El álgebra aritmética de George Peacock: un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica[1]

Aurora Gallardo y Oralia Torres
CINVESTAV, México

Resumen
Describimos brevemente las aportaciones de Peacock al álgebra escolar. Su Álgebra Aritmética contiene: cantidades positivas, términos positivos y términos negativos y la exclusión de cantidades negativas. Su Álgebra Simbólica aborda: la existencia independiente de los signos más y menos; símbolos positivos y negativos y la extensión de la operación de sustracción. El Álgebra Simbólica incluye al Álgebra Aritmética como aquella ciencia cuyas leyes sugirieron las del Álgebra Simbólica.

Abstract
We described briefly Peacock´s important contributions to school algebra. His Arithmetical Algebra exhibits: positive quantities; positive and negative terms and the exclusion of negative quantities. His Symbolical Algebra shows: the independent existence of the signs + and - , positive and negative symbols and the extension of the subtraction operation. Symbolical Algebra must include Arithmetical Algebra as that science the laws of which suggested those of the Symbolical Algebra.

ESBOZO HISTÓRICO

Si bien es cierto que George Peacock impulsó el nacimiento del Álgebra Moderna actual, es diferente una lectura de su obra desde la historia o desde las matemáticas que desde la educación matemática. Desde esta última, se mira distinto porque se busca otra cosa. La intencionalidad no es la misma. Nuestro George Peacock, el de este artículo, es el autor del siglo XIX preocupado por enseñar álgebra a estudiantes.

En este artículo discutiremos algunas de las ideas fundamentales descritas en *A Treatise of Algebra* de George Peacock en sus dos versiones, la de 1830 y la de 1845. Esta obra dio lugar a controversias con respecto a las cantidades negativas en la Inglaterra de principios del siglo XIX. En el siglo XVIII las matemáticas se definieron como la *ciencia de la cantidad*[2] y las entidades negativas fueron consideradas *cantidades menores que nada* y *cantidades obtenidas al sustraer una cantidad mayor de*

[1] Estudio teórico financiado por CONACYT. Proyecto de investigación: 44 632. “Procesos de Abstracción y Patrones de comunicación en aulas de matemáticas y ciencias en entornos tecnológicos de aprendizaje: estudio teórico experimental en alumnos de 10 a 16 años de edad.”
[2] *Lo que es capaz de incrementarse o disminuirse es denominado magnitud, o cantidad.* Euler (1828)

una menor. Ninguna definición resultaba lógicamente correcta. Más aún, lo mencionado anteriormente originaba otro problema, el de la definición de la operación de sustracción (Pycior, 1981). Un momento decisivo para la matemática inglesa tuvo lugar en 1815 cuando se constituyó la Sociedad Analítica en el Trinity College en Cambridge. Con el objeto de solucionar esta problemática Maseres (1758) y Frend (1796) ambos graduados de Cambridge, sugirieron el abandono de las cantidades negativas y restringir la sustracción a los casos en que el minuendo sea mayor o igual al sustraendo. Maseres renunció a la teoría de ecuaciones que había florecido durante los siglos XVII y XVIII y, en particular al Teorema Fundamental del Álgebra. Argumentaba por ejemplo, que la ecuación $x^2 + p x = r$ sólo tiene una raíz. Consideró el caso: $x^2 + 2 x = 15$ y estableció que $x = 3$, raíz positiva era aceptable, pero trató de demostrar lo absurdo de admitir la raíz $x = -5$. Sustituía $x = -5$ en la ecuación y, con de la ley de signos que también criticaba, llegaba a $25 – 10 = 15$. Esta expresión afirmaba, es una ecuación de la forma $x^2 - 2x = 15$. En su opinión, admitir la raíz negativa, $x = -5$, resultaba de confundir dos ecuaciones distintas.

Con el objeto de establecer el álgebra como ciencia, Maseres y Frend negaron las entidades algebraicas cuestionables y redujeron el álgebra a *la aritmética universal*, es decir, al álgebra que aceptaba los signos más y menos como signos de operación únicamente.

