria que describe el cambio de humedad con el tiempo en el secado del sólido

Invariantes identificadas en las representaciones de la solución del problema: predomina la idea del cambio de humedad del sólido en función del tiempo de secado.

Conceptuaciones identificadas en las representaciones de la solución del problema: ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo lineal de primer grado y su condición limitante para hallar la solución $X(x,t)$.

En la figura 3 se aprecia la conceptuación del grupo acerca de la explicación que tiene para describir el cambio de la humedad únicamente en función del tiempo en forma gráfica, así como la ecuación que representa ese cambio y su solución.

El grupo no llega a conceptualizar la ecuación parcial de segundo orden en relación con las variables posición x y tiempo t.

Los resultados de la interacción con la situación 1 indican que, aunque los estudiantes tienen conocimientos en ecuaciones diferenciales y conocimientos en fenómenos de transporte, no logran vincular estos dos conceptos. La idea que predomina es la de una ecuación diferencial ordinaria, por tanto, su solución es referida a ésta (es de suponerse que el estudiante no tenga estos conocimientos porque, generalmente, los cambios que se le muestran en clase obedecen a las ecuaciones ordinarias). Las condiciones limitantes no son identificadas ni utilizadas, porque para ellos no existe relación con el problema.

En el andamiaje que realiza el investigador durante la sesión correspondiente a estas situaciones, conduce al grupo a recordar las ecuaciones que gobiernan los fenómenos de transferencia en una sola dirección y su tipo de solución, con el propósito de que el estudiante relacione los cambios de humedad encontrados con una ecuación parcial de segundo orden.

Así, a través de las actividades desarrolladas, el estudiante identifica la Ley de Fick como la ecuación que representa la transferencia de masa y el tipo de solución que esta ecuación genera, la cual es trasladada de acuerdo con las condiciones del problema.

En este nivel, las siguientes tareas consisten en referir la función buscada $X(x,t)$ con la solución de la ecuación y la serie de Fourier presente en ella.

El propósito de dicha tarea es que el grupo identifique la serie de Fourier y construya el significado que ésta aporta al fenómeno en estudio.

En este marco, la intervención del investigador se centró en utilizar situaciones para destacar conceptos alrededor de la serie. La primera tarea se dirige a buscar el reconocimiento de la función solución $X(x,t)$ como una serie de funciones trigonométricas que constituyen los términos de una serie de Fourier, para un tiempo t dado y para una posición dada x. A partir de esta sesión, las siguientes tareas fueron encaminadas hacia la búsqueda de la suma de las funciones mediante su incorporación para el arreglo de una serie infinita, a fin de identificar que dicha suma corresponde a la función $X(x,t)$, bajo ciertas especificaciones del problema.

Por tanto, las actividades fueron dirigidas hacia graficar las funciones de las series, posibilitando la visualización gráfica de la suma de funciones como una serie de Fourier y su convergencia a las funciones $X(t)$ y $X(x)$. En este sentido, se implementó la siguiente situación:

Situación 3. Asociación de la función solución X(x,t) al problema en estudio

Problema planteado: dada la solución de la ecuación diferencial, hallar: *a)* $X(x,t)$ para valores de x en el intervalo $[0,L]$ como espesor del sólido, variando el tiempo t desde el inicio del secado hasta que éste alcance el equilibrio; *b)* hallar $X(x,t)$ utilizando datos de tiempo a partir del inicio del secado hasta que el proceso alcance el equilibrio, variando la posición x de $[0,L]$, y *c)* representar gráficamente ambos cambios.

Contenido conceptual matemático correspondiente al problema planteado: función de dos variables $X(x,t)$, suma de funciones trigonométricas, series infinitas.

Contenido conceptual del contexto correspondiente al problema planteado: perfiles de humedad en el secado del sólido, estado inestable, estado estable y equilibrio en el contenido de humedad.

