La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas

Armando Sepúlveda López, Cynthia Medina García
y Diana Itzel Sepúlveda Jáuregui

Resumen: En este artículo se analizan algunos aspectos que ha tenido el desarrollo de la resolución de problemas en la educación matemática y algunas de las acciones cruciales que conducen a su solución. Se informa el trabajo realizado por estudiantes de bachillerato cuando se enfrentaron a un conjunto de problemas o tareas que involucraron diferentes métodos de solución en un escenario de instrucción basado en resolución de problemas. Durante su implementación, los estudiantes trabajaron en pequeños grupos, presentaron y defendieron sus ideas frente al grupo completo y revisaron sus intentos de solución como resultado de críticas y opiniones que se dieron durante sus presentaciones y discusiones en clase. En este contexto, los estudiantes exhibieron diferentes niveles de entendimiento que les permitieron ir comprendiendo las ideas fundamentales asociadas con la solución y, finalmente, resolvieron las tareas.

Palabras clave: resolución de problemas, tareas, comprensión, ciclos de entendimiento, instrucción.

Problem solving and the use of tasks in the teaching of mathematics

Abstract: In this article some aspects related to the development of the resolution of problems in the mathematical education are analyzed as well as some of the crucial actions that lead to their solutions. It is reported the work carried out by high school students when they confronted a set of problems or tasks involving different methods of solutions in an instructional environment focused on the resolution of problems. During the implementation, the students worked in small groups, presented their ideas to the class and defended them, and they revised their own attempts of solution as a result of the critics and opinions that occurred through their presentations and discussions in class. In this context, the students exhibited different levels of understanding that allowed them to comprehend the fundamental ideas associated with the solution and, eventually, they solved the tasks.

Fecha de recepción: 5 de septiembre de 2008.

Keywords: resolution of problems, tasks, understanding, understanding cycles, instruction.

INTRODUCCIÓN

Sin duda, la resolución de problemas es la línea sobre la que se han centrado el mayor número de esfuerzos, tanto por lo escrito sobre el tema como por el desarrollo de proyectos de investigación en los últimos 30 años y, en consecuencia, la que mayor impulso ha proporcionado a la educación matemática. Quizás la razón sea que se nutre de los aspectos esenciales del quehacer matemático: los problemas y las acciones típicas del pensamiento que intervienen en el proceso de solución. El estudio e incorporación de estos aspectos, así como la puesta en claro de cómo realizar acciones que contribuyan a la resolución de los problemas, se debe a George Polya que, debido al acostumbrado fracaso de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, se propuso diseñar un método que pudiera servirles para aprender a resolver problemas, al cual denominó *¿Cómo resolverlo?* (Polya, 1945), marcando así un nuevo rumbo en el estudio de problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Es a partir de la década de 1970 cuando se reconoce plenamente el trabajo de Polya y surgen estudios, artículos y libros que buscan dar explicaciones a sus planteamientos desde diferentes ángulos. Algunos de ellos son: NCTM (1980, 2000), Schoenfeld (1985), Santos (2007), Lesh *et al.* (2000), Lester y Kehle (2003), sin citar a otros investigadores que se ubican dentro del constructivismo.

Aquí se destacan dos importantes planteamientos surgidos de estos estudios: el primero se relaciona con el diseño de problemas o tareas que resulten útiles en la enseñanza de las matemáticas, y el segundo tiene que ver con la implementación de una forma de instrucción que combine el trabajo colectivo de los estudiantes, en pequeños grupos y en toda la clase, con el individual (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999, 2000; NCTM, 2000). En este contexto se ubica el presente trabajo; las tareas fueron diseñadas para que los estudiantes expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen mediante la discusión y el intercambio de experiencias. Nos interesa documentar el cambio en las maneras de pensar de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de matemáticas escolares que involucran diferentes modos de solución, mediante una forma particular de instrucción.

Algunas preguntas que guían el desarrollo del estudio son: ¿Qué formas de comprensión matemática y métodos de solución aparecen durante los procesos de resolución de problemas? ¿Qué formas de instrucción favorecen el aprendizaje de los estudiantes? ¿Cuál es el papel del profesor durante el desarrollo de las sesiones de aplicación de las tareas? ¿Qué significa que los estudiantes aprendan matemáticas?

