Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE

Darly Kú, María Trigueros y Asuman Oktaç

Resumen: Apoyándonos en la teoría APOE (acción-proceso-objeto-esquema), presentamos una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial. En ella se presenta un conjunto de construcciones mentales que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión de este concepto. Nos enfocamos en el concepto de base en álgebra lineal, ya que consideramos que es una componente relevante en el estudio de los espacios vectoriales y en sus aplicaciones, y resulta difícil de aprender para los estudiantes. Para dar datos de las posibles construcciones mentales asociadas al aprendizaje del concepto, se diseñó una entrevista que nos permitió analizar el proceso de construcción del concepto y determinar las dificultades que surgen a raíz de su aprendizaje.

Palabras clave: aprendizaje del álgebra lineal, base, teoría APOE, construcciones mentales.

Abstract: This paper addresses the question of how students learn the concept of basis of a vector space. Based on APOS theory (Action-Process-Object-Schema) we present a genetic decomposition of this concept. In it, the set of mental constructions that students might make in order to give meaning to the concept of basis are described. We center our attention on the concept of basis of in Linear Algebra, since it is of fundamental importance in the study of vector spaces and their applications and at the same time students have many difficulties when trying to learn it. In order to test the viability of the proposed mental constructions we designed an interview which was helpful in analyzing students' responses in terms of the constructions they had made after taking a linear algebra course. Results of the analysis show the specific difficulties associated with the construction of this concept.

Keywords: linear algebra learning, basis, APOS theory, mental constructions.

Fecha de recepción: 2 de abril de 2008.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre álgebra lineal han identificado una gama de dificultades acerca de su enseñanza y aprendizaje, debidas en gran medida al carácter abstracto de esta rama de las matemáticas o a la complejidad de los conceptos de los que trata. Las dificultades que muestran los estudiantes en cuanto a su aprendizaje se asocian en general con una incorrecta apropiación de los conceptos. Esto hace que, en ocasiones, los estudiantes sean incapaces de responder adecuadamente las preguntas que requieren un dominio básico de los conceptos de esta disciplina.

Desde nuestra perspectiva, el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal debe empezar por el establecimiento de las relaciones adecuadas entre los conceptos conocidos, necesarios en la construcción de los nuevos conceptos. Creemos que si el estudiante logra construir dichas relaciones, podrá alcanzar una mejor comprensión de los conceptos que se introducen en un curso de álgebra lineal. En esta construcción centramos la atención.

La investigación que informamos en este trabajo se centra en la comprensión de un concepto importante del álgebra lineal: el concepto de base de un espacio vectorial. Por una parte, este concepto constituye un elemento fundamental de la estructura de un espacio vectorial y, por otra, guarda una relación primordial con otros conceptos de esta disciplina.

La pregunta general de investigación que guía este trabajo puede plantearse como: ¿Qué construcciones han desarrollado los estudiantes universitarios acerca del concepto de base de un espacio vectorial después de haber cursado la materia de álgebra lineal? Para responderla, presentamos en primer término los antecedentes de investigación sobre el aprendizaje del concepto de base, el marco teórico que utilizamos en el diseño y análisis de los instrumentos desarrollados para llevarla a cabo y los principales resultados obtenidos. Terminamos este trabajo proponiendo algunas sugerencias que pueden ser de utilidad en la enseñanza de este concepto.

ANTECEDENTES

En relación con la comprensión del concepto de base, hay poca información en la literatura. Entre las investigaciones que se relacionan con el concepto de base y con los elementos que lo componen (conjunto generador e independencia lineal), se pueden citar las que mencionamos a continuación. Chargoy (2006) utiliza como marco de referencia los modos de pensamiento de Sierpinska (2000) y registra las dificultades que tiene un estudiante para entender el concepto de base de un espacio vectorial a partir de un contexto geométrico. El trabajo de Da Silva y Lins (2002) se enfoca en el análisis de las producciones de significados para la noción de base en álgebra lineal y utiliza como sustento el marco teórico de los campos semánticos, en el que se pretende caracterizar la existencia de un significado producido en una actividad dada, es decir, se distingue lo que una persona puede decir y lo que realmente dice de un objeto en una actividad dada. En este trabajo, los autores realizaron un estudio histórico crítico, un estudio de libros de texto y un estudio con estudiantes, a fin de indagar acerca de la manera como se aborda el concepto de base de un espacio vectorial y concluyen que es necesario tomar conciencia de la existencia de los distintos significados que encontraron y utilizarlos como punto de partida al desarrollar nuevos métodos para el aprendizaje y enseñanza del concepto de base de un espacio vectorial. Por último, Nardi (1997) estudia las dificultades conceptuales y de razonamiento del matemático principiante (estudiantes de matemáticas de primer año), en su encuentro con la abstracción matemática y aborda, como parte de su proyecto, los conceptos de espacio generado y conjunto generador en álgebra lineal. En su investigación, informa que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de los conceptos de conjunto generador y espacio generado y, en particular, que los estudiantes participantes en el estudio mantenían una imagen conceptual de un conjunto generador como una base.

Cada una de las investigaciones anteriores aborda el problema desde distintos planteamientos, centrándose, en general, en encontrar las dificultades que los estudiantes enfrentan en relación con la comprensión del concepto de base y de los elementos que la componen (conjunto generador e independencia lineal).

Existe, por otra parte, una propuesta alternativa relacionada con la comprensión de los conceptos en álgebra lineal que nos parece interesante; nos referimos a la que plantea Dubinsky (1997), quien propone que los estudiantes deben construir sus propias ideas acerca de los conceptos del álgebra lineal de tal manera que las puedan utilizar en el momento en el que requieran esa información. Para lograrlo, conjuntamente con un grupo de investigadores, desarrolló una propuesta didáctica específica que cubre los temas usuales de un curso de álgebra lineal con base en la teoría APOE (acción-proceso-objeto-esquema) (Weller *et al.*, 2002).

