Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones

Miguel Ángel Parra Álvarez y Rosa del Carmen Flores Macías

Resumen: Se presenta el análisis del proceso de solución de dos problemas con fracciones, así como el análisis de la interacción efectuada en una situación de aprendizaje cooperativo principalmente por dos alumnos de secundaria con bajo aprovechamiento. Los resultados mostraron algunas problemáticas de los alumnos con respecto al concepto de fracción y la conservación del entero, así como una interpretación deficiente del problema, la cual los condujo al uso de algoritmos inadecuados para la solución. Se identificaron tres concepciones que obstaculizaron el proceso de solución de los alumnos: en un problema con fracciones el valor del entero siempre es uno, al resultado se llega con una sola operación y la única cantidad mencionada en el problema equivale al entero. Las problemáticas fueron superadas durante la interacción entre alumnos y tutor.

Palabras clave: alumnos con bajo aprovechamiento, problemas matemáticos, fracciones, aprendizaje cooperativo, secundaria.

Abstract: The analysis of the process of solution of two problems with fractions is presented, as well as the interaction in a cooperative learning situation between two secondary school students with low achievement. The results showed some problems regarding the concept of fraction related to the conservation of the integer, and a wrong interpretation of the problem which led them to the use of inadequate algorithms for the solution. Three conceptions were identified in the solution process: in a problem with fractions the value of the integer is always one, just an operation is needed to obtain the result and the only quantity mentioned in the problem is equivalent to the integer. The problems were overcome during the interaction between students and tutor.

Keywords: students with low achievement, mathematical problems, fractions, cooperative learning, secondary school.

Fecha de recepción: 19 de octubre de 2007.

MARCO TEÓRICO

Uno de los principales objetivos de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos por medio de problemas matemáticos (Schoenfeld, 1992) que permitan a los alumnos ampliar y consolidar sus conocimientos, habilidades y capacidades a fin de ser aplicados en la solución de problemas cotidianos (NCTM, 1995, citado en Santos, 1997; Schoenfeld, 1992; SEP, 1993) y en problemas matemáticos más complejos.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante la solución de problemas es un proceso que requiere la adopción de diferentes formas de interacción dentro del aula que, por un lado, conduzcan a los alumnos a comprender los problemas y explorar diferentes formas de solución y, por el otro, conduzcan a los maestros a analizar y elegir problemas adecuados al nivel de conocimiento de sus estudiantes. Esta propuesta ha sido planteada como alternativa a las prácticas de enseñanza meramente expositivas que subrayan el aprendizaje de procedimientos matemáticos para su posterior aplicación a problemas. A este respecto, se ha demostrado que los alumnos pueden realizar correctamente los algoritmos, pero este conocimiento no es suficiente para solucionar problemas matemáticos (Flores, 2005). En este sentido, se pretende que la enseñanza de las matemáticas deje de ser solamente expositiva y que, por el contrario, brinde la oportunidad a los alumnos de experimentar diversas soluciones con la guía del maestro.

El contexto de la enseñanza de las matemáticas es importante. Un contexto de enseñanza que permite a los estudiantes discutir, establecer acuerdos respecto a los significados matemáticos, expresar puntos de vista y experimentar soluciones, provee a los alumnos de una mayor oportunidad para desarrollar su conocimiento. El aprendizaje cooperativo, cuya base principal es la constante interacción entre los alumnos, ofrece este contexto.

El aprendizaje cooperativo permite a los alumnos internalizar procesos, organizar y retener ideas (Jones, Wilson y Bhojwani, 1997); además, durante la interacción los conocimientos matemáticos individuales se externan y se vuelven públicos, con la posibilidad de ser criticados y reformulados, lo que a su vez conduce a nuevos conocimientos y a la creación de entendimientos compartidos sobre vocabulario y representaciones simbólicas de las matemáticas (Ernest, 1998; Rivera, 1996). En este sentido, el aprendizaje se entiende como un proceso y acto social en el que el alumno se aproxima paulatinamente al comportamiento, vocabulario y conocimiento de una determinada área de conocimiento (Santos, 1997; Schoenfeld, 1992). Aprender matemáticas en un contexto social donde se experimenta su utilidad resulta más significativo, porque sirve de vehículo de comunicación y entendimiento entre los miembros de una sociedad.

De entre los temas que presentan mayor dificultad en el currículo mexicano, se encuentra el aprendizaje de las fracciones. Para entender esta dificultad, es necesario tener en cuenta: *a)* las propiedades de la fracción, tales como homonimia y sinonimia de la representación de la fracción; *b)* los diferentes modelos empleados en la enseñanza, y *c)* el manejo operativo de la fracción (Mancera, 1992).

a) Homonimia y sinonimia de la representación de la fracción. El símbolo *a/b* tiene asociados diversos significados (homonimia), además, el concepto de fracción puede representarse de diferentes maneras (sinonimia). Estas propiedades hacen referencia principalmente a cuatro subconstructos de los números racionales propuestos por Kieren (1981, citado en Mancera, 1992): *1)* relación parte-todo (dividir un entero en diversas partes o repartir un entero entre un determinado número de elementos) y medición (ubicación de una fracción en una recta numérica); *2)* número racional como razón (como índice de comparación entre dos conjuntos independientes); *3)* números racionales como divisiones indicadas, y *4)* número racional como operador (transformación de una cantidad a otra). Estos subconstructos hacen referencia a lo que otros autores han denominado de manera general como interpretaciones o significados de la fracción (Mancera, 1992).

b) Modelos para representar la fracción empleados en la enseñanza. Durante la enseñanza se hace uso de diferentes materiales para representar la fracción (figuras geométricas, rectas numéricas, dibujos que representan a personas y objetos por repartir, etc.), a la par que se plantean problemas con diversos significados que no necesariamente se adaptan a estas formas de representación, por ejemplo, cuando se propone un problema de reparto pero se ha modelado la fragmentación de una figura geométrica. La situación se agudiza cuando se utilizan, además, indiferenciadamente los tipos de cantidades en las que se puede presentar la fracción (discreta o continua, por ejemplo). Este uso arbitrario y confuso de los modelos se ha relacionado con la falta de dominio de las diferentes interpretaciones de la fracción por parte de algunos maestros (Piñón, 1995).