En su reporte de 1833, Peacock explicaba que la aritmética universal no podría aceptarse en lugar del álgebra porque:

> *“Han existido una multitud de proposiciones y de resultados algebraicos de incuestionable valor y consistencia entre sí, pero irreconciliables con dicho sistema, o, a todas luces no deducibles de éste, y entre ellas la teoría de la composición de ecuaciones, que Harriot había logrado en forma acabada y que hacía necesario considerar las cantidades negativas en álgebra aunque, vano sería el intento de atribuirles significado alguno”.*

Peacock proclamó los primeros principios del álgebra y el establecimiento de las que denominó *Álgebra Aritmética (*AA*) y Álgebra Simbólica (*AS*).* La concepción de Peacock era la siguiente: pasamos de la aritmética de los números positivos a AA reemplazando simplemente los numerales por letras. Sin embargo el resultado sólo puede presentarse por números digitales[3], de tal forma que la expresión de a - b, donde b es mayor que a, no posee referente. Aquí, los símbolos son generales en forma pero específicos en valor. En AA consideró Peacock, que todos los resultados incluyendo las cantidades negativas no deducibles estrictamente de conclusiones legítimas provenientes de las definiciones de las operaciones aritméticas[4], deben rechazarse como imposibles. A continuación, afirma*, que “pasamos de AA a AS, permitiendo que las letras adquieran todo el rango de valores numéricos”.*

La existencia de dos cuerpos de álgebra diferenciados, constituyó un tema extremadamente polémico entre los matemáticos británicos de las décadas de 1830 y 1840. Este acercamiento peculiar del álgebra proveniente de la escuela de Cambridge, su intencionado formalismo, le resultó repugnante a Hamilton (1837) entre otros. Hamilton deseaba asociar algún significado a *los imposibles* de la aritmética, a las cantidades negativas e imaginarias, vía la intuición Kantiana del tiempo puro. Visualizaba el álgebra como *la ciencia pura del número*, donde este concepto debía generarse por intuición mental, de forma que los elementos del álgebra no estuvieran sin referente.

En la segunda versión de su *Treatise on Algebra* (1845), Peacock separó el AA de AS y dedicó un primer volumen a la exposición de la primera ciencia y a AS le asignó un segundo volumen. Estaba convencido de esta separación *“porque es extremadamente difícil cuando las dos ciencias se tratan*

[3] Para Peacock la idea de cantidad es más amplia que la de número porque para él este concepto se restringe a los números positivos formados por los 9 dígitos y el cero (números digitales).
[4] “Como sean expresadas o comprendidas, ya que nunca han sido formalmente enunciadas” afirmó Peacock.

simultáneamente, el mantener sus principios y resultados diferenciados y obviar la confusión, la oscuridad y falsedad del razonamiento que esta unión ocasiona".

El autor consideró su segunda versión como un tratado nuevo, un libro de texto donde el estudiante familiarizado con los resultados de AA y con las limitaciones de ésta, se encontraría en condiciones de comprender las conclusiones legítimas de esta ciencia y estaría preparado para el estudio de AS. Aclara que, aunque en AA el contenido sobre las operaciones algebraicas es elemental; los otros temas no lo son, como sucede con la teoría de operaciones, las fracciones continuas, la extracción de raíces simples y compuestas, la teoría de razones y proporciones, tópicos sobre aritmética comercial, solución de problemas indeterminados de primer grado y proposiciones sobre teoría de números. Dado que el orden de los temas es secuencial en cuanto a dificultad, el material debe ser conocido completo por los estudiantes. En este artículo sólo retomaremos ejemplos de conceptos fundamentales de los capítulos I (*Principios de AA*) y V (*Sobre resolución de ecuaciones*) con el objeto de mostrar la minuciosidad y profundidad del escrito.