MARCO TEÓRICO

Importancia de la resolución de problemas

Si bien es cierto que el desarrollo del conocimiento matemático se debe, en gran parte, a la resolución de los problemas que matemáticos y otros científicos se han planteado a lo largo de la historia, no es sino hasta los trabajos de George Polya, en 1945, cuando esta actividad comienza a considerarse importante en la educación matemática. Preocupado por el fracaso de la mayoría de sus estudiantes y con la idea inicial de establecer un método que pudiera servirles para aprender matemáticas, Polya (1945) propuso un método que puede ser interpretado como una propuesta de enseñanza, o bien, de aprendizaje. Los argumentos esgrimidos en este método se convirtieron en un paradigma que trajo consecuencias importantes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En efecto, sus planteamientos teóricos y metodológicos se convirtieron en la línea de investigación que mayor progreso y desarrollo han procurado a la educación matemática. Pero esto no ocurrió inmediatamente, no fue sino hasta la década de 1970 cuando empezó a reconocerse ampliamente el trabajo de Polya, una vez que la naciente comunidad de educadores matemáticos vio en su método una metodología útil para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, estableciendo así una nueva línea de investigación y desarrollo. Además, a Polya se debe la incorporación de los procesos heurísticos y el monitoreo y control como ingredientes fundamentales en la resolución de problemas y, por tanto, en la educación matemática.

Polya (1945) establece que la resolución de problemas es una característica esencial que distingue a la naturaleza humana y cataloga al hombre como "el animal que resuelve problemas". Siendo un matemático productivo, se preocupó por el mal desempeño de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente al resolver problemas. Creía que era posible llevar al salón de clases su experiencia como matemático cuando se encontraba resolviendo problemas y, de esta manera, ayudar a los estudiantes (Santos, 2007). Analizó los diálogos que regularmente realizaba consigo mismo, cuando se encontraba inmerso en el proceso de solución y sistematizó un método que puede ser útil a los estudiantes al resolver problemas.

Con él, pretendía dar las herramientas necesarias para incursionar, con sentido, en la realización de acciones y reflexiones que condujeran a los estudiantes a encontrar la solución. Propuso que el profesor apoye y oriente inicialmente a los estudiantes a desarrollar los procesos de resolución de problemas en los que intervienen la heurística y la reflexión, con la intención de que después los estudiantes puedan seguir por sí mismos estos procesos.

Polya (*ibid.*) distingue cuatro fases en la resolución de problemas: comprender el problema, diseñar un plan; ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Además, establece que existen dos tipos de problemas: *rutinarios* y *no rutinarios*. Los problemas *rutinarios* son aquellos que, teniendo interés en resolverlos, el que los enfrenta encuentra el camino de solución de manera casi inmediata, no requieren un esfuerzo mental extraordinario para visualizar el método, el trazo, el algoritmo o el lugar donde puede consultarse una idea para su solución. En cambio, los problemas *no rutinarios* requieren esfuerzo y meditación antes de que se vislumbre alguna idea para la solución. Esta clasificación es relativa, pues para algún estudiante resolver un problema puede significar un esfuerzo demasiado grande, para otro puede ser menor el esfuerzo realizado, y puede significar un acto de simple recordatorio para un matemático talentoso o un estudiante con entrenamiento.

Las acciones físicas o mentales que contribuyen a encontrar pistas o ideas que ayudan a resolver los problemas fueron identificadas por Polya (*ibid.*) como procesos heurísticos; algunas veces son trazos, toma de valores extremos, aplicación de resultados conocidos, comparaciones, visualizaciones, descarte de posibilidades, etc., los cuales necesariamente se combinan con los procesos de reflexión (autorreflexión).

Schoenfeld (1985) profundiza y complementa el trabajo de Polya; incorpora y justifica la dimensión cognitiva en el proceso de resolución de problemas. Llama metacognitivos a los procesos de reflexión que están asociados a las acciones mentales de monitoreo y control que actúan implícita y continuamente mientras se resuelven problemas; es una habilidad que se va desarrollando y ayuda a identificar desviaciones y contradicciones que se cometen en el camino de solución. Para Schoenfeld, las indicaciones que permiten avanzar en el método propuesto por Polya equivalen a hacer un inventario de lo que el estudiante sabe y de la manera en la que adquirió los conocimientos.

Además, Schoenfeld considera que, para entender el proceso llevado a cabo por quienes resuelven problemas matemáticos e incidir en la instrucción, es necesario considerar la disciplina, la dinámica del salón de clases y el aprendizaje junto con el proceso de pensar, es decir, se necesita incorporar el conocimiento de los matemáticos, profesores de matemáticas, educadores y especialistas de las ciencias cognitivas.

En diferentes documentos del NCTM (1980, 2000) se destaca la importancia de considerar la resolución de problemas como el eje central de las matemáticas escolares y se promueve el desarrollo de estudios e investigaciones relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se propone la resolución de problemas como una actividad fundamental que los estudiantes deben realizar de manera individual y colectiva, pues propicia un ambiente para lograr un aprendizaje significativo que implica la intervención de otros procesos de pensamiento como son: la búsqueda de conexiones, el empleo de distintas representaciones, la necesidad de justificar los pasos dados en la solución de un problema y comunicar los resultados obtenidos.