c) Manejo operativo de la fracción. Se ha encontrado (Nunes y Bryant, 1998) que alumnos de primaria, y varios de secundaria, poseen un conocimiento

> rudimentario de las fracciones, pero aparentan comprenderlas ampliamente porque utilizan la terminología de las fracciones y dominan ciertas partes de los procedimientos, aunque no reconocen los problemas en los que éstos pueden ser empleados. Además, los alumnos tratan de aplicar su conocimiento sobre los números enteros para realizar operaciones con fracciones sin comprender las propiedades de éstas. Por ejemplo, mientras que en operaciones con fracciones la obtención del común denominador involucra la reorganización de las cantidades originales, en los números enteros se hace uso del reagrupamiento (Mancera, 1992).

Si la comprensión del concepto fracción y sus modelos es de por sí problemática para alumnos regulares, en alumnos con bajo aprovechamiento la situación se complica. Existen investigaciones (Flores, 1999; Schoenfeld, 1992) que han documentado deficiencias específicas en el área de matemáticas en alumnos con problemas de aprendizaje tales como: conocimientos matemáticos erróneos y fragmentados, razonamientos inconsistentes, errores frecuentes en la realización de operaciones, dificultad en la comprensión del texto del problema, falta de estrategias metacognoscitivas para dirigir el proceso de solución, ausencia de estrategias de apoyo como dibujos o diagramas y la dificultad para identificar la fuente de los errores.

Pese a las dificultades conceptuales implicadas en la comprensión de las fracciones, algunos alumnos intentan resolver problemas usando de los modelos pictóricos (gráficos, dibujos, etc.) que les son familiares y, con ello, prescinden de algoritmos formales. A la sustitución del algoritmo formal por dibujos se le conoce como algoritmo gráfico (Valdemoros, 1997). El uso de estos modelos es útil a los estudiantes para entender la representación simbólica *a/b* de la fracción.

Flores (2005), basándose en la teoría Vergnaud (1990, citado en Flores, 2005), retoma las nociones de campo conceptual, esquema y representación, para proponer un modelo cuyo objetivo es analizar y comprender la evolución de las representaciones que los alumnos elaboran ante un problema. Se parte del análisis del conocimiento matemático que sustenta los razonamientos de los alumnos al entender y solucionar el problema, se tiene en cuenta el empleo de símbolos o representaciones gráficas y simbólicas, así como el empleo de algoritmos. El modelo identifica cuatro etapas:

- *Representación no canónica.* La interpretación del problema es deficiente y la solución propuesta corresponde a un tipo diferente al que se plantea en el problema, lo que conduce a una solución errónea. Es decir, no se comprenden cabalmente las relaciones matemáticas implicadas en el problema y su solución, los alumnos utilizan un procedimiento que no corresponde a lo que el problema plantea.

- *Representación canónica no algorítmica.* La interpretación del problema es correcta y la solución se desarrolla mediante representaciones pictóricas sin llegar a utilizar un algoritmo formal que, en el caso de las fracciones, se diría que es sustituido por un algoritmo gráfico (Valdemoros, 1997).
- *Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico.* La interpretación del problema es correcta y conduce al alumno a utilizar conjuntamente algoritmos y representaciones pictóricas acordes al problema. Los algoritmos y representaciones pictóricas coinciden, pero puede ocurrir que los alumnos no logren explicar por qué los resultados son semejantes.
- *Representación canónica algorítmica.* El alumno comprende el problema y su relación con el algoritmo que va a utilizar para obtener la solución. El alumno puede prescindir de representaciones pictóricas haciendo uso del algoritmo formal.

En este estudio se adoptó este modelo para analizar la solución de problemas por parte de alumnos de secundaria en el tema de fracciones.

EL ESTUDIO

El estudio se desprende de un proyecto mayor. El proyecto constó de 13 sesiones con duración de dos horas por sesión y su objetivo fue que los alumnos, a través de problemas matemáticos, consolidaran sus conocimientos relacionados con las fracciones. El programa fue coordinado por un tutor, cuya función fue apoyar a los alumnos durante la resolución de los problemas. Los participantes fueron seis alumnos con bajo aprovechamiento que asistían a un programa de apoyo extra escolar. Los alumnos pertenecían a diferentes planteles; cinco de ellos eran repetidores del segundo año de secundaria y sus edades estaban comprendidas entre los 14 y 15 años. El tema de fracciones se estaba enseñando a todos los alumnos en sus respectivas escuelas, por esta razón se retomó este tema en los problemas presentados.

Los objetivos del presente estudio fueron, por un lado, analizar los significados que alumnos con bajo aprovechamiento tenían de los conceptos relacionados con la fracción, así como los recursos que pusieron en juego durante la solución de problemas matemáticos y, por el otro, caracterizar la interacción suscitada entre ellos.

En la intervención se adoptaron las principales características del aprendizaje cooperativo (Johnson y colaboradores, citado en Ovejero, 1990; Rivera, 1996; Echeita, 1997):

a) Interdependencia positiva. El aprendizaje es compartido y depende de todos los miembros del grupo.
b) Responsabilidad individual. Se evalúa el dominio de cada estudiante al que se le proporciona retroalimentación sobre su progreso.
c) Interacción cara a cara. Mediante la interacción, se promueven las habilidades sociales necesarias para la colaboración, tales como liderazgo, habilidades de comunicación y habilidades de negociación.
d) Liderazgo compartido. Se promueve que el liderazgo se rote en la medida de lo posible.
e) Existencia de tareas que conduzcan más a *aprender* que sólo a *hacer* algo.
f) Procesamiento de grupo. Al finalizar la tarea, cada miembro del grupo analiza su propio desempeño y el de su grupo.