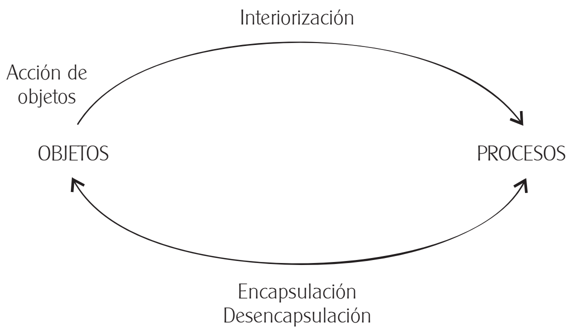
En el marco de esta misma teoría, y como parte de un proyecto de grupo cuyo interés es la investigación sobre el aprendizaje de los distintos conceptos del álgebra lineal, se han desarrollado varias investigaciones (Manzanero, 2007; Oktaç *et al.*, 2006; Trigueros *et al.*, 2007; Vargas, 2007) en las que se han hallado resultados importantes acerca del aprendizaje de diferentes conceptos del álgebra lineal. Puesto que este estudio se enmarca también en esta teoría, a continuación se describen sus elementos primordiales.

MARCO TEÓRICO: TEORÍA APOE

Puesto que en esta investigación nos interesa comprender la manera como los estudiantes construyen el concepto de base, un marco conceptual apropiado es la teoría APOE. Acerca de la naturaleza del conocimiento matemático y su desarrollo en un individuo, Dubinsky afirma:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996).

En esta afirmación se mencionan los elementos más importantes que permiten discernir la manera en la que un estudiante comprende un concepto matemático y los cuales constituyen la parte fundamental de la teoría APOE: las estructuras mentales acción, proceso, objeto y esquema. En el siguiente esquema se muestran de manera general las estructuras mentales que entran en juego en la construcción de un concepto matemático, las cuales se explicarán a continuación.



Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos por seguir (Asiala *et al.*, 1996). Cabe recalcar que la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la construcción de un concepto.

Cuando una acción, o una serie de acciones, se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso (Asiala *et al.*, 1996). Así, el individuo puede pensar en un concepto en términos generales y sin necesidad de hacer cálculos explícitos.

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo, realiza las transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces ha encapsulado este proceso en un objeto (Asiala *et al.*, 1996).

Con respecto al esquema, se puede decir que un esquema para un concepto en matemáticas es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas relacionados entre sí, consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, que se pueden utilizar en una situación problemática que tiene relación con ese concepto matemático (Trigueros, 2005). La coherencia se refiere a que el estudiante puede decidir si alguna situación matemática puede trabajarse utilizando el esquema.

En la teoría APOE el mecanismo para pasar de una concepción a otra es la abstracción reflexiva, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan sobre un objeto de conocimiento, o sobre las relaciones entre distintos objetos, procesos o esquemas.

La construcción de un concepto matemático requiere la construcción de concepciones de los tipos antes mencionados, pero esas concepciones no siguen necesariamente una secuencia lineal. Un individuo puede tener durante mucho tiempo concepciones intermedias o incluso tener una concepción de un tipo para algunos aspectos de un concepto y de otro para otros aspectos del concepto. Sin embargo, hay que subrayar que la forma de trabajo que un individuo pone de manifiesto frente a distintas situaciones problemáticas es diferente cuando responde de una manera que puede caracterizarse en la teoría como un proceso, un objeto o bien una acción (Trigueros y Oktaç, 2005).

En APOE se cuenta con un elemento que permite dar una descripción idealizada de las representaciones, vínculos, objetos, procesos y acciones esperadas. Este elemento se llama *descomposición genética*. Ésta consiste en una hipótesis sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un concepto. La descomposición genética se pone a prueba con los estudiantes y los datos que se obtienen pueden aprovecharse para refinarla a fin de dar cuenta de mejor manera de las construcciones de los estudiantes al aprender dicho concepto (Dubinsky, 1991), y también se puede utilizar como una guía en el diseño de material didáctico.

Cabe mencionar que es posible que distintas descomposiciones coexistan para un mismo concepto, pero es importante que cualquier descomposición genética del concepto matemático sea un instrumento que describa efectivamente las observaciones de los trabajos de los estudiantes (Trigueros y Oktaç, 2005).

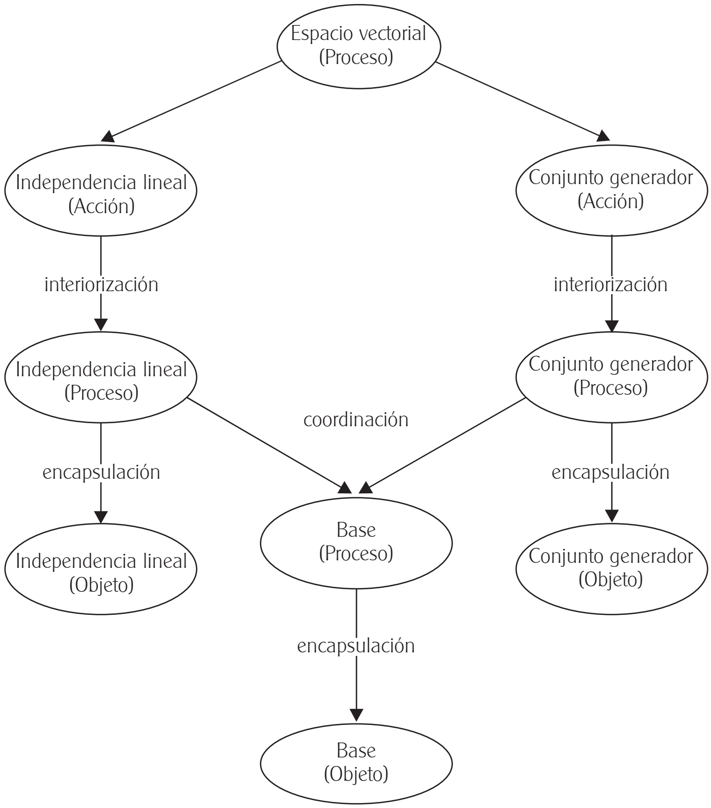
Desde este presupuesto teórico presentaremos:

- Una descomposición genética para la construcción del concepto de base de un espacio vectorial.
- Un diseño de entrevista basado en la descomposición genética, el cual pretende determinar las construcciones mentales que los estudiantes han hecho con respecto al concepto de base de un espacio vectorial después de haber llevado un curso de álgebra lineal.
- Los resultados principales de la investigación, donde se muestran los modelos de pensamiento empleados por los estudiantes en relación con este concepto, y las dificultades que surgen referente al aprendizaje del concepto de base de un espacio vectorial.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial

Con el propósito de comprender la manera como los estudiantes construyen el concepto de base de un espacio vectorial y teniendo en cuenta los resultados de trabajos previos de investigación, en esta sección proponemos una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial. Primero la presentamos de manera esquemática y, posteriormente, explicamos con detalle sus componentes.