Con este tipo de actividades, se espera que los estudiantes desarrollen ciertas habilidades para el estudio y entendimiento de las matemáticas, las cuales están vinculadas con los aspectos característicos del quehacer de las matemáticas, es decir, con acciones cotidianas que realiza una persona que se encuentra inmersa en resolver problemas. Schoenfeld (1992) identifica estas acciones como las características del pensamiento matemático: tomar casos particulares, plantear conjeturas, descubrir patrones y relaciones, hacer generalizaciones y justificar resultados. También reconoce que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas, donde los estudiantes tienen oportunidad de desarrollar modos de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina.

Así, el reto en la instrucción matemática es generar condiciones de aprendizaje para los estudiantes en las que se reflejen valores propios relacionados con el desarrollo de la disciplina. En particular, el salón de clases debe promover actividades y hábitos consistentes con la práctica real de la disciplina (Schoenfeld, 1992, p. 345).

> ...Para desarrollar los hábitos apropiados y la disposición para interpretar y encontrar sentido a las ideas matemáticas y el desarrollo de modelos apropiados de pensamiento matemático, la comunidad de práctica en donde los estudiantes aprenden matemáticas debe soportar y desarrollar las maneras de

> pensar de la práctica matemática. Esto es, el salón de clases debe ser comunidades en las que el encontrar sentido a las ideas debe ser lo que se espera que los estudiantes practiquen.

En este contexto, resulta relevante que los estudiantes adquieran una manera de pensar propia del método inquisitivo. Postman y Weingartner (1969, p. 23) afirman:

> El conocimiento se produce en respuesta a preguntas... Una vez que [el estudiante] ha aprendido cómo preguntar –preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas–, el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y quiera conocer.

En el proyecto curricular del NCTM (2000) *Principios y estándares para las matemáticas escolares*, se asigna especial interés al estándar de "resolución de problemas". Cuando los estudiantes aprenden a resolver problemas, desarrollan procesos de pensamiento ordenados que, poco a poco, se van convirtiendo en una habilidad para encontrar estrategias adecuadas para determinado tipo de problemas, lo cual permite el desarrollo de nuevas comprensiones matemáticas. Se debe animar e involucrar a los estudiantes en la resolución de problemas, se debe propiciar el espíritu de aferrarse a encontrar y formular una solución cuando intentan resolver un problema complejo.

Para aprender a resolver problemas en matemáticas, los estudiantes deben adquirir formas de pensamiento, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza en sus acciones para explorar situaciones desconocidas. Esto contribuye a un dominio de situaciones similares y a la adquisición de la capacidad de exteriorizar ideas matemáticas.

La resolución de problemas no es una parte aislada de la educación matemática y de los programas de las materias, es una parte fundamental para todo aprendizaje matemático (NCTM, 2000).

El contexto de los problemas puede variar de experiencias que son familiares a los estudiantes hasta aplicaciones involucradas con las ciencias. La idea es que en los problemas se involucren los conceptos matemáticos importantes del currículo y, si se hace una buena elección respecto al nivel y familiaridad con los estudiantes, se pueden lograr avances en el aprendizaje matemático que, posteriormente, será el soporte para atacar y resolver problemas más complejos. A los profesores les toca representar el importante papel de elegir problemas que valgan la pena, pues su resolución debe ser útil para ayudar a los estudiantes a desarrollar dominios de contenidos con técnicas específicas.

En general, se acepta que las matemáticas nos ayudan a organizar y ordenar nuestros pensamientos, nos hacen competentes tanto para el desarrollo de diversas actividades intelectuales como hacia los demás. Sin embargo, a pesar de estos puntos destacables, la mayoría de las personas tienen dificultades y muestran deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas; algunas de las posibles razones son: los alumnos no tienen la oportunidad de entender la importancia de lo que significa aprender matemáticas, el currículo que se ofrece es demasiado rígido y los estudiantes no están comprometidos con el aprendizaje de las matemáticas.