Considerando las dificultades de los alumnos para estructurar su actividad cognoscitiva durante el proceso de solución, se les proporcionó una tarjeta autoinstruccional que contenía una estrategia de solución que podían adaptar a sus necesidades. La tarjeta instruccional se componía de los siguientes pasos (Flores, 1999; Parra, 2004): leo el problema, lo platico, digo la pregunta, busco los datos, hago un dibujo, escribo los datos en mi dibujo, busco una operación, escribo la operación, resuelvo la operación, compruebo la operación, verifico si ocupé todos los datos, escribo la respuesta completa.

En cada sesión los alumnos trabajaron en la solución de un problema en equipos o entre pares, el tutor intervenía cuando los alumnos daban señales de darse por vencidos y cuando pedían apoyo directamente. El apoyo consistió principalmente en la formulación de preguntas hacia los alumnos para rescatar sus conocimientos matemáticos. Al final de la sesión, cada equipo expuso frente a todos su proceso de solución. A continuación se presenta el análisis de la solución de dos problemas de parte-todo.

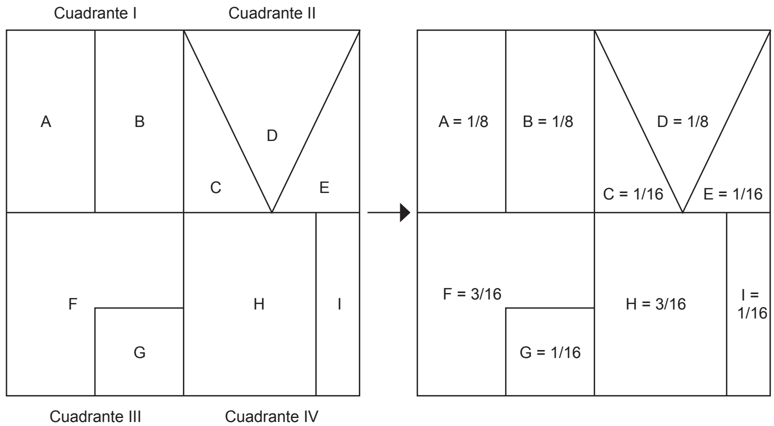

Figura 1 El cuadro fraccionado y su solución

Problema 1

Se presentó a los alumnos un cuadro fraccionado donde debían encontrar el valor de cada una de las partes representadas con letras (en la figura 1 se muestra la solución, los títulos de "cuadrantes" no aparecieron en la hoja original, aquí se emplean para clarificar el diálogo entre los alumnos). En el problema, el significado de las fracciones era de parte-todo y las cantidades eran continuas. En esta situación, un elemento conceptual esencial fue la conservación del entero. Algunas investigaciones (Lima, 1982, citado en Nunes y Bryant, 1998) indican que los alumnos inexpertos no conservan el entero cuando se divide en partes diferentes y presentan dificultades para aceptar, por ejemplo, que un entero se conserva independientemente de si es dividido en diversas fracciones. Además, la mayoría de los alumnos se centran en el número de partes en las que se divide el entero, pero no tienen en cuenta el tamaño de las partes (Dávila, 1992).

El problema fue resuelto en pares, Nicolás y Raymundo trabajaron juntos. De acuerdo con las etapas planteadas por Flores (2005), en el momento de la solución Nicolás tenía conocimientos para una representación no canónica del problema, reconocía que un entero podía dividirse en fracciones, pero la nueva fracción obtenida se convertía en un nuevo entero. Algunas partes del problema representaban valores iguales, pero su forma era diferente; en este caso, Nicolás las consideró de valor diferente por el tamaño que percibió entre ambas. El alumno no podía sostener sus soluciones con argumentos sólidos, lo que lo condujo constantemente a realizar diversos ensayos hasta encontrar uno que le satisficiera. Los algoritmos que empleó fueron desarrollados erróneamente.

Por su parte, Raymundo tenía conocimientos para una solución canónica algorítmica basada en una representación gráfica. Sus conocimientos le permitieron entender la conservación del entero que se obtiene por la suma de las fracciones representadas. Para sostener sus argumentos, hizo trazos que le permitieron realizar un algoritmo gráfico y no consideró necesarios los algoritmos formales, los cuales, sin embargo, utilizaba si así se le pedía. A continuación se presentan fragmentos del diálogo que sostuvieron ambos alumnos. Se transcriben las palabras tal y como fueron mencionadas, pero debido a la complejidad del diálogo, se hacen anotaciones entre paréntesis y algunas figuras para aclarar la manera en la que la respuesta fue estructurada.

Ambos alumnos dialogaron sobre el cuadrante II (CDE). Raymundo, basado en sus conocimientos previos, dedujo el valor correcto de D (1/8) y los valores de C (1/16) y E (1/16). Por su parte, Nicolás propuso valores en doceavos que no pudo sostener con argumentos sólidos e intentó comprobar la afirmación de su compañero midiendo con su lápiz el vértice inferior formado por D, y encontró que era el punto medio del cuadrante II:

RAYMUNDO: Éste es 1/8 ($D = 1/8$).

NICOLÁS: Éste es 1/12 ($C = 1/12$) y éste 1/12 ($E = 1/12$) y éste es 2/12 ($D = 2/12$).

RAYMUNDO: Pero éste está a la mitad (*se refiere al vértice inferior del triángulo D, Nicolás mide con su lápiz para comprobarlo*). Si es la mitad entonces es 1/16 ($C = 1/16$) y éste es 1/16 ($E = 1/16$).