Representaciones que genera el grupo de estudiantes acerca del problema

Representación canónica-algorítmica

Esquema presente en el entendimiento del problema. **Canónico:** refleja la obtención de $X(x,t)$ considerando distintos valores de x y t, obteniendo series diferentes a través del desarrollo de su sumatoria y la representación gráfica de dichas series. Las figuras 4a y 4b muestran estas representaciones.

Propósitos para hallar la solución del problema: obtener $X(x,t)$ y el comportamiento de la función X en función del tiempo t y de x como $X(x,t)$, utilizando diferentes posiciones y tiempos para establecer las series que conforman dichas funciones y la representación gráfica de esas series.

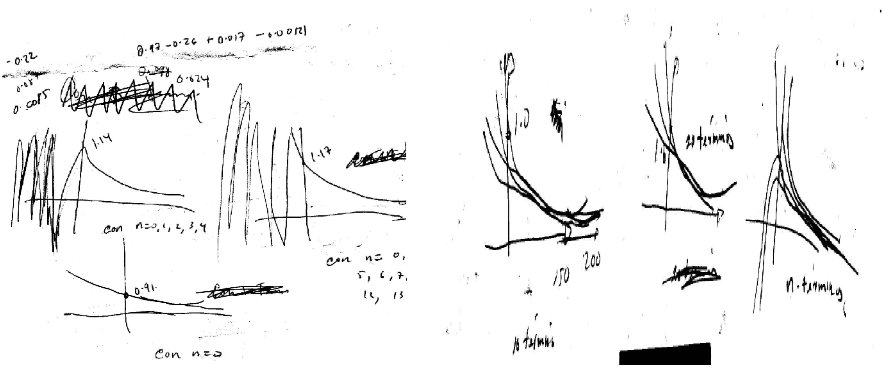
Esquema presente en la solución del problema. **Algorítmico:** el grupo sustituye valores de x para encontrar $X(x,t)$ para un valor dado de x a través de conformar la serie. La serie la desarrolla con valores de $n = 0$ hasta $n = 25$ y, de esa manera, halla su suma; considera que la suma es aproximadamente igual cuando n va de 0 hasta ∞.

Invariantes identificadas en las representaciones de la solución del problema: desarrollo de una sumatoria, conformación de una serie de funciones, suma de funciones, gráfica de una suma de funciones y obtención de una suma infinita de funciones.

Conceptuaciones identificadas en las representaciones de la solución del problema: serie de funciones trigonométricas y exponenciales representativas de: $X(t,0)$, $X(t,x_1)$, $X(t,x_2)$, $X(t,x_3)$ ... $X(t,x_n)$ y $X(x,0)$, $X(x,t_1)$, $X(x,t_2)$, $X(x,t_3)$ ... $X(x,t_n)$ respectivamente.

En las figuras 4a y 4b, se identifica un entendimiento canónico acerca de la función solución de la ecuación diferencial.

El grupo encuentra $X(x,t)$ a través de dar valores a x como condición fija; además, determina la serie que representa a $X(x,t)$ y su representación gráfica utilizando varios términos de la serie. Lo mismo hace cuando t es la condición fija y lo que varía es la posición x. Por tanto se puede considerar que el estudiante reconoce que la solución $X(x,t)$ está dada a través de una serie infinita de funciones y está en condiciones de que el investigador lo conduzca al siguiente paso: hallar la suma de la serie con la finalidad de que los estudiantes asocien su suma con su convergencia y, a su vez, con el significado del problema en estudio.



a *b*

Figura 4 Representación canónica algorítmica de la solución de la ecuación diferencial ordinaria que describe el cambio de humedad en el secado del sólido a través de una serie

Situación 4. Convergencia de la serie de Fourier a la función X(x,t) y su asociación con el fenómeno

Problema planteado: hallar la suma de la serie que conforma $X(x,t)$ y representar gráficamente ese resultado.

Contenido conceptual matemático correspondiente al problema planteado: suma de funciones trigonométricas en una serie infinita, convergencia de series de funciones.