Por su parte, Lester y Kehle (2003) hacen una revisión sobre el uso y el efecto de la resolución de problemas en Estados Unidos de 1980 a 2000, y concluyen que están muy lejos de lograrse los objetivos y metas trazadas por el NCTM en 1980, en el sentido de considerar la resolución de problemas como el eje central de las matemáticas escolares. Establecen que la naturaleza de la literatura sobre resolución de problemas ha ido cambiando por las contribuciones de Kilpatrick, Silver y Schoenfeld y se han logrado avances en cuatro aspectos fundamentales:

1. Antes de la década de 1980, el enfoque principal de la investigación se centraba en la determinación de la dificultad de los problemas considerados aisladamente. Hoy se reconoce que la dificultad, además de las características del problema, también depende de la disposición, creencias y actitudes que tienen los estudiantes, así como de sus antecedentes y experiencias.
2. La distinción entre las personas exitosas y las no exitosas para resolver problemas. ¿En qué se diferencian unas de otras? Schoenfeld (1985) da una caracterización de las personas exitosas para resolver problemas (citado por Lester y Kehle, 2003, p. 507):
   a) conocen las matemáticas de manera diferente de las que no son exitosas; sus conocimientos están conectados y compuestos de ricos esquemas;
   b) suelen enfocar su atención en las características estructurales de los problemas;
   c) son más conscientes de sus debilidades y fortalezas para la solución de los problemas;
   d) son mejores para monitorear y regular sus esfuerzos en la resolución de problemas, y
   e) suelen preocuparse más por obtener soluciones elegantes.

3. La necesidad de atender la instrucción mediante la resolución de problemas, ya que ésta se ha ido desarrollando por el "folklore" de enseñar matemáticas y no necesariamente de la investigación. Aquí se destacan cinco resultados que valoran este tipo de instrucción (*ibid*, p. 508):
   a) los estudiantes deben resolver muchos problemas para desarrollar sus habilidades;
   b) la habilidad de resolución de problemas se desarrolla lentamente en un periodo prolongado;
   c) los estudiantes deben creer que la resolución de problemas es importante para su maestro;
   d) la mayoría de los estudiantes se benefician de una instrucción planeada y sistemática sobre resolución de problemas, y
   e) enseñar a los estudiantes estrategias, heurísticas y fases de la resolución de problemas les proporciona habilidades para resolver problemas matemáticos en general.
4. El estudio de la metacognición en la resolución de problemas, la cual tiene dos componentes relacionados: el conocimiento propio del individuo es un proceso de pensamiento, y la regulación y monitoreo (o autocontrol) es una actividad intrínseca durante el proceso de resolución de problemas. Aunque la metacognición se considera la estrategia naturalmente utilizada en la resolución de problemas, no se ha resuelto el grado en que ella contribuye a la solución de los problemas.

Finalmente, Lester y Kehle (*ibid*. p. 509) argumentan que la resolución de problemas es una actividad del comportamiento humano extremadamente compleja, que involucra un esfuerzo que va más allá de recordar hechos o de la aplicación de procedimientos bien aprendidos; las habilidades involucradas se desarrollan lentamente en un largo periodo. La resolución de problemas parece ser función de varias categorías de factores interdependientes, como la adquisición y utilización de conocimientos, control, creencias y contextos sociales y culturales.

El uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas

En los *Principios y estándares para las matemáticas escolares* (NCTM, 2000) se plantea como una aspiración de ese proyecto curricular que los estudiantes se ocupen de la resolución de problemas planteados por el profesor, que debe tener un conocimiento profundo de las matemáticas involucradas, y que éste los ayude a plantear conjeturas interviniendo en momentos clave sin que proporcione ideas que eliminen el reto que representa la tarea. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas implican un comportamiento complejo que requiere reflexión y esfuerzo continuo del profesor para lograr una disposición de los estudiantes a involucrarse en los procesos de resolución de problemas mediante la utilización de tareas. En este sentido, el NCTM (2000, pp. 18, 19) plantea:

> En la enseñanza efectiva, se emplean tareas que poseen cualidades para introducir ideas matemáticas importantes y para comprometer y retar intelectualmente a los estudiantes. Las tareas seleccionadas pueden despertar la curiosidad de los estudiantes y atraerlos hacia las matemáticas, ya que pueden ser conectadas con experiencias del mundo real de los estudiantes, y ello puede originarse en contextos que son puramente matemáticos... La solución de tales tareas puede hacerse desde distintos caminos... Pero estas tareas por sí solas no son suficientes para una enseñanza efectiva. Los profesores también deben decidir cuáles aspectos de una tarea deben resaltarse, cómo organizar y orquestar el trabajo de los estudiantes, cuáles preguntas hacer al considerar una variedad de experiencias y cómo apoyar a los estudiantes que no han realizado los procesos de pensamiento sin eliminar el reto que contiene la tarea.

El aprendizaje de las matemáticas involucra el desarrollo de cierta disposición de los estudiantes para explorar e investigar relaciones matemáticas, emplear distintas formas de representación al analizar fenómenos particulares, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados. Esta disposición matemática resulta relevante en los procesos de refinar los acercamientos iniciales de los estudiantes.