Para construir el concepto de base de un espacio vectorial *V*, un individuo deberá mostrar una concepción proceso del concepto de espacio vectorial, lo que incluye un buen manejo de las operaciones entre vectores, incluida la multiplicación por un escalar. Según Trigueros y Oktaç (2005), la construcción del concepto de espacio vectorial empieza con acciones realizadas sobre los elementos de un conjunto *V* utilizando operaciones binarias, para verificar si se satisfacen cada uno de los axiomas que describen un espacio vectorial. La acción de verificación de cada axioma se convierte en un proceso que implica una coordinación entre la verificación de cada propiedad particular y el proceso de verificación de axiomas en general. Posteriormente, los diez procesos individuales se coordinan en un solo proceso de verificación de todos los axiomas. Cuando el estudiante trabaja sobre diferentes tipos de espacios vectoriales, se da cuenta de las propiedades que posee la estructura; en ese momento puede decirse que tiene una concepción proceso del concepto de espacio vectorial. Un estudiante con esta concepción puede, por ejemplo, construir ejemplos de conjuntos que son espacios vectoriales y ejemplos de conjuntos que no lo son; también puede decidir cuáles operaciones binarias pueden definirse sobre un conjunto dado para que éste sea un espacio vectorial.

El individuo realiza además acciones con los elementos de un espacio vectorial V. A través de ellas verifica si un vector puede escribirse como combinación lineal de otros vectores que pertenecen a un conjunto S dado o verifica si el conjunto de vectores dado es o no linealmente independiente en términos de la aplicación de la definición correspondiente. Según la teoría APOE, un individuo que no muestra posibilidades de ir más allá de la realización de estas acciones muestra una concepción acción del concepto correspondiente. Cabe aclarar que no existen investigaciones realizadas sobre los conceptos de conjunto generador e independencia lineal desde el punto de vista de la teoría APOE.

El individuo repite estas acciones con vectores pertenecientes a diversos conjuntos de espacios vectoriales dados. A partir de la reflexión sobre estas acciones, el sujeto es capaz de interiorizarlas en un proceso que le permite establecer si un vector dado o un conjunto de vectores pertenecientes a un espacio vectorial pueden o no ser escritos como combinaciones lineales de los vectores del conjunto original. Un individuo con una concepción proceso del concepto de conjunto generador puede, por ejemplo, decidir qué propiedades tienen que tener los vectores pertenecientes a un espacio vectorial generado por un conjunto generador dado. A través de la abstracción reflexiva, el individuo puede considerar como un todo el conjunto de vectores que se pueden escribir en términos de los vectores dados, es decir, puede encapsular el proceso de verificación en un objeto, el conjunto de vectores. Esta encapsulación implica además que el individuo es capaz de reconocer cuáles subconjuntos del espacio vectorial pueden generarse a partir del conjunto dado (conjunto generado).

El individuo puede además identificar, a partir de las acciones que le permiten establecer combinaciones lineales de los elementos de conjuntos dados, cuáles de entre ellas producen el vector cero y de ahí determinar cuáles serían los conjuntos en los que existe una combinación lineal única que da como resultado el vector cero. En términos de actividades matemáticas, esto puede evidenciarse en el contexto de un problema de tipo "decide si los vectores $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}$, y $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ son linealmente dependientes o independientes" (Sierpinska *et al.*, 2002). Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite determinar si un conjunto dado de vectores cumple con esta condición (independencia lineal). Un individuo con una concepción proceso del concepto de independencia lineal puede, por ejemplo, decidir cuáles vectores se pueden quitar de un conjunto para reducirlo a un conjunto linealmente independiente.

El individuo puede, además, considerar este proceso como un todo, es decir, puede encapsularlo para considerar los conjuntos de vectores que satisfacen esta propiedad y revertir estos objetos en los procesos que les dieron origen para verificar las propiedades de los vectores que los conforman.

Los procesos anteriores pueden coordinarse en un nuevo proceso en el que se verifica si los vectores de un conjunto dado son linealmente independientes y se determina cuáles vectores de un espacio vectorial se pueden generar a partir de ellos. Este proceso incluye también el decidir si dichos vectores son los indispensables para generar a todos los elementos de un espacio vectorial determinado. Este proceso se encapsula, como un todo, en un objeto relacionado con el espacio vectorial: la base, que permite al estudiante, por una parte, caracterizar el espacio vectorial y, por la otra, ejercer sobre él nuevas acciones, como por ejemplo, compararlo con otras bases y conjuntos, tomarlo como punto de partida para cambiar de base, etcétera.

Cuando el individuo es capaz de relacionar estas *acciones, procesos* y *objetos,* empieza entonces a construir un *esquema;* estas relaciones pueden ser débiles o fuertes, lo cual nos indicaría que el esquema está en distintos niveles de evolución. Cuando el *esquema* tiene coherencia, se convierte en un nuevo objeto que puede ser transformado por nuevas acciones y el objeto puede utilizarse en problemas que no son familiares para el individuo. A fin de comprobar la coherencia del *esquema* de base de un individuo, se le pueden presentar problemas que no le sean familiares, para establecer si es capaz de identificar una base para ese espacio vectorial y determinar sus propiedades.