ÁLGEBRA ARITMÉTICA

El capítulo I comienza construyendo el AA aclarando que los signos de operación[5] no se requieren en Aritmética. Así la suma de 271, 164 y 1 023 se representa como:

$$\begin{array}{rl} 271 & \\ 164 & \\ \underline{1023} & \\ 1458 & \text{resultado final} \end{array}$$

Si se describe la suma anterior en forma horizontal, será necesario introducir los signos de operación y estos reemplazarán la proposición verbal: *la suma de ... resultado final* y obtendremos:

$$271 + 164 + 1\,023 = 1458$$

Si avanzamos un paso más y sustituimos los números por letras *a, b, c*, ... nos encontramos en AA y llegamos a adiciones de la forma: a + b, a + b + c. Establece así, reglas fundamentales de operaciones cuando los símbolos son empleados para representar números; por ejemplo:

$$a + b = b + a$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a$$

Nos advierte que la sustracción no es conmutativa y que en a – b, *a* debe ser mayor que *b*. En caso contrario, a - b representa una cantidad imposible en AA. Es precisamente esta distinción surgida en la operación de sustracción lo que obliga a la separación entre AA y AS.

Peacock enfatiza que nos encontramos siempre ejemplos de operaciones en AA que no podemos realizar o resultados que no podemos reconocer. Es muy difícil en innumerables casos, descubrir la imposibilidad de operaciones o la inadmisibilidad de un resultado antes de que la operación se realice. Por ejemplo al sustraer de:

$$7a + 5b,$$

los términos de a + 3b, 3a -2b y 3a + 7b

obtenemos: 7b – 10b. Este resultado es imposible en AA.

[5] En este artículo sólo consideramos las operaciones de adición y sustracción.

Surgimiento de Términos Positivos y Negativos

Peacock consideró que sería conveniente denominar a los términos que no están precedidos por signo alguno, o lo están por el signo más, términos positivos y aquellos precedidos por el signo menos, términos negativos. Señaló que los estudiantes deben advertir que no se adhiere significado a los adjetivos positivo y negativo en AA. Peacock desvía así el énfasis de atribuir significado a los símbolos y signos a priorizar las leyes de las operaciones.

De hecho, no necesitaba términos negativos para sustraer. Afirmaba: “Si sustraemos b de a, el resultado está representado por a-b, que expresa el exceso del número a sobre b.” Lo que fuerza a definir términos negativos es que estos aparecen en multiplicaciones y divisiones. Por ejemplo, dividir $2ab + b^2 + a^2$ entre a + b. El cociente es

[$2b - \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} - \ldots$]. El segundo término del cociente $-\frac{b^2}{a}$ es la cantidad que al multiplicarla por *a*, produce: $-b^2$ porque $a \cdot \frac{-b^2}{a} = \frac{-ab^2}{a} = -\frac{ab^2}{a}$ = $-b^2$, siempre y cuando admitamos la existencia del término negativo $\frac{-b^2}{a}$.

Emergencia de Formas Equivalentes

Este autor advirtió que cuando los números son sumados, sustraídos, multiplicados o divididos, generalmente omitimos al concluir la operación, toda traza de los números originales y hacemos uso únicamente del resultado final expresado por los nueve dígitos y el cero. Sin embargo, si empleamos símbolos para denotar números generalmente no podemos, al menos que se trate de operaciones inversas, omitir en los resultados los símbolos involucrados en las operaciones, ni tampoco las operaciones mismas. Este hecho dio nacimiento a las formas equivalentes. Mostró que al encontrar las formas equivalentes, arribamos a restricciones en AA, Por ejemplo:

$$c - 10 + d + 8 - 14 - d + 9 + e = c + e - 7.$$

Sin embargo no puede igualarse a: -7 + c + e, expresión imposible en AA.

En el capítulo V encuentra formas equivalentes en ecuaciones cuadráticas que nos conducen a soluciones ambiguas. Así en $19x - 39 - 2x^2 = 6x - 33$, existen dos valores de x que son: $\frac{1}{2}$ y 6. Al completar cuadrados obtenemos:

$\frac{169}{16} - \frac{13x}{2} + x^2 = \frac{121}{16}$. Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, se llega a: $\frac{13}{4} - x = \frac{11}{4}$; $x = \frac{1}{2}$. Pero si invertimos el orden de los términos de la ecuación anterior, construiremos una forma equivalente a ésta y obtendremos:

x = 6. Existen dos valores de x. Por consiguiente, la solución es ambigua. Afirmaba también que, las ecuaciones pueden ser posibles o imposibles. La ecuación

$8x^2 + 33x = 44 - 48$ involucra una operación imposible. Las dos raíces de esta ecuación en *AS* serían –4 y $-\frac{1}{8}$ pero ninguna de las dos puede interpretarse en AA. Esto muestra que la solución de ecuaciones requerirá en general, de la ayuda de los propios principios de AS.