En esta perspectiva, el NCTM (2000) sugiere la importancia de que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos al resolver distintos tipos de problemas que los motiven a expresar lo que saben, los alienten a estar dispuestos a investigar lo que desconocen e impliquen contenidos fundamentales del currículo. También es importante que los profesores ayuden a los estudiantes a plantear conjeturas y apoyen a quienes lo necesitan sin eliminar el reto que contiene la tarea.

Es decir, implícitamente se adopta una posición constructivista del aprendizaje. El sujeto construye su conocimiento en la medida en la que tiene contacto con los objetos de aprendizaje y adapta sus nuevas experiencias con las anteriores, lo cual genera una readaptación de sus estructuras mentales que se traducen como cambios en la manera de pensar sobre dichos objetos y que, necesariamente, se manifiestan a través de representaciones externas.

Además, se reconoce que los estudiantes exhiben ciclos o episodios de comprensión en las distintas fases de resolución de problemas, lo que les permite refinar constantemente sus modelos de solución (Lesh *et al.*, 2000). Esto es, en sus acercamientos, los estudiantes incorporan una diversidad de formas de representación y generan ciclos de entendimiento que evolucionan a través de sus interpretaciones iniciales, intermedias y finales de las tareas. En general, al trabajar los problemas, los estudiantes muestran varios ciclos de modelación en los que sus acercamientos iniciales, descripciones, explicaciones y predicciones se refinan gradualmente, y se revisan o se rechazan con base en la retroalimentación y discusión de sus ideas dentro de una comunidad.

En la resolución de problemas, siempre es posible observar varios niveles y tipos de respuesta, una de las cuales es la mejor, dependiendo del propósito y las circunstancias, y los estudiantes deben adquirir la capacidad de juzgar su valor relativo o buscar formas alternativas de pensar el problema. De otra manera, el estudiante no tiene modo de saber que debe ir mas allá de la forma inicial de pensar el problema y tampoco tiene manera de juzgar las ventajas y desventajas de un modo alternativo de pensar.

Cualidades asociadas a los problemas

A fin de contribuir al diseño de tareas que sirvan para promover el aprendizaje, un grupo de investigadores se ha dedicado a establecer las bases y principios para su diseño. En los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced Assesment Package for the Mathematics Curriculum, 1999, 2000), proyecto dirigido por Schoenfeld, se propone una metodología para el diseño y la implementación de las tareas. Éstas deben tener ciertas cualidades: deben ser fáciles de entender y atractivas para los estudiantes de modo que, al tener contacto con ellas, expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen mediante la discusión y el intercambio de experiencias; además, deben incluir contenidos fundamentales del currículo y, por su diseño, debe ser posible recuperar los procesos de pensamiento realizados por los estudiantes en sus intentos de solución.

El diseño de cada tarea contempla varios componentes que orientan a profesores y estudiantes respecto al papel que tendrán antes o durante su aplicación. Así, los componentes de las tareas son: panorámica; descripción de la tarea; antecedentes; elementos centrales de ejecución y condiciones para su empleo.

Por su parte, Lesh establece los principios para la creación de actividades de pensamiento revelador o de generación de modelos (Lesh *et al*., 2000). Estas actividades tienen la cualidad de permitir a los estudiantes revelar sus ideas iniciales, después se presenta un proceso de evolución que es producto de su interacción con la tarea, con el medio ambiente o con otros compañeros de su salón de clases y el profesor. De esta manera, se extienden sus ideas y las expresan a través de modelos que son la base de un entendimiento matemático profundo, las cuales son incorporadas, de alguna manera, en una diversidad de formas de representación.

Es decir, se generan ciclos de entendimiento que evolucionan a través de sus interpretaciones iniciales, intermedias y finales, con lo cual se puede percibir el nivel de matematización que los estudiantes están logrando. La identificación de estos ciclos en términos de los recursos matemáticos, estrategias y representaciones genera información útil para analizar los acercamientos de los estudiantes en la resolución de problemas. En particular, Lesh y Kelly (2000) han documentado que, cuando los estudiantes tratan con tareas o problemas que les son significativos, desencadenan ideas matemáticas fundamentales. Además, a menudo sus soluciones van más allá de la situación escolar y, a la larga, construyen modelos para resolver las tareas. De la observación y análisis de su trabajo surge un mejor entendimiento de las fortalezas y debilidades de los estudiantes, los cuales capacitan a los profesores para la toma de decisiones instruccionales que contribuyan a lograr una enseñanza más efectiva.