Contenido conceptual del contexto correspondiente al problema planteado: estado de equilibrio y estado estable en la transferencia de masa.

Representaciones que genera el grupo de estudiantes acerca del problema

Representación canónica-no algorítmica

Esquema presente en el entendimiento del problema. **Canónico:** el grupo muestra un entendimiento canónico al representar la serie como una suma de funciones cuyo resultado es una grafica que corresponde en una cierta porción de la curva $X(x,t)$. Estas representaciones se pueden ver en las figuras 5a y 5b.

Propósitos para hallar la solución del problema: obtener la suma de la serie, su gráfica y la relación correspondiente a la curva $X(x,t)$. Identificar la suma de la serie en la última etapa del fenómeno correspondiente al equilibrio.

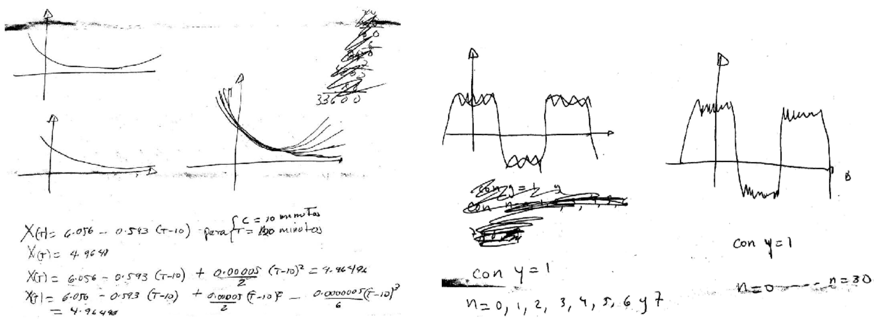
Esquema presente en la solución del problema. **No algorítmico:** este esquema se presenta cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con su suma, aunque es congruente con el esquema de entendimiento canónico.

Invariantes identificadas en las representaciones de la solución del problema: suma de una serie de funciones, convergencia de series de funciones, equilibrio en el proceso de secado.

Conceptuaciones identificadas en las representaciones de la solución del problema: suma de una serie infinita de funciones exponenciales relacionadas con $X(\mathrm{x},t)$ para cualquier valor de t y una posición x de la humedad en el sólido, equilibrio en el secado de un sólido cuando el tiempo es infinito.

Las representaciones que se muestran en la figura 5 indican que el grupo reconoce el contenido de humedad del sólido cuando se especifica x para obtener una serie de tipo exponencial, la cual relaciona el cambio de la humedad X en función del tiempo t para un valor de x dado. Lo mismo hace cuando se trata de obtener el cambio de la humedad X en función de la posición x para un tiempo t. Sin embargo no reconoce las series obtenidas como series de Fourier.

Los resultados sobre estas conceptuaciones se concentran en el cuadro siguiente, donde se describen las representaciones del grupo sobre el entendimiento y solución de los problemas planteados en las situaciones descritas.



a *b*

Figura 5 Representación canónica algorítmica en (*a*) y representación canónica no algorítmica en (*b*). Ambas relacionadas con la humedad del sólido en la situación 4

Cuadro 2 Conceptos y conceptuaciones sobre la situación de modelación del secado de un sólido