Diseño de la investigación

Para llevar a cabo la investigación, se observó durante un semestre un curso de álgebra lineal para ingeniería, en el que participaron 24 estudiantes de una universidad privada de la ciudad de México. Este curso fue diseñado teniendo en cuenta la teoría APOE; sin embargo, durante la observación del curso nos dimos cuenta de que varios requerimientos de una enseñanza basada en esta teoría no se tomaron del todo en consideración. Se diseñó una entrevista basada en el objetivo de la investigación y tomando en consideración la descomposición genética y los resultados de la observación del curso. Se plantearon en ella una serie de preguntas que estaban enfocadas a averiguar las posibles construcciones mentales que los estudiantes habían desarrollado durante el curso con respecto al concepto de base y con respecto a otros conceptos relacionados con él.

La entrevista constó de 11 preguntas. Con la primera pregunta se trató de indagar cuál es el significado que los estudiantes dan al concepto de base antes de que aplicaran la definición del concepto a ejercicios concretos. Las otras preguntas tenían la intención de identificar las posibles construcciones mentales de los estudiantes a fin de observar si se apegaban a la descomposición genética planteada.

Después de haber definido las preguntas, se procedió a realizar un análisis *a priori* de cada pregunta de la entrevista, la cual comprendía una parte descriptiva y otra predictiva, es decir se detallaban las construcciones mentales que los estudiantes podían generar como respuesta a cada pregunta usando la descomposición genética propuesta. A continuación, mostraremos como ejemplo el análisis *a priori* de algunas de las preguntas realizadas en la entrevista:

Pregunta 1. ¿Qué es una base en un espacio vectorial y qué te representa?

Esta pregunta fue planteada de manera abierta; con ella no podíamos observar el tipo de construcción del estudiante; sin embargo, tenía la intención de detectar qué entendía el estudiante por el concepto de base antes de que aplicara la definición del concepto a ejercicios concretos.

Pregunta 3. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$. Determine si $\{v_1, v_2\}$ es una base para R^3. ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para R^2?

El objetivo de este ejercicio es averiguar si el estudiante ha interiorizado el concepto de base (concepción proceso) o bien lo ha encapsulado (concepción objeto), así como las estrategias que utiliza para identificar dicho concepto, lo cual nos dará información acerca de las dificultades que se puedan presentar.

Pregunta 5. ¿Para qué valores del número real a los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1, a)$ constituyen una base para R^3?

El propósito es observar si el estudiante puede argumentar en el contexto de vectores que contienen una variable, o bien, si necesita tener vectores concretos para contestar. Concretamente, el estudiante tiene que encontrar valores para la variable a *para que los vectores dados constituyan una base. La diferencia indicaría si el estudiante tiene una concepción acción o una concepción de proceso.*

La entrevista se aplicó de manera individual a seis estudiantes que habían terminado el curso antes mencionado. Los estudiantes fueron escogidos de acuerdo con el promedio de calificación que obtuvieron en tres exámenes que presentaron durante el curso. Dichos promedios se clasificaron de la siguiente manera: calificaciones altas (100-90), calificaciones medias (80-70) y calificaciones bajas (menores o iguales a 60). Se escogieron dos estudiantes de cada una de estas categorías y se clasificaron como A1, A2, M1, M2, B1 y B2.

La entrevista se realizó en las instalaciones de la universidad particular antes mencionada, en un salón espacioso que contaba con una mesa y sillas. Se utilizaron una cámara de video y una grabadora de audio a fin de registrar y analizar con detalle lo que ocurría durante la entrevista. La duración promedio de las entrevistas fue de una hora y media.

En la sesión se le presentaban al estudiante una a una las preguntas por escrito. Si el estudiante no entendía alguna o si mostraba dificultad para expresar sus ideas, la entrevistadora interactuaba oralmente, aclarando la pregunta o replanteándola, tratando de no insinuar la respuesta al estudiante.

Las transcripciones de las entrevistas fueron analizadas por los investigadores de manera conjunta. El procedimiento del análisis se centraba en identificar los elementos matemáticos que el estudiante utilizaba para resolver los problemas y cómo los relacionaba con otros conceptos matemáticos basándose en la descomposición genética propuesta. A partir de este análisis, es posible deducir qué tipo de comprensión tiene el estudiante, posiblemente, con respecto al concepto de base.

PRINCIPALES RESULTADOS

El análisis que se realizó mostró, en términos generales, que los alumnos entrevistados no llegaron a interiorizar el concepto de base de un espacio vectorial. De los seis estudiantes que se entrevistaron, cuatro mostraron evidencia de estar en camino a la interiorización de dicho concepto, uno mostró una concepción acción y uno una concepción que podría llamarse de preacción. Con preacción nos referimos a que el estudiante no muestra una comprensión de algún tipo y ni siquiera puede realizar acciones sobre vectores concretos. El estudiante que mostró la concepción acción tenía calificaciones medias y el que mostró la concepción preacción había obtenido calificaciones bajas.

En esta sección se presentarán los resultados relacionados con los alumnos que mostraron una concepción acción o se encontraban en transición de la concepción acción a la concepción proceso, a lo cual llamamos camino a la interiorización del concepto, a fin de señalar las características que distinguen este tipo de concepción y su relación con la descomposición genética. Para ello, se mostrarán fragmentos de algunas de las entrevistas, los cuales ilustran de manera efectiva el tipo de respuesta que el alumno dio a todas las preguntas del cuestionario, así como el análisis efectuado a la luz de la perspectiva teórica para poner en evidencia las construcciones detectadas a partir de los datos obtenidos.

Concepción acción

Como presentamos en la descomposición genética, la concepción acción del concepto de base se pone en evidencia cuando el estudiante verifica si un vector concreto puede escribirse como combinación lineal de otros vectores que pertenecen a un conjunto S dado y cuando verifica si el conjunto de vectores dado es o no linealmente independiente en términos de la aplicación de la definición correspondiente. Sin embargo, un estudiante con esta concepción no puede pensar en estas propiedades en términos generales y muestra la necesidad de hacer cálculos explícitos.

En el siguiente fragmento de entrevista se presenta un ejemplo de la concepción acción del concepto de base de un espacio vectorial. El entrevistado aún realizaba acciones sobre los elementos del espacio vectorial sin mostrar evidencias de reflexión sobre sus acciones o de haberlas interiorizado en un proceso.