Así, es deseable que los problemas o tareas incluyan cualidades en su diseño, que permitan observar distintos niveles de entendimiento, tanto por los grados de interpretación y tipos de acercamiento realizados por los estudiantes como por el manejo de los recursos y conceptos matemáticos. De esta manera, uno de los propósitos fundamentales de la implementación de estos problemas o tareas es desarrollar el poder matemático de los estudiantes descrito en el NCTM (1989, p. 5) como un aspecto que incluye habilidades de los estudiantes para "explorar, conjeturar y razonar lógicamente, así como la habilidad para usar efectivamente una variedad de métodos matemáticos en la resolución de problemas no rutinarios".

Además, cuando los estudiantes se enfrenten a las tareas, se espera la intervención y desarrollo de algunos de los procesos descritos por el NCTM (2000):

resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones, y representación, que los conduzcan a resolver dichas tareas y logren así el dominio de los temas de matemáticas involucrados. Asimismo, se busca fomentar la adquisición de las habilidades básicas identificadas como: particularizar, generalizar, descubrir patrones y relaciones, hacer conjeturas y justificar resultados (Schoenfeld, 1992).

En relación con las características que deben reunir los problemas, Santos (1997, pp. 283, 284) sugiere algunos criterios sobre su diseño para que ofrezcan un potencial matemático en el salón de clases:

1. los problemas, sin ser fáciles, deben ser accesibles a una gran variedad de estudiantes con diferentes antecedentes o recursos matemáticos;
2. los problemas deben demandar de los estudiantes un plan de reflexión, es decir, que no puedan resolverse instantáneamente;
3. los problemas deben involucrar varias formas de solución...;
4. las soluciones de los problemas pueden permitir y facilitar el uso de las ideas matemáticas...;
5. los problemas deben servir de plataformas para realizar diversas exploraciones matemáticas...;
6. cuando un alumno resuelva un problema, deberá ser posible identificar los procesos y operaciones empleadas..., y
7. los problemas deben situarse en contextos donde los estudiantes puedan utilizar o tener acceso a las experiencias y recursos matemáticos previamente estudiados, con cierta naturalidad...

METODOLOGÍA

Este trabajo forma parte de un estudio amplio que se lleva a cabo en el estado de Michoacán como parte del proyecto de investigación sobre la implementación de un conjunto de tareas en las que se promueve la participación de los estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas. Los primeros resultados fueron comunicados en Sepúlveda y Santos (2004). Con el propósito de mostrar el tipo de análisis al que conduce la implementación de este tipo de tareas, aquí se da cuenta de dos de ellas (Balanced Assessment Package for the Mathematics Cirriculum, 1999, 2000): *Ordenar un taxi,* aplicada a un grupo escolar de 24 estudiantes de alrededor de 17 años de la Escuela Preparatoria José María

Morelos; y *Azulejos en la cocina*, aplicada a un grupo de 20 estudiantes de 16 años del CBTis 149, aplicadas en sesiones de dos horas de clase. El desarrollo del proyecto consta de tres etapas:

Etapa de aplicación. Ésta tiene que ver con la instrucción. Varias propuestas curriculares coinciden en señalar la conveniencia de utilizar formas de instrucción que combinen el trabajo colectivo de los estudiantes, en pequeños grupos y en el grupo completo, con el individual, cuya base teórica y metodológica está asociada al aprendizaje cooperativo de Hagelgans *et al*. (1995).

En este contexto, se utilizará la forma particular de instrucción propuesta por Sepúlveda y Santos (2006, p. 1394), la cual consta de cinco pasos:

Actividad previa. El profesor da al grupo una breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares al de la tarea; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.

Trabajo en equipos. Los estudiantes se organizan en equipos de tres, procurando que en cada uno haya estudiantes con distintos niveles de desempeño que tengan la posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos, así como de expresar y comunicar sus ideas. Al concluir el periodo de tiempo asignado al trabajo por equipos, cada uno de ellos entrega su informe de solución.

Presentaciones. Cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.

Discusión colectiva. El profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar ventajas y desventajas de los diferentes métodos de solución presentados y, cuando es necesario, realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones del problema.

Trabajo individual. Enseguida, a partir de la discusión colectiva, los estudiantes tienen la posibilidad de volver a la actividad y aplicar los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción y abordan individualmente la tarea.

Etapa de entrevistas. Como resultado de la observación del trabajo en equipos, de las presentaciones y de la discusión colectiva, se entrevistó a algunos estudiantes que mostraron un comportamiento de interés para la investigación.

Las entrevistas fueron del tipo no estructurada y se abordan aspectos en los que los estudiantes tuvieron dificultad o bien, en los que mostraron ideas relevantes que parecía pertinente explorar.