Raymundo consideró que los cuatro cuadrantes formaban el entero y, a su vez, que las partes contenidas dentro de un cuadrante formaban 1/4. Por su parte, Nicolás se guió por el tamaño percibido de las fracciones para darle un valor y, como no pudo sostener su respuesta, retiró su argumento y discutió sobre la propuesta hecha por Raymundo abarcando otros cuadrantes (figura 2):

NICOLÁS: Entonces éste es 1/16 (*escribe* $G = 1/16$) y éste también es 1/16 (*escribe* $I = 1/16$), y éste es 1/8 ($C = 1/8$) y éste es 1/8 ($E = 1/8$), porque son más grandes.

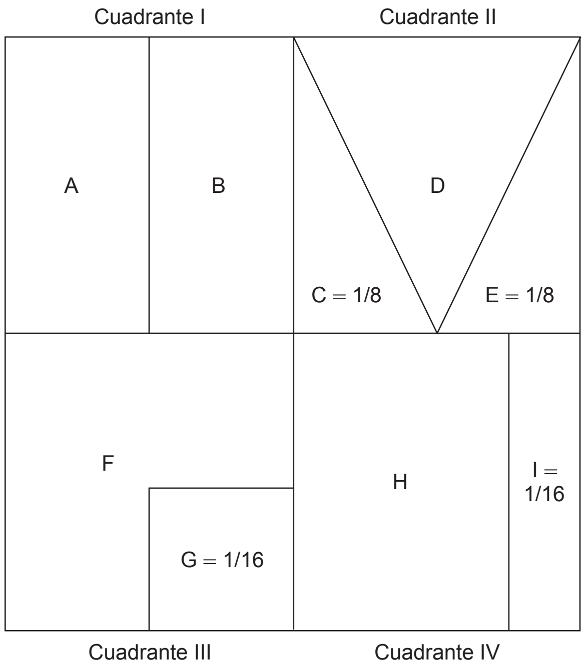

Figura 2 Solución de Nicolás

Aunque Nicolás retomó la propuesta de su compañero, se basó nuevamente en su percepción para asignar valores a las fracciones. Nicolás dio muestra de su falta de comprensión para conservar el entero como unidad, Raymundo identificó la confusión de su compañero e intentó explicar que cada cuadrante tenía el valor de 1/4, considerando que los cuatro formaban la unidad, es decir, resaltó la conservación del entero:

RAYMUNDO: Pero éste (*señala el cuadrante II*) es 1/4. Éste es 1/16 (*I = 1/16*), con éste (*señala H*) sería el cuarto (*se refiere a que H + I = 1/4*), faltaría el H nada más.
NICOLÁS: ¿H = 1/16?
RAYMUNDO: No. I = 1/16, falta H, en éste (*H*) cabe éste (*I*) tres veces (*dibuja tres líneas verticales para dividir en tres partes iguales a H*) *y se suman* (figura 3).

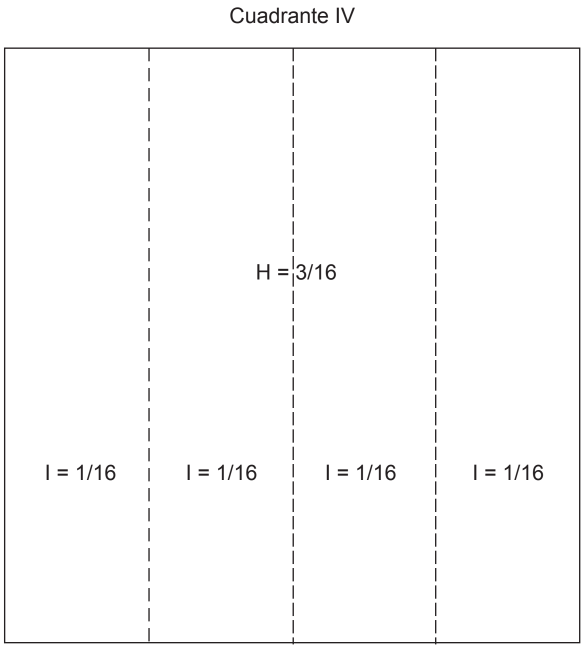

Figura 3 Solución de Raymundo

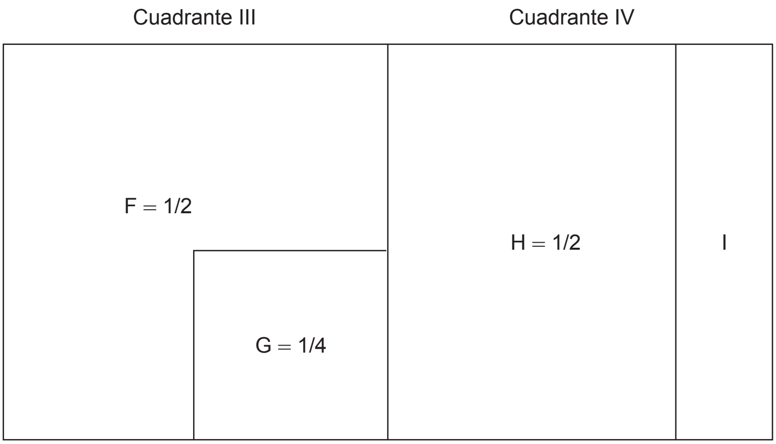

Figura 4 Solución de Nicolás

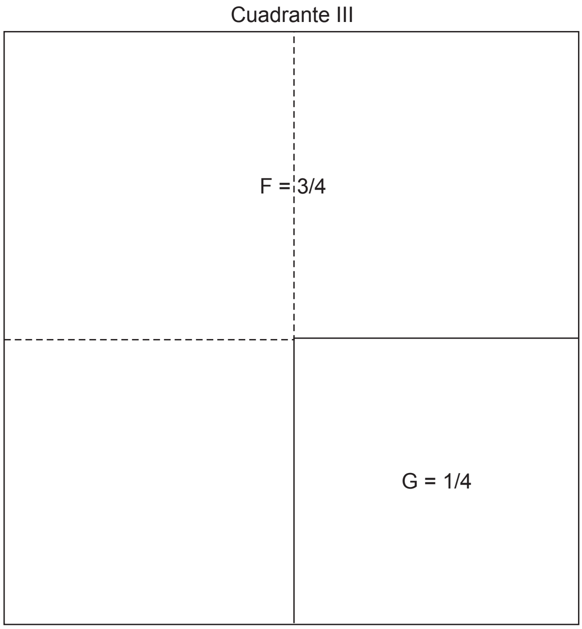

Figura 5 Solución de Nicolás

Raymundo tenía clara la conservación del entero, sabía que cada cuadrante equivalía a una cuarta parte del entero y, apoyándose con el trazo de líneas, intentó dar a entender que el cuadrante IV podía dividirse en cuatro partes iguales; partiendo del valor de I = 1/16, deduce que H podía dividirse en tres segmentos I, de tal manera que H = 1/16 + 1/16 + 1/16 = 3/16. Sin embargo, no pudo convencer a Nicolás y el problema siguió sin ser resuelto:

NICOLÁS: (*Sin argumentar algo, borra las líneas dibujadas por Raymundo*).
RAYMUNDO: Éste (*I*) es 1/16.
NICOLÁS: (*Refiriéndose a I*) Pero eso quiere decir que está agarrando una parte de 16 (*señala todo el cuadro en su totalidad*), pero éste (*F*) y éste (*H*) es 1/2; y éste (*G*) es 1/4 (figura 4).

Nicolás comenzó a tratar los cuadrantes como enteros independientes asignando a F y H el valor de un medio a cada uno, pero reconoció que G es una cuarta parte de F, por ello le asignó el valor de un cuarto (G = 1/4). Nicolás no encontró argumentos para sostener su propuesta y centró la discusión en el cuadrante III, retomando la propuesta inicial de Raymundo donde G = 1/16.

NICOLÁS: Éste vale 1/16 (*señala G*) ¿y éste? (*señala F*).
RAYMUNDO: Todo esto vale 1/4 (*señala el cuadrante III*) y éste (*G*) cabe tres veces aquí (*señala F*).
NICOLÁS: Entonces éste (*F*) vale 3/4 (*cambia el valor de F de 1/2 a 3/4 como se muestra en la figura 5*).
RAYMUNDO: No. Son cuatro (*traza líneas para dividir el cuadrante III en cuatro partes iguales*) es como aquí (*discuten el cuadrante IV nuevamente*).

Raymundo continuó sin perder de vista la relación entre el cuadrante y el entero en su totalidad. Mientras que Nicolás no conservó el entero y continuó tratando el cuadrante como entero independiente de toda la figura, de ahí retomó la idea de su compañero y propuso que, si el cuadrante III podía dividirse en cuatro partes iguales, entonces G = 1/4; y los tres cuadros restantes que forman F equivaldrían a 3/4. Nuevamente Nicolás no encontró argumentos para explicar su punto de vista.

Los alumnos continuaron trabajando en la tarea, pero no lograron ponerse de acuerdo. Cuando se les pidió que explicaran a todo el grupo su solución, Nicolás continuó sin conservar el entero. El tutor identificó la problemática y, a través de preguntas a todo el grupo, se llegó a la conclusión de que cada cuadrante tenía un valor de 1/4 y, con base en ello, Nicolás se animó a resolver el cuadro ante todo el grupo, pero aplicando un algoritmo formal cuya utilización fue errónea. En lugar de utilizar una división de fracciones, realizó una multiplicación (solución no canónica), pero además se hizo presente la confusión de los procedimientos de multiplicación y de división en todos los miembros del grupo, por ello, el tutor decidió retomar la propuesta inicial de realizar la multiplicación a fin de que los alumnos recordaran el procedimiento de la multiplicación de un número entero y una fracción propia. Una vez hecho esto, se le pidió a Nicolás que realizara la operación inicial, la cual resolvió correctamente obteniendo como resultado 2/4, pero la reducción fue incorrecta (1/8) debido a que Raymundo manifestó que el valor de A y B debía ser de 1/8 cada uno, pero Nicolás no pudo argumentar su respuesta (figura 6).

TUTOR: ¿Por qué es 1/8?
NICOLÁS: Porque son dos cuartos (*señala A y B*).
TUTOR: ¿Me lo puede demostrar?

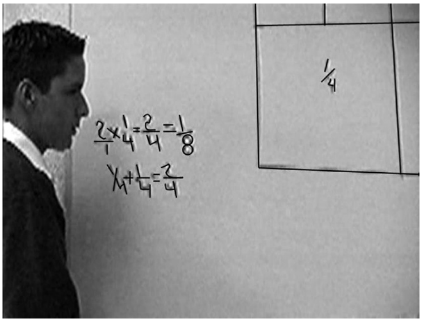

Figura 6 Solución por medio de una multiplicación

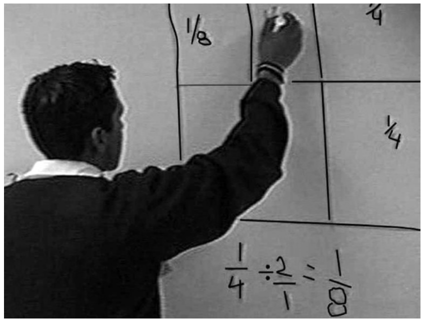

Figura 7 Solución por medio de una división

Nicolás escribió en el pizarrón 1/4 + 1/4 = 2/4 (figura 6), se le apoyó para reducir el término a 1/2 y se dio cuenta de que su resultado no podía ser el valor del cuadrante I.

Para apoyar a Nicolás, el tutor comenzó a preguntar cómo se obtuvieron los cuadrantes a fin de que los alumnos se dieran cuenta de que la operación requerida era una división.