Cuando se le preguntó al estudiante M1 que definiera lo que entendía por base, respondió: “base es un máximo linealmente independiente o bien un mínimo de generadores”. En primera instancia, se podría pensar que esta respuesta implica que el estudiante comprendía el significado del concepto. A lo largo de la entrevista, se pudo constatar que el alumno memorizó dicha definición, lo cual reflejó que la memorización de las definiciones no garantiza su entendimiento. Posteriormente se le preguntó:

Pregunta 2. De los siguientes conjuntos de vectores, ¿cuáles son base para el espacio vectorial R^2?

a) $w_1 = (1, 2)$, $w_2 = (0, 3)$, $w_3 = (2, 7)$
b) $w_1 = (2, 1)$, $w_2 = (3, 0)$
c) $w_1 = (3, 9)$, $w_2 = (-4, -12)$

¿Cuáles son base para el espacio vectorial R^3?

d) $w_1 = (1, 6, 4)$, $w_2 = (2, 4, -1)$, $w_3 = (-1, 2, 5)$
e) $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (2, 2, 0)$, $w_3 = (3, 3, 3)$
f) $w_1 = (-1, 3, 2)$, $w_2 = (6, 1, 1)$

¿Cuáles son base para el espacio vectorial P_2?

g) $\{t^2 + t, t - 1, t + 1\}$
h) $\{t^2 + 1, t - 1\}$
i) $\{t^2 + t, t^2, t^2 + 1\}$

La idea de introducir estos tres espacios vectoriales tiene el objetivo de comparar las construcciones que tiene el alumno respecto a los espacios vectoriales con los que trabaja a menudo respecto al espacio vectorial P_2. Nos interesaba determinar si el estudiante era capaz de usar argumentos que le permitieran responder sin tener que hacer cálculos explícitos, en algunos casos. En particular, queríamos observar la manera en la que el estudiante argumentaba en relación con el concepto de dimensión. Así, podríamos distinguir entre una concepción acción y una concepción proceso del concepto de base.

El estudiante fue capaz de realizar las acciones necesarias para verificar si los conjuntos dados conformaban una base para el espacio vectorial dado en los primeros dos bloques. Sin embargo, en el bloque 3, después de realizar ciertas acciones, mostró que no estaba convencido de que el conjunto de los polinomios de grado 2 (P_2) fuera un espacio vectorial y lo expresó de la siguiente manera:

115. M1: Entonces, esto es... ¿espacio vectorial P_2?
116. E: ¿Qué pasó? ¿Qué estás pensando?
117. M1: Ah, es que ya me da pena.
118. E: A ver, dime lo que estás pensando.

119. M1: Que lo estoy viendo, por ejemplo los polinomios de grado 2, los estoy viendo como un espacio...
120. M1: ...entonces estoy manejando todo como si fuera un espacio... pero no sé si se pueda hacer eso.

Esto reflejó que el estudiante aún no relacionaba los elementos que se involucran en la definición del concepto de base. Más adelante, en la pregunta 4 de la entrevista, se obtiene más evidencia que muestra la falta de interiorización de las acciones que el estudiante realizó sobre el conjunto dado:

Pregunta 4. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} s \text{ en } R \right\}$. Entonces, cada vector de H es una combinación lineal de $\{v_1, v_2\}$, porque

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para H?

156. M1: [...] (escribe)

Sí, porque $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ donde $\begin{matrix} \alpha = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow H$ se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2 y, si le quitas algún vector, ya no lo generaría.

158. E: ¿Podrías explicar lo que escribiste?
160. M1: Sí, nada más hice la combinación lineal de los dos vectores, entonces te está dando que alfa... o sea, bueno tú tienes (1, 0, 0) y (0, 1, 0), ah, pero aquí está multiplicado por s entonces te da $(s, s, 0)$ entonces, si tú a lo que quieres llegar, o sea, tu subespacio sería $(s, s, 0)$ entonces puedes escribir el v_1 y el v_2 ...tal que si lo multiplicas por s y lo sumas te den ésta $(s, s, 0)$ y como el vector (1, 0, 0) y el vector (0, 1, 0) son linealmente independientes, entonces...

161. E: Y ¿podrías decirme qué es lo que generan los vectores v_1 y v_2?
162. M1: Están generando un subespacio en R^3.

Puede observarse que el estudiante M1 tuvo en cuenta las propiedades que definen una base (conjunto generador e independencia lineal), pero no muestra ser capaz de coordinarlas con otros conceptos necesarios para construir su significado. Por ejemplo, el de espacio vectorial, el cual manejó como ajeno al concepto de base. Estas respuestas pueden deberse a que el alumno había memorizado las propiedades que definen una base y era capaz de hacer acciones para verificar si un conjunto de vectores era linealmente independiente y si era un conjunto generador, pero no era capaz de coordinarlos en un solo proceso asociado al concepto de base de un espacio vectorial.

Su respuesta a la pregunta 5 (¿Para cuáles valores del número real a los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1, a)$ constituyen una base para R^3?) mostró claramente que mantiene una concepción acción de la propiedad de independencia lineal.

164. M1: ¿Para qué valores del número real *a*...? ...[escribe]
$(\# \ 1 \ 0), (1 \ 0 \ \#), (\# \ 1 \ \#)$ Para todos los reales $- \{0\}$

Entonces se le pide un ejemplo y él dice:

168. M1: Sí, si, no sé, *a* es igual a 1, por ejemplo, te quedaría que [escribe]
$a = 1 \rightarrow (1 \ 1 \ 0), (1 \ 0 \ 1), (\underset{2}{\cancel{1}} \ 1 \ 1)$

175. E: ¿Sí?, ¿cómo te diste cuenta que sí forman una base?
176. M1: Porque ninguno lo puedes escribir como combinación lineal de los otros dos, ¿lo escribo?

Posteriormente se le indicó que cometió un error de cálculo (en el tercer vector, primero escribió 1 en lugar de 2 en la primera componente); la intervención de la entrevistadora tuvo la intención de aprovechar el error del estudiante para observar cómo argumentaba en caso de dependencia lineal de los vectores, ya que al parecer el estudiante había elegido un valor para a al azar. Al darse cuenta de su error, el estudiante se confundió, pues debido a ese error la última afirmación que hizo acerca de combinaciones lineales no se cumplía; sin embargo, mencionó:

184. M1: ...es que ya con este 2 sí puedes escribirlo como combinación lineal...

[Escribe] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$ no sé si son linealmente independientes.