ÁLGEBRA SIMBÓLICA

Peacock se trasladó de AA a AS *bajo* las siguientes consideraciones:

> *"La suposición de la existencia independiente de los signos + y – conduce a la operación denotada por – igualmente posible en todos los casos: y es esta suposición la que impone la separación de AA y AS y la que vuelve necesario el establecimiento de los principios de esta última bajo un uso independiente de signos sugerido como un medio para evadir una dificultad resultante de la aplicación de operaciones aritméticas a símbolos generales."* (Peacock 1830).

Alternativamente, más adelante en la misma obra, Peacock escribió:

> *"Si, generalizamos la operación denotada por -, de manera que pueda aplicarse en todos los casos, habremos encontrado la existencia independiente de este signo como una consecuencia necesaria y por lo tanto habremos introducido una clase de cantidades, cuya existencia nunca fue contemplada en la Aritmética o en el Álgebra-Aritmética."* (Peacock1830)

La restricción esencial de que AS debe incluir a AA cuyos principios sugirieron los de AS, la denominó, el Principio de Permanencia de Formas Equivalentes y lo enuncia como sigue:

> *"Cualquiera que sea la forma equivalente en Álgebra Aritmética considerada como la ciencia de la sugestión, donde los símbolos son generales en su forma, aunque específicos en sus valores, continuará siendo una forma equivalente donde los símbolos son generales tanto en su naturaleza como en su forma".*

Añadió Peacock, *"bajo este principio seremos capaces de dar una interpretación consistente a formas simbólicas como +a y –a refiriéndolas la una a la otra".*

Asimismo este autor afirma que solamente en AS formamos y reconocemos los resultados cualesquiera que sean, sin ninguna referencia a su consistencia con las definiciones o reglas del AA. Esto nos lleva a las equivalencias siguientes:

$$a - (a + b) = a - a - b = -b;$$

$$a - (a - b) = a - a + b = +b.$$

El principio de formas equivalentes asegura la identidad de las dos ciencias en cuanto a los resultados en común y evita que el AS degenere en una ciencia totalmente arbitraria. Así los resultados de AS que no son comunes a los de AA son generalizaciones de forma, y no necesariamente consecuencia de las definiciones.

Enfatiza Peacock que es en el paso de AA a AS, cuando los símbolos cesan de ser aritméticos, que puede determinarse el significado de las operaciones y de las cantidades no por definición sino vía interpretación. Por ejemplo, la adición de un símbolo precedido por un signo negativo es equivalente a la sustracción del mismo símbolo precedida por el signo positivo e inversamente. Así:

$$a + (-b) = a - b = a - (+b)$$

$$a - (-b) = a + b = a + (+b)$$

En el caso de símbolos negativos, la operación de adición no puede continuar asociándose con la idea fundamental de crecer, ni la sustracción con la de decrecer. Numerosos son los casos en que las cantidades negativas admiten una interpretación consistente. Un ejemplo de la existencia de cualidades de magnitudes fue expresarlas como direcciones opuestas de rectas en geometría, una de las aplicaciones más importantes de AS. Otro ejemplo es la simbolización de los conceptos opuestos de posesión y deuda. Peacock agregó: "los ejemplos anteriores sobre la interpretación del significado de cantidades negativas y de las operaciones a que están sujetas, serán suficientes para mostrar al estudiante que el AS no es irreal ni imaginaria." (1845)

Es importante señalar que para Peacok hacen sentido los términos negativos en AA. Estos se convierten en símbolos negativos en *AS*, pero nunca nombra a estos símbolos números negativos.