Problemas	*Conceptos presentes en la situación-problema*	*Invariantes operacionales del grupo*	*Conceptuaciones del grupo*
1) Establecer la ecuación diferencial que describe la humedad del sólido que se va a secar, para cualquier tiempo y en cualquier posición dentro del espacio de secado. *2)* Hallar la solución de la ecuación que refiere el cambio de humedad con respecto al tiempo y al espacio de transferencia. *3)* Hallar: *a)* $X(x, t)$ para valores de "x" en el intervalo $[0, L]$, variando el tiempo desde el inicio del secado hasta que éste alcance el equilibrio; *b)* hallar $X(x, t)$ utilizando datos de tiempo a partir del inicio del secado hasta que el proceso alcance el equilibrio, variando la posición x de $[0, L]$. *4)* Hallar la suma de la serie que conforma a $X(x, t)$: *a)* Cuando x varía. *b)* Cuando t varía. *c)* Representar gráficamente esos cambios.	*1)* Relación del cambio que se define con respecto a dos variables en una ecuación diferencial parcial de segundo orden en términos de x y de t. *2)* Método de separación de variables para resolver una ecuación diferencial parcial lineal. *3)* Condiciones limitantes para resolver una ecuación diferencial parcial lineal. *4)* Cambio en el contenido de humedad con el tiempo y espacio debido a la transferencia de masa del agua a través del sólido. *5)* Serie infinita de funciones trigonométricas. *6)* Suma de una serie de Fourier. *7)* Convergencia de una serie de Fourier. *8)* Estado inestable y equilibrio en el contenido de humedad.	*1)* Relación del cambio de la humedad con respecto a dos variables. *2)* Comportamiento asintótico en el cambio de la humedad del sólido. *3)* Cuando t tiende a ser infinito, se obtiene el equilibrio en el fenómeno. *4)* Desarrollo de una sumatoria de funciones con el reconocimiento de los límites que la determinan. *5)* Conformación de una serie de funciones. *6)* Suma infinita de funciones. *7)* Representación gráfica de una suma infinita de funciones. *8)* Suma de una serie de funciones asociada al cambio de humedad en función del tiempo y de la posición.	*1)* Conceptuación: las ecuaciones que gobiernan el cambio de humedad en el sólido durante el secado son dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que se pueden sumar o multiplicar para obtener el cambio en términos de dos variables. *2)* Conceptuación: la ecuación que describe el fenómeno de transferencia de masa es la ley de Fick. *3)* Conceptuación: la solución de la ecuación está dada mediante una serie de funciones. *4)* Conceptuación: la suma de la serie corresponde al límite de $X(x, t)$ cuando t es infinita.

CONCLUSIONES

Para analizar las conceptuaciones matemáticas acerca de la serie de Fourier en un grupo de estudiantes de Ingeniería Química, se selecciona el contexto de la transferencia de masa donde la serie de Fourier facilita el significado del equilibrio en el sistema.

A partir del contexto, se establece una situación-problema referida al secado de un sólido y un conjunto de conceptos y situaciones alusivas a él para obtener un contenido conceptual con el cual habrá de interactuar el grupo.

El análisis de las conceptuaciones se refiere al análisis de las invariantes operatorias presentes en su esquema de entendimiento y solución de los problemas en situación.

Los resultados del análisis indican la existencia de entendimientos categorizados como canónicos algorítmicos en la representación del comportamiento de la transferencia de masa en términos del cambio de la humedad en función del tiempo. El cambio lo establece la suma de una serie trigonométrica infinita y de representaciones no algorítmicas en la solución correspondiente a los problemas que generan dicho entendimiento.

El grupo reconoce el cambio de humedad del sólido en la operación del secado como un fenómeno de transferencia de masa. El cambio en la humedad lo relaciona con el tiempo. El entendimiento de este cambio se interpreta como un esquema canónico. El cambio con respecto al espacio de transferencia lo entiende, pero le cuesta trabajo representarlo gráfica y analíticamente.

A lo largo de las sesiones, el desempeño de los estudiantes estuvo limitado en lo que se refiere al entendimiento y la explicación acerca del cambio con respecto a las dos variables x y t conjuntamente. Este entendimiento restringió la obtención de la ecuación que describe ese cambio, considerando ese aspecto como un obstáculo para identificar la ecuación correcta.

A través del andamiaje de las sesiones, el investigador apoya al grupo para identificar la ecuación que gobierna el fenómeno, con lo cual el grupo recuerda la Ley de Fick y su solución. Con respecto a la solución, el grupo la identifica como una serie.