Puede observarse que no pudo utilizar el concepto de independencia-dependencia lineal en una situación donde se tiene un conjunto de vectores que contienen una variable. Necesitaba valores concretos para aplicar el algoritmo de verificación.

Por otra parte, mostró dificultades para interpretar cuándo es linealmente independiente el conjunto o cuándo no lo es de acuerdo con el valor del determinante. Se observó que el estudiante no pudo usar la definición de independencia lineal para salir del conflicto que se le presentó. Al no poder interpretar la independencia-dependencia lineal en el determinante, pasó por alto esta propiedad, y dio como respuesta a la pregunta 5 que "cualquier valor excepto el cero, puede constituir una base para R^3".

En términos generales, estas observaciones manifestaron que el estudiante mostraba una concepción acción con respecto a los conceptos de conjunto generador e independencia-dependencia lineal, ya que pudo averiguar las condiciones de independencia lineal y conjunto generador en problemas concretos y no complicados. Esto también se reflejó en sus respuestas a algunas otras preguntas, incluida la pregunta 10, donde mostró dificultad para hallar las bases de los conjuntos que se le dieron:

Pregunta 10. Sea V el espacio generado por $v_1 = \cos^2 x$, $v_2 = \operatorname{sen}^2 x$ y $v_3 = \cos^2 x$. Encuentra una base para V.

Con esta pregunta se pretende observar cómo coordina un estudiante sus construcciones mentales para llegar a hallar una base, utilizando sus conocimientos previos acerca de otros espacios vectoriales. En particular, nos interesaba observar las estrategias que emplea el estudiante para reducir el número de vectores a fin de llegar a un conjunto mínimo generador; si esto se hace correctamente, puede ser evidencia de una concepción objeto, ya que se trata de comparar diferentes conjuntos generadores y bases.

305. M1: Lo que hice fue... me dicen... me dan esta condición [se refiere cos $2x = 1 - 2\ \mathrm{sen}^2 x$]... entonces estoy viendo que al coseno de 2x es v_3, me están diciendo que es igual a $1 - 2\ \mathrm{sen}^2 x$ y $2\ \mathrm{sen}^2 x$... $\mathrm{sen}^2 x$ es v_2 entonces es $1 - 2\ v_2$ y acá es $\cos^2 x$ es una identidad trigonométrica que me saqué de la manga y...
306. E: ¿Y qué es lo que significa esto?
307. M1: ¿Qué significa?...
308. E: ¿Te representa algo?
309. M1: Sí, podrían ser las... pues podrían ser las semiecuaciones de... bueno, más bien serían dos... semiecuaciones [escribe] $\begin{matrix} v_3 = 1 - 2v_2 \\ v_1 + v_2 = 1 \end{matrix}$...

Observamos aquí que el estudiante realizaba algunas acciones; no podía interpretar si el conjunto extraído era base. Vemos así que M1 intentó articular las propiedades del concepto de base; sin embargo, no tuvo mucho éxito debido a que no involucró los elementos necesarios para verificar si un conjunto es base de un espacio vectorial. M1 no hizo uso del hecho de que los vectores tienen que pertenecer al espacio vectorial. De acuerdo con la descomposición genética, podemos afirmar que M1 todavía no ha construido las relaciones necesarias entre los elementos involucrados en el concepto de base (espacio vectorial, subespacios, conjunto generador e independencia lineal).

Camino a la interiorización del concepto de base

En nuestra descomposición genética inicial, consideramos que hay dos procesos que se coordinan para dar lugar a la concepción proceso del concepto de base. El primero se relaciona con el conjunto generador y consiste en un proceso que le permite al estudiante establecer si un vector dado o un conjunto de vectores pertenecientes a un espacio vectorial pueden o no escribirse como combinaciones lineales de los vectores del conjunto original. El segundo tiene que ver con la independencia lineal, donde inicialmente el individuo puede identificar, a partir de las acciones que le permiten establecer combinaciones lineales de los elementos de conjuntos dados, cuáles de entre ellas producen el vector cero y, de ahí, determinar cuáles serían los conjuntos en los que existe una combinación lineal única que da como resultado el vector cero. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite determinar si un conjunto dado de vectores cumple con esta condición. Cuando estos dos procesos se coordinan, el estudiante puede también decidir si dichos vectores son los indispensables para generar todos los elementos de un espacio vectorial determinado.

En nuestra investigación, no hemos encontrado pruebas de la construcción de la concepción proceso del concepto de base, aunque hemos identificado algunos elementos de esta construcción, donde el estudiante claramente proporcionaba indicios de construcciones mentales más profundas que las acciones, sin lograr la concepción proceso en su totalidad. En estos casos, optamos por llamar "camino a la interiorización" a la concepción que muestra el estudiante. Algunos datos muestran que lo que hacía falta era la coordinación de los dos procesos asociados. En otros casos, uno de los procesos había sido construido por el estudiante, pero no había logrado la interiorización de las acciones asociadas al otro proceso. También observamos que, para algunos estudiantes que mostraban esta concepción, no había relación entre las propiedades "máximo linealmente independiente" y "mínimo de generadores". En resumen, estos estudiantes manejan bien la parte algorítmica de las preguntas relacionadas con la base y muestran una reflexión acerca de los procesos asociados a este concepto, pero no muestran haber construido algunos elementos presentes en la descomposición genética para poder hablar de la construcción de un proceso asociado al concepto de base.

A continuación se muestran los extractos de la entrevista de uno de los estudiantes que se encuentran camino a interiorizar el concepto de base.

Durante la realización de la entrevista, el estudiante tenía presentes las propiedades del concepto de base, es decir, utilizaba las propiedades de independencia lineal y conjunto generador que definen a una base, aunque mostraba dificultades para coordinarlas.

La siguiente es su respuesta a la pregunta de si un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial:

Pregunta 3. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$. Determine si $\{v_1, v_2\}$ es una base para R^3. ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para R^2?