TUTOR: Hace un momento puse el cuadro, ¿qué tuvimos que hacer para obtener los cuartos (*todos los cuadrantes*)?
DAVID: Lo dividimos en cuatro.
TUTOR: Muy bien. ¿Y qué hicimos para obtener la parte A y la parte B?
RAYMUNDO: Lo dividimos (*al cuadrante I*) en dos.
TUTOR: Muy bien, entonces, ¿qué operación debemos realizar para saber el valor de A y B?
DAVID: Una división.
RAYMUNDO: Tenemos que dividir 1/4 entre 2.
NICOLÁS: No puede ser 1/2 (*refiriéndose a su último resultado*) tenemos que dividir (*el cuadrante I*) entre dos.
TUTOR: ¡Ah!, ¡Tenemos que dividir!, antes dijiste que teníamos que multiplicar.
Nicolás: No... Tenemos que dividir.
TUTOR: Si dividimos este cuarto (*cuadrante I*) entre dos, ¿cuánto vale A y cuánto B?
NICOLÁS: 1/8.
TUTOR: Muy bien, ahora demuéstramelo en el pizarrón.

NICOLÁS: Tenemos que dividir (*escribe 1/4 entre 2, resuelve la operación y obtiene 1/8 como se muestra en la figura* 7) cada una vale 1/8 (*A y B*). ¡Ah!, yo estaba multiplicando y se tiene que dividir.

TUTOR: Muy bien.

NICOLÁS: Ya lo sabía, no me enseñaste nada.

Finalmente, Nicolás continuó con la solución del cuadro hasta terminarlo empleando algoritmos formales.

La interacción presentada se llevó a cabo entre dos alumnos que tenían diferentes representaciones del concepto de fracción. Por un lado, Nicolás con una representación no canónica y, por el otro, Raymundo con una representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmica (utilizó en un principio un algoritmo gráfico). La actividad puso de manifiesto ciertas invariantes de los alumnos (Flores, 2005) en el uso del concepto, las cuales se mantuvieron a lo largo de la interacción. Por un lado, Raymundo no perdió la conservación del entero y utilizó representaciones gráficas para explicar su punto de vista a Nicolás, quien no conservaba el entero. Sin embargo, el desarrollo de la actividad colocó a Nicolás en una situación de conflicto en su intento de hacer públicas sus soluciones para ser valoradas y, con ello, buscar nuevos argumentos para sostenerlas, pero no logró que Raymundo lo comprendiera, por lo que comenzó a considerar otra posible solución (Ernest, 1998). La manifestación del conocimiento de cada alumno le fue de gran utilidad a Raymundo para detectar la problemática de su compañero e intentar explicar su punto de vista con sus propios recursos.

Asimismo, comprender el significado que los alumnos le dieron al problema sirvió al tutor para: *a)* comprender la conceptuación que los alumnos tenían de la fracción con respecto al entero: para Raymundo un entero podía dividirse en fracciones, de la misma manera, una fracción podía dividirse en otras fracciones más y la suma de éstas siempre era un entero. Mientras que para Nicolás, un entero podía dividirse en fracciones, pero cada una de ellas se convertía en un nuevo entero posible de fraccionar. *b)* Dar apoyos necesarios a los alumnos en la comprensión del concepto de fracción que les permitiera continuar con la solución del problema. La correcta solución del problema no fue en sí misma el objetivo de los apoyos, sino promover la comprensión y desarrollo de un concepto matemático para pasar de una fase inicial de representación no canónica hasta una más desarrollada.

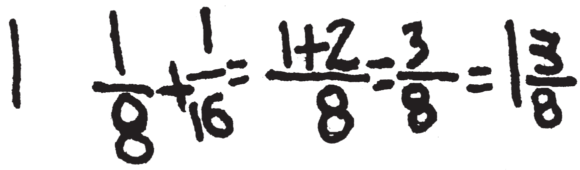

Figura 8 Primera solución

PROBLEMA 2

Se presentó a los alumnos un problema parte-todo tomado de un libro de texto de matemáticas de secundaria (Waldegg, Villaseñor y García, 1998, pp. 79-80) cuya solución no era obvia ni directa. El problema presentaba la cantidad 1/4 como único dato numérico, las otras cantidades se encontraban implícitas, pero el entero era completamente desconocido. El valor del entero que había que encontrar podía referirse a una cantidad discreta si el resultado final (cuatro litros) era considerado como cuatro elementos independientes. También podía referirse a una cantidad concreta si se consideraba que los cuatro litros se encontraban en un mismo recipiente, esta última opción fue la utilizada por los alumnos. El texto del problema fue el siguiente:

> –¡Cómo! ¿Ya no hay leche? –preguntó la madre asombrada–. Si ayer compré suficiente para la cena.
> –La mitad la usó la abuela para el arroz con leche –dijo Rosita–.
> –Bueno, yo usé la mitad de la que quedó para los licuados esta mañana –dijo Martha–.
> –Acuérdate de que al medio día ocupaste la mitad de la que había para el flan –aclaró Javier–.
> –Y yo me tomé la mitad de la que quedaba esta tarde, mientras veía la televisión –agregó Juanito–.
> –¿Y sólo queda 1/4 de litro? –preguntó el padre–, pues ¿cuánto compraste ayer?

El problema se solucionó en equipos de tres alumnos. En la figura 8 se muestra la primera solución de un equipo. Inicialmente, los alumnos dieron una solución no canónica: realizaron una adición de fracciones basados en una interpretación que no correspondía a lo que el problema pedía. En la interacción con el tutor, los alumnos no pudieron sostener su solución. Cabe destacar también que se presentaron problemas en el procedimiento formal en la suma de fracciones en la obtención del común denominador.

El tutor comenzó por preguntar la manera en la que llegaron a esa solución:

RAYMUNDO: El problema dice que quedaba un cuarto, pero se tomó la mitad, entonces la mitad de 1/4 es 1/8 y el problema dice que se volvió a tomar la mitad, y sacamos la mitad de 1/8 que es 1/16, después sumamos las fracciones y nos dio 13/8.

TUTOR: Veo que colocaron al principio de su suma el número uno. ¿Por qué lo pusieron?

NICOLÁS: Porque es un litro.