Al trasladar la solución identificada al problema planteado, sustituye valores de x para obtener el cambio en t para esa posición, reconociendo las series de funciones y su relación con las gráficas asintóticas que había realizado en las primeras sesiones. Por tanto, confirma este cambio y reconoce el equilibrio del fenómeno, hallando la suma de las series pero sin relacionarlo con la convergencia de éstas cuando el tiempo t es infinito. De la misma manera, obtiene una serie cuando sustituye valores de t y obtiene el cambio en x, obteniendo así series de funciones trigonométricas, donde halla su suma, sin identificar que ésta es referida a su convergencia. En ninguno de los casos asocia las series con las series de Fourier.

De esta manera, los diferentes aspectos que se analizan en las representaciones matemáticas del sujeto, según la teoría de Vergnaud, posibilitan un marco para explicar el conocimiento pragmático del estudiante acerca de la serie de Fourier en un contexto originario del conjunto de situaciones que definen la noción en estudio.

De los resultados importantes, resaltan las invariantes presentes en las representaciones del estudiante, mostrando conceptuaciones alrededor de una serie trigonométrica infinita que no es identificada completamente como una serie de Fourier.

Como obstáculos detectados, se establecen aquellos que determinan el cambio de humedad en dos variables, la representación del cambio de humedad con respecto a la posición, la convergencia de la serie de Fourier y la asociación de ésta con el equilibrio en el secado y el inicio del estado estable.

Por tanto, es recomendable establecer nuevas situaciones y conceptos que apoyen el reconocimiento del significado de este concepto.

BIBLIOGRAFÍA

Biembengut, H. (2006), "Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas", *Memorias del V festival internacional de matemática*, España.

Camarena, P. (1987), *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*, Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad en Matemática Educativa, México, Cinvestav-IPN.

——— (1997), "La matemática en contexto", *Novena reunión centroamericana del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa*, México, Instituto Politécnico Nacional.

Farfán, R. (1995), *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio*, México, Iberoamérica.

Flores, R. (2002), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación*, Tesis de Doctorado en Educación, Aguascalientes, Ags., México.

Fourier, J. (1822), *Théorie Analytique de la Chaleur,* París, Chez Firmin Didot, Père et fils. Reimpressions Éditions Jaques Gabay, 1988.

Foust, A. (1996), *Principios de operaciones unitarias,* México, CECSA.

García, J. (2000), "La solución de situaciones-problemáticas. Una estrategia didáctica", *Revista Enseñanza de las Ciencias,* Universidad de Antioquia.

Heinrich, J. (1980), "On Quadratic Elements in Finite Element Solutions of Steady-state Convection-diffusion Equations", *International Journal of Numerical Methods in Engineering.*

Hines, A. (1995), *Transferencia de masa. Fundamentos y aplicaciones,* México, Prentice-Hall.

Marcela, Y. (2007), "Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática", *Revista Virtual Universidad Católica del Norte.*

Muro, C. (2000), *La significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa,* Tesis de Maestría, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

——— (2001), "Las representaciones del estudiante sobre la noción de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa", ponencia, XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Buenos Aires, Argentina.

——— (2002), "La serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa", *Revista Científica,* vol. 6, núm. 4, ESIME-IPN, México.

——— (2004), *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier,* Tesis de Doctorado, IPN, México.

Ulín, C. (1984), *Análisis histórico crítico de la difusión del calor: el trabajo de Fourier,* Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Verganud, G. (1991), *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria,* México, Trillas.

——— (1996), "The Theory of Conceptual Fields", en L. Stette, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (eds.), *Theories of Mathematical Learning,* Mahwah, NJ, Lawrence Eribaum Associates, pp. 219-240.

——— (2000), "Constructivisme et apprentissage des mathématiques", conferencia, Ginebra, Suiza.

DATOS DE LAS AUTORAS

Claudia Rosario Muro Urista
Instituto Tecnológico de Toluca, México
claudiamuro@hotmail.com

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional, México
patypoli@prodigy.net.mx

Rosa del Carmen Flores Macias
Universidad Nacional Autónoma de México, México
rcfm@unam.mx