73. A2: [escribe] No es base para R^3 porque falta un vector

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cancel{\} \text{ hay 2 vectores}}$$

[murmura], pero para R^2, creo que sí...

74. E: ¿Por qué es base para R^2?
75. A2: ¿Por qué no puede ser base para R^3? Porque necesitarías otro y para R^2 creo que sí... lo es, porque me queda que la dimensión es 2, no sé muy bien, jejé, tiene algo que ver, pero me parece que sí.

Este problema se presenta nuevamente en el siguiente extracto de la pregunta 4:

Pregunta 4. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} s \text{ en } R \right\}$. Entonces cada vector de H es una combinación lineal de $\{v_1, v_2\}$, porque

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para H?

Con esta pregunta se quiere observar si el estudiante toma en consideración la pertenencia de los vectores al conjunto para formar una base. Como se trata de observar propiedades, se requiere una concepción proceso para dar una respuesta adecuada.

109. A2: ...entonces lo único que vi es que éstos [menciona a los vectores v_1 y v_2] son linealmente independientes y ya, y que como al hacer combinación lineal me provo... o sea me producían... siempre y cuando alfa sea igual a beta entonces el vector este H es una base.

Por otra parte se muestra que el alumno no ha percibido el papel que desempeña el espacio vectorial en la construcción del concepto de base.

En el siguiente extracto puede verse cómo el estudiante intentó coordinar las propiedades de independencia-dependencia lineal y el conjunto generador. Cuando se le presentó la pregunta 5 (¿Para qué valores del número real a los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1, a)$ constituyen una base para R^3?, el estudiante realizó operaciones con los vectores y posteriormente respondió:

117. A2: Hice todo un procedimiento inútil para ver si estos dos o sea si este [menciona el vector $(1 + a, 1, a)$] vector se podía poner como combinación lineal de los otros, entonces ya me inventé unas ecuaciones y luego es una tontera, porque en realidad, si ya consideras que alfa y beta es igual a 1, le sumas directo y te queda el tercer vector, entonces como no son linealmente independientes, no pueden generar... no son base.

En algunas otras preguntas el estudiante intentó responder y poner en práctica las propiedades del concepto de base en su respuesta. Por ejemplo, en la pregunta 9 el estudiante realizó operaciones; veamos cómo respondió:

Pregunta 9. Determina la base para el siguiente subespacio de R^3.

$$\begin{array}{rl} & x = 2t \\ \text{La línea} & y = -t \quad -\infty < t < \infty \\ & z = 4t \end{array}$$

Contestar esta pregunta requiere la coordinación de varios elementos que se relacionan con el concepto de base, tales como independencia lineal, subespacio, generar y dimensión. Estas coordinaciones pueden evidenciar una concepción de proceso. Por otra parte, podemos observar dificultades relacionadas con la parametrización, y la naturaleza de estas dificultades puede proporcionarnos elementos acerca del nivel de construcciones mentales de los estudiantes.

220. A2: ...puedo dar esto [se refiere a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} t$] como solución y ya.

221. E: Eso ¿qué sería?
222. A2: La base para generar la recta ¿En R^3?
223. E: ...¿por qué crees que sería base?
224. A2: Porque metiéndole cualquier valor aquí [se refiere al parámetro t] es lo que va a generar la recta.

227. E: ¿Cumple con las propiedades de la base?
228. A2: Es que no... Creo que no está bien... entonces, pues sí, sí cumple, pero... creo que ya me estoy trabando mucho en éste [se refiere al ejercicio].

Parece que, aunque el estudiante manejó las propiedades de la base, tenía dificultades para interpretar esas propiedades, como lo muestra su respuesta a la pregunta hecha en el extracto 227. Podemos observar en esos extractos, además, que podía interpretar el concepto de conjunto generador, pero no podía articularlo con el concepto de independencia lineal.

De acuerdo con la descomposición genética propuesta para el concepto de base, se puede decir que el estudiante tiene una concepción proceso con respecto al concepto de independencia lineal, ya que, en general, puede decidir si un conjunto es o no linealmente independiente empleando diferentes tipos de argumentos, por ejemplo, usando el número de vectores, explicando verbalmente la propiedad que cumple o no un conjunto candidato a ser linealmente independiente, interpretando de manera correcta el resultado de reducción por matrices para decidir la independencia-dependencia lineal. Es capaz, además, de averiguar la dependencia lineal de un conjunto de vectores que contienen una variable, de manera general, sin tener la necesidad de dar valores concretos. Respecto al conjunto generador, los resultados muestran que el alumno se encuentra camino a la interiorización, ya que no toma en consideración la pertenencia de los vectores al espacio vectorial dado.

De acuerdo con lo observado, se puede afirmar que A2 se encuentra en camino a la interiorización del concepto de base, pues aún no ha construido el concepto de conjunto generador en el nivel de proceso y, por lo tanto, no puede coordinar ambos procesos en uno solo. En particular, aún le falta incorporar el hecho de que los vectores que constituyan una base tienen que pertenecer a un espacio vectorial.

CONCLUSIONES

Los resultados de las entrevistas realizadas a los estudiantes, tomando en consideración todas las preguntas del instrumento, nos permiten comparar las posibles estructuras mentales que han construido los estudiantes entrevistados con las que se habían previsto en la descomposición genética propuesta inicialmente. De dicho análisis surgieron algunos elementos importantes que no se consideraron en la descomposición genética propuesta: los conceptos de conjunto y subespacio, que se relacionan con las dificultades acerca de las propiedades, conjunto generador e independencia lineal, que satisface un conjunto para ser una base y que constituyen un elemento fundamental para la comprensión de dicho concepto. Estas dificultades se observaron, en particular, cuando los estudiantes no ponían atención al hecho de que los vectores de un conjunto generador tienen que pertenecer al espacio vectorial o al subespacio que generan.

Por otra parte, la descomposición genética propuesta fue útil en cuanto a que permite explicar la dificultad de construir el concepto de base en el nivel de proceso. Como se había previsto, los estudiantes no pueden tener una concepción proceso de la base si no han construido los procesos de independencia-dependencia lineal y de conjunto generador. De acuerdo con ello, se puede concluir que es necesario incluir en la descomposición genética propuesta los conceptos de conjunto y subespacio vectorial, los cuales se deberán de manejar en un nivel de proceso para que sea posible coordinarlos con los conceptos de independencia-dependencia lineal y de conjunto generador y, así, construir el concepto de base.