TUTOR: Bien. ¿El problema menciona en algún lado un litro? (*leen el problema nuevamente en silencio*).

ELÍAS: No. Pero se supone que está hablando de un litro, porque de ahí fueron tomando leche.

TUTOR: Ustedes dan por hecho que había un litro ¿verdad?

TODOS: Sí.

Aunque los alumnos eran capaces de reconocer el valor de una fracción cuando se dividía a la mitad, su comprensión del problema presentó la principal dificultad. En la argumentación de los alumnos se distingue una concepción referida a los problemas matemáticos donde se considera que en éstos siempre debe haber un entero como dato explícito a partir del cual comenzar la fragmentación. Quizá por esta razón los alumnos comenzaron con 1/4 como si se tratara del entero inicial al que fraccionaron y esta concepción pudo haberlos llevado a añadir en su operación un litro, es decir "el entero" que "siempre" aparece en los problemas.

Un aspecto importante por resaltar es que el problema, a pesar de que contenía valores fraccionarios y narración cotidianos, requería para su solución un procedimiento en retrospectiva, esto es, debía dejar de pensarse en un valor inicial (el entero) del cual se parte para fraccionarlo y, en su lugar, se requería comenzar por sumar la fracción más pequeña con las demás partes hasta obtener el valor del entero. Esta manera de proceder, como se muestra a continuación, fue posible gracias al uso de un algoritmo gráfico.

Después de la argumentación de los alumnos, el tutor pidió la justificación del algoritmo empleado y solamente obtuvo argumentos inconsistentes. Entonces,

Figura 9 Solución por medio de un algoritmo gráfico

el tutor intentó que los alumnos vincularan sus conocimientos cotidianos con el problema y así valoraran la posibilidad de otra solución:

TUTOR: Sin embargo, su resultado final dice que compraron 13/8. ¿Cuál es la respuesta correcta un litro o un litro y tres octavos? (*los alumnos piensan y no responden*). ¿Es posible que en la tienda nos vendan 13/8 de leche?

NICOLÁS: No... Entonces la respuesta correcta es un litro.

TUTOR: Dime, Nicolás, ¿cuántos litros de leche llegan a comprar normalmente en tu casa para toda la familia?

NICOLÁS: Como tres.

TUTOR: ¡Eso es! Entonces no necesariamente debe haber solamente un litro en el problema. ¿Qué les parece si comprobamos su respuesta?

Los alumnos continuaron resolviendo el problema por cuenta propia y en una segunda solución volvieron a su primer algoritmo, pero se dieron cuenta del error en el procedimiento y, aunque lo rectificaron, el resultado no los convenció (13/16). En una tercera solución buscaron otros datos numéricos en el problema y volvieron a su planteamiento original de transformar 1/4 considerándolo como un entero, pero se dieron cuenta de que volverían al algoritmo inicial que no era una opción correcta de solución. Antes de que los alumnos se desanimaran, el tutor interactuó con ellos guiándolos en el uso de la tarjeta instruccional que no había sido tenida en cuenta para solucionar el problema. En el paso 5, "hago un dibujo", los alumnos comenzaron a intercambiar ideas y el tutor se alejó para supervisar el avance de otro equipo. Momentos después obtuvieron la respuesta correcta por medio de un algoritmo gráfico consistente con lo que pedía el problema (figura 9). Esto es, los alumnos llegaron a una representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico.

El tutor entonces pidió al equipo que justificara su solución frente al grupo.

TUTOR: ¿Cómo llegaron a este resultado?

RAYMUNDO: Como no sabemos el total de litros, dibujamos un entero y lo fuimos dividiendo como lo decía el problema y le pusimos el nombre de las personas que tomaron leche y al final nos quedó el cuarto que sobró.

NICOLÁS: Al final vimos que el cuarto (*1/4*) se parecía a lo que Juanito se había tomado, entre los dos daba como resultado 1/2, y sumándolo con lo que se tomó Javier nos da un litro, que es lo mismo que usó la mamá, eso quiere decir que llevamos dos (*litros*) y con lo de la abuela nos salieron cuatro litros.

En esta ocasión, los alumnos resolvieron el problema analizándolo en retrospectiva, comenzaron con un todo desconocido que dividieron basándose en la narración del problema hasta llegar a 1/4 como la porción más pequeña. A partir de ella y con apoyo de su dibujo y su conocimiento de la transformación de fracciones, hicieron cálculos para obtener el resultado final, pero esta vez las fracciones no fueron divididas a la mitad, sino que fueron sumadas por sí mismas.

Con la intención de que los alumnos desarrollaran una solución algorítmica, el tutor propuso continuar con el paso 7, "busco una operación", de la tarjeta autoinstruccional, pero se encontró con obstáculos para lograrlo, pues los alumnos consideraron que deberían encontrar una sola operación para obtener el resultado. Finalmente, sumaron las fracciones indicadas en su dibujo y obtuvieron el mismo resultado final.

CONCLUSIONES

El aprendizaje cooperativo en la solución de problemas matemáticos propició que los alumnos manifestaran las invariantes que poseían sobre el concepto de fracción y su interpretación del problema, información que posibilitó al tutor para adecuar su apoyo al desarrollo cognitivo de los alumnos. El aprendizaje cooperativo permitió también que los alumnos expresaran y argumentaran propuestas de solución para ser consideradas por los demás compañeros a fin de compartir conceptos que les permitieran experimentar nuevas soluciones y, con ello, desarrollar nuevos conocimientos.

Las principales problemáticas encontradas en los alumnos se pueden agrupar en tres categorías: el concepto de fracción, los procedimientos rutinarios de operaciones con fracciones y las concepciones sobre problemas con fracciones. En primer lugar, se encontraron dos diferentes conceptos de fracción relacionados con la conservación del entero. Por un lado, quien conservaba el entero tenía el conocimiento de que éste podía fraccionarse en diversas partes y cada una de ellas era susceptible de fraccionarse también, pero continuaban siendo parte del mismo entero, de tal manera que la suma de todas las partes daba como resultado el entero. Por otro lado, quien no conservaba el entero tenía el conocimiento de que un entero podía fraccionarse, pero cada fracción se "convertía" en un nuevo entero independiente del original, susceptible de ser fraccionado también. A pesar de tratarse de alumnos de secundaria, algunos presentaron aún el problema de la conservación del entero encontrado en alumnos de primaria (Nunes y Bryant, 1998).