ESBOZO DIDÁCTICO

¿Por qué es necesario considerar el AA de Peacock en la enseñanza del álgebra escolar?

En la Inglaterra de este autor, no se había dilucidado aún una posible extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros. Sin embargo, Peacock mostró la necesidad de rescatar las cantidades negativas y se enfrentó a tratar de justificar su existencia a fin de validar muchos resultados ya clásicos de teoría de números y álgebra. Además, con el propósito de exhibir a los estudiantes lo necesario de las cantidades negativas, Peacock construyó el AA donde la negatividad no tenía cabida creando así la urgencia de su aceptación. Recurrió al uso independiente de los signos más y menos, artificio teórico introducido por él, para poder justificar las cantidades negativas y la validez de la operación de sustracción en todos los casos, arribando así al AS. Dentro de la Educación Matemática y específicamente en el curso introductorio del álgebra elemental, hemos encontrado que muchos estudiantes de 12 a 13 años de edad, al resolver sus ejercicios, consideran sólo signos y no números positivos y negativos. Esta situación los ha conducido frecuentemente a un uso arbitrario del lenguaje matemático y a la pérdida de significado y sentido en las tareas escolares.

Dado que *el uso independiente de los signos más y menos* apareció tanto en la historia como también en estudiantes actuales, se recurrió en esta investigación, al método histórico-crítico caracterizado por movimientos recurrentes entre el análisis de textos clásicos de la historia de las matemáticas y el trabajo empírico realizado en el aula. El análisis histórico facilita por ejemplo, la construcción de secuencias de enseñanza que reflejan el progreso obtenido de la investigación teórica que puede ponerse a prueba en situaciones actuales donde conviven estudiantes y profesores. Acto seguido se vuelve a la historia de las ideas una vez que la búsqueda se ha enriquecido con los resultados del análisis empírico. Este movimiento de ida y vuelta es lo que sitúa estos estudios en el campo de la educación matemática y no en la epistemología o la historia de las matemáticas. (Filloy & Rojano, 1985; Gallardo, 2002)

El reto al que nos enfrentamos ahora es:

¿Cómo incorporar el legado de Peacock a los avances conceptuales y tecnológicos existentes actualmente en el álgebra escolar?

Pensamos que podría lograrse la incorporación del AA al álgebra escolar actual, si en nuestro trabajo empírico a iniciar, no perdemos de vista la importancia de advertir a los estudiantes que los naturales no son los únicos números y que los signos más y menos, además de corresponder a las operaciones familiares de adición y sustracción, forman parte de unos *números nuevos*, los enteros, que adquirieron este estatus en la historia después de muchos siglos de evitamiento y escasos reconocimientos. Ello explica en parte la dificultad de aceptarlos por los estudiantes situados en la transición de la aritmética al álgebra, donde la supuesta arbitrariedad de las literales agrega otro conflicto más.

Finalmente, estos estudios históricos pueden inducir a una reconceptualización de los números negativos en el currículum de las matemáticas escolares.

REFERENCIAS

Euler, L. (1828). *Elements of algebra.* 5nd ed. London: Longman, Orme and Co.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12–13 year olds with high proficiency in pre- algebra), in S. K. Damarin and M. Shelton (eds.): *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.* Columbus, Ohio.

Frend, W. (1796). *The principles of algebra*. London.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192. Kluwer Academic Publishes. Printed in the Netherlands.

Hamilton, W. R. (1837). Theory of conjugate function, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. *Transactions of the Royal Irish Academy* 17, 293-422. (In the mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton, H. Halberstam and R. E. Ingra, eds., 3, 3-96 New York/London: Cambridge Univ. Press. 1967).

Maseres, F. (1758). A dissertation on the use of the negative sign in algebra. London.

Peacock, G. (1830). *A treatise on algebra*. London.

Peacock, G. (1833). Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis. *In Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 185-352.

Peacock, G. (1842). *A treatise on algebra*. 2nd ed. (Reprinted New York. Scripta Matemática *1940*).

Pycior, H. (1981). George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra. *Historia Matemática*, 8, 23-45.