En cuanto a las dificultades relacionadas con el concepto de base, esta investigación arroja datos que nos permiten identificarlas. Por ejemplo, se puede constatar que, para los estudiantes, resulta más fácil averiguar si un conjunto de vectores forma una base para un espacio vectorial dado que hallar una base para un espacio vectorial dado. De acuerdo con la descomposición genética propuesta, esto tiene sentido, ya que averiguar si un conjunto dado es base requiere comprobar ciertas condiciones, lo cual puede hacerse, utilizando únicamente acciones, por ejemplo siguiendo un algoritmo. Por otro lado, hallar una base para un espacio vectorial requiere la coordinación de los procesos involucrados en la comprensión de la independencia lineal y el conjunto generador.

Esta investigación también revela que resulta muy difícil alcanzar una concepción objeto del concepto de base, dado que, según la teoría, cuando hay necesidad de aplicar acciones sobre un proceso ya construido, éste se encapsula en un objeto. Estas acciones pueden consistir en, por ejemplo, la comparación de conjuntos y sus propiedades para averiguar si constituyen bases para algún espacio vectorial dado, o cambiar de base para resolver un problema que así lo requiere. Creemos que un estudiante puede lograr una concepción objeto del concepto de base sin trabajar necesariamente otros espacios que R^n; sin embargo, la experiencia de reflexionar sobre diferentes espacios vectoriales enriquece las conexiones que se deben establecer para la construcción de un esquema.

Otro factor que influye de manera importante en la construcción del concepto base es la posibilidad de trabajar con espacios vectoriales diferentes al espacio vectorial R^n, es decir, la no aceptación de otros elementos como vectores restringe en gran medida la construcción de un esquema para este concepto. A lo largo de las entrevistas, se constató que la mayoría de los estudiantes entrevistados no podía trabajar con otros espacios vectoriales, puesto que les causaba dificultad el pensar en los elementos de dichos espacios como vectores. Este resultado sugiere que es importante que en los cursos de álgebra lineal se trabaje con espacios vectoriales diversos, ya que parece ser que ello facilitaría la aceptación de elementos que no tengan forma de *n*-adas como vectores.

A partir de los resultados obtenidos, se puede también sugerir la necesidad de hacer hincapié en la relación que guarda el concepto de subespacio vectorial con los otros conceptos que se consideran importantes para la construcción del concepto de base de un espacio vectorial, tales como la pertenencia a un conjunto, la noción de independencia-dependencia lineal y la pertenencia al conjunto generador.

Los resultados de esta investigación muestran, por último, la necesidad de realizar investigaciones de fondo en relación con la comprensión de los conceptos de independencia-dependencia lineal y de conjunto generador-espacio generado, puesto que, como se ha mencionado, varias dificultades de los estudiantes están relacionadas con la comprensión de estos conceptos. En particular, para investigar la construcción de un esquema relacionado con el concepto de base de un espacio vectorial, se requiere indagar sobre las conexiones entre la base y otros conceptos tales como dimensión, espacio vectorial, subespacio y transformaciones lineales. La investigación acerca de la comprensión y dificultades de estos conceptos, sería de gran utilidad para identificar parte de los obstáculos que surgen camino a la construcción del concepto de base.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura, A.C. Este artículo forma parte del proyecto Conacyt 2002-C01-41726.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., A. Brown, D. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), "A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education", *Research in Collegiate Mathematics Education II*, CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 6, pp. 1-32.

Chargoy, R. M. (2006), *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*, Tesis doctoral, Cinvestav-IPN.

Da Silva, A. y R. Lins (2002), "An analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra", *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, p. 106 del CD-ROM.

Dubinsky, E. (1991), "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer, pp. 95-123.

——— (1996), "Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria", *Educación Matemática*, vol. 8, núm. 3, pp. 24-41.

——— (1997), "Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level", en D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter y A. Watkins (eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, vol. 42, pp. 85-105.

Manzanero, L. (2007), *Sistemas de ecuaciones: una perspectiva desde la teoría APOE*, Tesis de maestría, Cinvestav-IPN.

Nardi, E. (1997), "El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial", *Educación Matemática*, vol. 9, núm. 1, pp. 47-60.

Oktaç, A., M. Trigueros y X. N. Vargas (2006), "Understanding of vector spaces - a viewpoint from APOS theory", *CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*, Estambul, Turquía.

Sierpinska, A. (2000), "On some aspects of students' thinking in linear algebra", en J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer, pp. 209-246.

Sierpinska, A. (2000), "On some aspects of students' thinking in linear algebra", en J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer, pp. 209-246.

Sierpinska, A., A. Nnadozie y A. Oktaç (2002), "A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra", Informe de investigación, Concordia University, Montreal, disponible en: http://alcor.concordia.ca/~sierp/downloadpapers.html.

Trigueros, M. (2005), "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, vol. 17, pp. 5-31.

Trigueros, M. y A. Oktaç (2005), "La théorie APOS et l'enseingnement de l'algèbre linéaire", *Annales de didactique et sciences cognitives*, vol. 10, pp. 157-176.

Trigueros, M., A. Oktaç y L. Manzanero (2007), "Understanding of system of equations in algebra", *Proceedings of CERME 5*.

Vargas, X. N. (2007), *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*, Tesis de maestría, Cinvestav-IPN.

Weller, K., A. Montgomery, J. Clark, J. Cottrill, M. Trigueros, I. Arnon y E. Dubinsky (2002), *Learning Linear Algebra with ISETL*, disponible en: http://pc75666.math.cwu.edu/~montgomery/scholar/2002/0731-b-llawi.pdf y http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

DATOS DE LOS AUTORES

Darly Kú
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, y PUCV, Chile
darlyku@cinvestav.mx

María Trigueros
Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
trigue@itam.mx

Asuman Oktaç
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, y PUCV, Chile
oktac@cinvestav.mx