En segundo lugar se encontraron problemáticas sobre los procedimientos rutinarios. Los alumnos presentaron problemas para recordar los procedimientos sobre la obtención del común denominador, además, confundieron el procedimiento de la multiplicación con el de la división. Durante la suma con fracciones, fue notoria la dificultad para comprender la relación entre numerador y denominador, los cuales fueron sumados como si fueran enteros sin alguna relación entre sí. Los conocimientos de los procedimientos de operaciones con fracciones no son suficientes si no se interpreta de una manera adecuada el problema.

En tercer lugar, se desprendieron algunas concepciones de los alumnos sobre los problemas con fracciones. Concepción 1: el valor del entero siempre es uno. Los problemas hacen referencia a un entero cuyo valor es uno, no se consideró inicialmente la posibilidad de un entero con valor mayor. Concepción 2: al resultado se llega con una sola operación. El resultado final se obtiene con aquella operación que involucre todos los valores detectados en el texto del problema. Concepción 3: la única cantidad mencionada en el problema equivale al entero. Si el problema menciona aparentemente una sola cantidad, entonces la solución comienza con tratar tal cantidad como si fuera el entero.

En este sentido, puede inferirse que los alumnos estaban habituados a una enseñanza centrada en los procedimientos algorítmicos de los ejercicios y su posterior aplicación a problemas matemáticos sin considerar otras posibles estrategias de solución. Sin embargo, los problemas utilizados en este estudio exigieron de los alumnos un pensamiento matemático que no se limitó al mero uso de algoritmos formales, sino que demandó el análisis de la pertinencia de tales algoritmos para resolver el problema. El proceso de solución requirió también el empleo de otros apoyos como dibujos y trazos, además de los conocimientos previos y cotidianos de los alumnos para proponer estrategias de solución y valorar el resultado final.

Con lo anterior se evidencia que la enseñanza por medio de problemas matemáticos no se limita a la obtención del resultado correcto mediante procedimientos fijos, sino que promueve, en los alumnos, el tránsito de una representación actual de conceptos y problemas matemáticos a otra más desarrollada. De la misma manera, un problema no agota las posibilidades de aprendizaje, es necesario continuar proveyendo a los alumnos de problemas variados que les permitan proponer procesos de solución acordes a lo planteado en los problemas y les permita desplegar una serie de recursos cognitivos durante la interacción con otros compañeros a fin de desarrollar su pensamiento matemático y, de esta manera, fortalecer sus conocimientos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dávila, M. (1992), "El reparto y las fracciones", *Educación Matemática,* vol. 4, núm. 1, pp. 32-45.

Echeita, G. (1997), "El aprendizaje cooperativo. Un análisis psicosocial de sus ventajas respecto a otras estructuras de aprendizaje", en B. Pablo y M. Ángeles (comps.), *La interacción social en contextos educativos,* 3a. edición, México, Siglo XXI, pp. 167-189.

Ernest, P. (1998), "The Culture of Mathematics Classroom and the Relations between Personal and Public Knowledge: An Epistemological Perspective", en Falk Seeger, Jörg Voigt y Ute Waschescio (eds), *The Culture of the Mathematics Classroom,* Cambrige University Press.

Flores, R. (1999), "La enseñanza de una estrategia de solución de problemas a niños con problemas de aprendizaje", *Integración, Educación y Desarrollo Psicológico,* vol. 11, núm. 11, pp. 1-17.

——— (2005), "El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas", *Educación Matemática,* vol. 17, núm. 2, pp. 7-34.

Jones, E., R. Wilson y Bhojwani (1997), "Mathematics Instruction for Secondary Students with Learning Disabilities", *Journal of Learning Disabilities,* vol. 2, pp. 151-163.

Mancera, E. (1992), "Significados y significantes relativos a las fracciones", *Educación Matemática,* vol. 4, núm. 2, pp. 30-54.

Nunes, T. y P. Bryant (1998), *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño,* 2a. ed., México, Siglo XXI.

Ovejero, A. (1990), *Métodos de aprendizaje cooperativo,* Barcelona, Promociones y Publicaciones Universitarias.

Parra, M. (2004), "La instrucción por medio de problemas dentro de una comunidad de aprendizaje matemático", tesis de maestría, UNAM.

Piñón, M. (1995), "Las fracciones en la escuela", *Pedagogía,* vol. 10, núm. 5, pp. 58-65.

Rivera, P. (1996), "Using Cooperative Learning to Teach Mathematics to Students with Learning Disabilities", documento en línea, disponible en http://www.ldonline.org/ld_indepth/math_skills/coopmath.html

Santos, L. (1997), *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas,* 2a. ed., México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. (1992), "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics", en Douglas Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the NCTM,* Estados Unidos, Macmillan, pp. 334-370.

SEP (1993), *Plan y programas de estudio, Educación Básica Secundaria,* México, SEP.

Valdemoros, M. (1997), "Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones; estudio de caso", *Educación Matemática,* vol. 9, núm. 3, pp. 5-17.

Waldegg, G., R. Villaseñor y V. García (1998), *Matemáticas en contexto. Aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas,* Primer curso, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

DATOS DE LOS AUTORES

Miguel Ángel Parra Álvarez
Alumno de doctorado en el programa de Psicología Educativa y del Desarrollo, Universidad Nacional Autónoma de México, México
miguelapa71@yahoo.com.mx

Rosa del Carmen Flores Macías
Profesora de tiempo completo, Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México, México
rosadelcarmen@yahoo.com