Etapa de análisis. Interesa distinguir si hay una evolución en el nivel de entendimiento de los estudiantes, así como identificar los momentos cruciales que contribuyeron a ese cambio. El análisis se realizó en tres partes. *Primera:* se analizan el trabajo de los estudiantes en pequeños grupos, los cambios en las interpretaciones de los problemas, el tipo de cantidades y relaciones que utilizaron, el tipo de razonamiento matemático y expresiones de generalización. *Segunda:* se enfoca en describir las variaciones en los diferentes modelos que desarrollaron los estudiantes en cada tarea como resultado del uso de distintas representaciones de los problemas. *Tercera:* se analizan las transcripciones de los equipos que contribuyeron con ideas para la solución de los problemas, así como de los estudiantes que participaron en la discusión durante las presentaciones o en las entrevistas.

Nuestras fuentes de información para el análisis son: *a)* los informes escritos de los estudiantes, tanto del trabajo en equipos como del individual; *b)* las transcripciones de las grabaciones de audio y video realizadas; y *c)* las observaciones de los investigadores. En las sesiones hubo grabación de audio y video, de modo que las copias del trabajo de los estudiantes, los informes del trabajo de campo y las transcripciones de las discusiones en equipos y en el grupo completo conforman el cuerpo de datos de nuestro estudio. Para organizar a los estudiantes en equipos de tres, denominados por las letras A, B, C, etc., se tomaron en consideración: el desempeño mostrado durante las primeras sesiones, antes de la aplicación de las tareas, su comportamiento en el grupo y las opiniones expresadas por sus anteriores profesores de matemáticas.

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

ORDENAR UN TAXI

Es una tarea que implica la toma de decisiones basada en la comparación de dos conjuntos de datos. Se pretende evaluar y promover el aprendizaje de las nociones básicas de la estadística. Se sugiere a los estudiantes que usen gráficas y realicen cálculos para contestar lo que se pregunta.

Cuadro 1 Tiempos registrados por Sara

Taxis amarillos		Taxis azules	
3 min 30 seg	temprano	3 min 45 seg	tarde
45 seg	tarde	4 min 30 seg	tarde
1 min 30 seg	tarde	3 min	tarde
4 min 30 seg	tarde	5 min	tarde
45 seg	temprano	2 min 15 seg	tarde
2 min 30 seg	temprano	2 min 30 seg	tarde
4 min 45 seg	tarde	1 min 15 seg	tarde
2 min 45 seg	tarde	45 seg	tarde
30 seg	tarde	3 min	tarde
1 min 30 seg	temprano	30 seg	temprano
2 min 15 seg	tarde	1 min 30 seg	tarde
9 min 15 seg	tarde	3 min 30 seg	tarde
3 min 30 seg	tarde	6 min	tarde
1 min 15 seg	tarde	4 min 30 seg	tarde
30 seg	temprano	5 min 30 seg	tarde
2 min 30 seg	tarde	2 min 30 seg	tarde
30 seg	tarde	4 min 15 seg	tarde
7 min 15 seg	tarde	3 min 45 seg	tarde
5 min 30 seg	tarde	3 min 45 seg	tarde
3 min	tarde	4 min 45 seg	tarde

"Sara quiere comparar dos compañías de taxi rivales –Taxis Amarillos y Taxis Azules– basándose en su puntualidad para decidir cuál de las dos es mejor. Para ello, solicitó en 20 ocasiones el servicio a cada una de las compañías para ir a su trabajo y registró los tiempos de llegada: antes o después de la hora citada" (cuadro 1).

1. Con base en los registros de los tiempos de llegada, temprano o tarde, decide qué compañía de taxis es mejor.

2. Escribe un argumento en el que Taxis Amarillos es la mejor compañía.
3. Escribe un argumento en el que Taxis Azules es la mejor compañía.
4. ¿Cuál de los dos argumentos que escribiste es más convincente? ¿Por qué?

Los informes escritos de los pequeños grupos muestran acercamientos distintos:

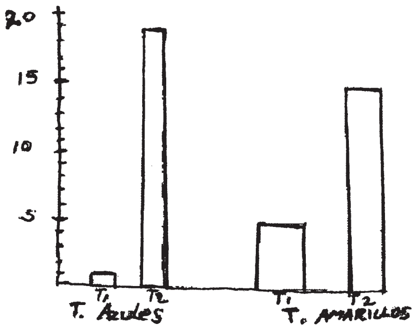
i. El equipo A utilizó diagramas de barras para representar los datos (figura 1); llamó T_1 al número de veces que los taxis de cada compañía llegaron temprano y T_2 al número de veces que llegaron tarde y, basándose en la frecuencia, respondió cuál es mejor.
ii. H utilizó dos histogramas con la variable tiempo en el eje de las x, y la frecuencia en el eje *y*; Taxis Amarillos hacia arriba del eje x y Taxis Azules hacia abajo (figura 3). Calculó medias y medianas para cada compañía y expresó argumentos que involucran la frecuencia.
iii. Los equipos B, C, D, E y F hicieron uso de histogramas no usuales, colocando el número de registro o de taxi en el eje x y en el eje *y* el tiempo de llegada, temprano o tarde, y calcularon los promedios de llegada para cada compañía. B, D y F basaron su decisión en la media: la frecuencia figura en sus argumentos. C consideró los rangos y medianas, mientras que E (figura 2) se basó en los rangos y promedios de ambas compañías.
iv. G utilizó polígonos de frecuencias superpuestos: colocó en el eje x el número de registro y en el eje *y* el tiempo, sin tener en cuenta tiempos negativos; calculó promedios y así tomó su decisión.

Siete equipos concluyeron que Taxis Amarillos era la mejor compañía; cinco de ellos coincidieron en dar como argumento (figura 2): "esos taxis hacen que Sara llegue más temprano y eso es lo que se busca". El equipo E fue el único en afirmar que Taxis Azules es mejor "porque no llega ni muy temprano ni muy tarde. Si se pide a una hora es porque a esa hora se necesita, y Taxis Amarillos es menos constante, llega o muy tarde o muy temprano". Nótese que en este argumento implícitamente están presentes los rangos y promedios de llegada de cada una de las compañías.

Durante las presentaciones, Alejandra (del equipo E) mostró a todo el grupo la hoja que contenía el dibujo que hicieron y anotó en el pizarrón "las medianas que obtuvimos" (dijo). Ante comentarios del profesor e integrantes del equipo F, Alejandra corrigió y precisó que eran las "medias o promedios". Cuando se le

Figura 1 Respuestas del equipo A en *Ordenar un taxi*

1. Con base en estos registros decide qué compañía es mejor. Use adecuadamente cálculos, gráficas y diagramas que le permitan analizar los costos y hacer comparaciones más fácilmente. Escribe todo lo que necesites para responder.



T1 = # de Veces que llegan temprano
T2 = # de Veces que llegan tarde

∑ de T. AMARILLOS T1 = 5 T2 = 15
∑ de T. AZULES T1 = 1 T2 = 19

2. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Amarillos" es la mejor compañía. Escribe claramente tu argumento.

LA PUNTUALIDAD EN LOS TAXIS AMARILLOS ES MEJOR.
Y POR LO TANTO ES LA MEJOR COMPAÑIA, DADO QUE LA IMPUNTUALIDAD ES MENOR QUE LA DE LOS TAXIS AZULES.

3. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Azules" es la mejor compañía.

LA COMPAÑIA DE TAXIS AZULES ES LA MAS impuntual Y CON UN MAYOR NUMERO DE VECES QUE LLEGAN TARDE.

4. ¿Cuál de los argumentos que presentaste es más convincente? ¿Por qué?

LA PRIMERA, PORQUE LA PUNTUALIDAD HACE QUE SARA LLEGE TEMPRANO AL TRABAJO

Figura 2 Respuestas del equipo E en *Ordenar un taxi*

1. Con base en estos registros decide qué compañía es mejor. Use adecuadamente cálculos, gráficas y diagramas que le permitan analizar los costos y hacer comparaciones más facilmente. Escribe toodo lo que necesites para responder.

Amarillos

$$\text{media} = \frac{+\text{Datos}}{\text{no. datos}}$$

$$\text{media} = \frac{-41}{20}$$

$$\text{media} = -2.05$$

Azules

$$\text{media} = \frac{\text{suma d' los datos}}{\text{no. datos}}$$

$$\text{media} = \frac{-65}{20}$$

$$\text{media} = -3.25$$

2. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Amarillos" es la mejor compañía. Escribe claramente tu argumento.

Los taxis amarillos tienen un promedio de impuntualidad d -2.05 min. lo que lo hace más puntual y eficiente que los azules que tuvieron un promedio de impuntualidad de -3.25

3. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Azules" es la mejor compañía.

Es mejor porque aunque casi siempre se tarda se puede calcular cuánto tiempo llegará tarde aproximadamente

4. ¿Cuál de los argumentos que presentaste es más convincente? ¿Por qué?

El de los taxis azules porque no llega ni muy temprano ni muy tarde. A parte es mejor que llegue un poquito tarde y no temprano porque si se pide a una hora es porque hasta esa hora se necesita.

El taxi amarillo es menos constante y a veces llega extremadamente temprano y a veces extremadamente tarde

Figura 2 Respuestas del equipo E en *Ordenar un taxi* (continuación)

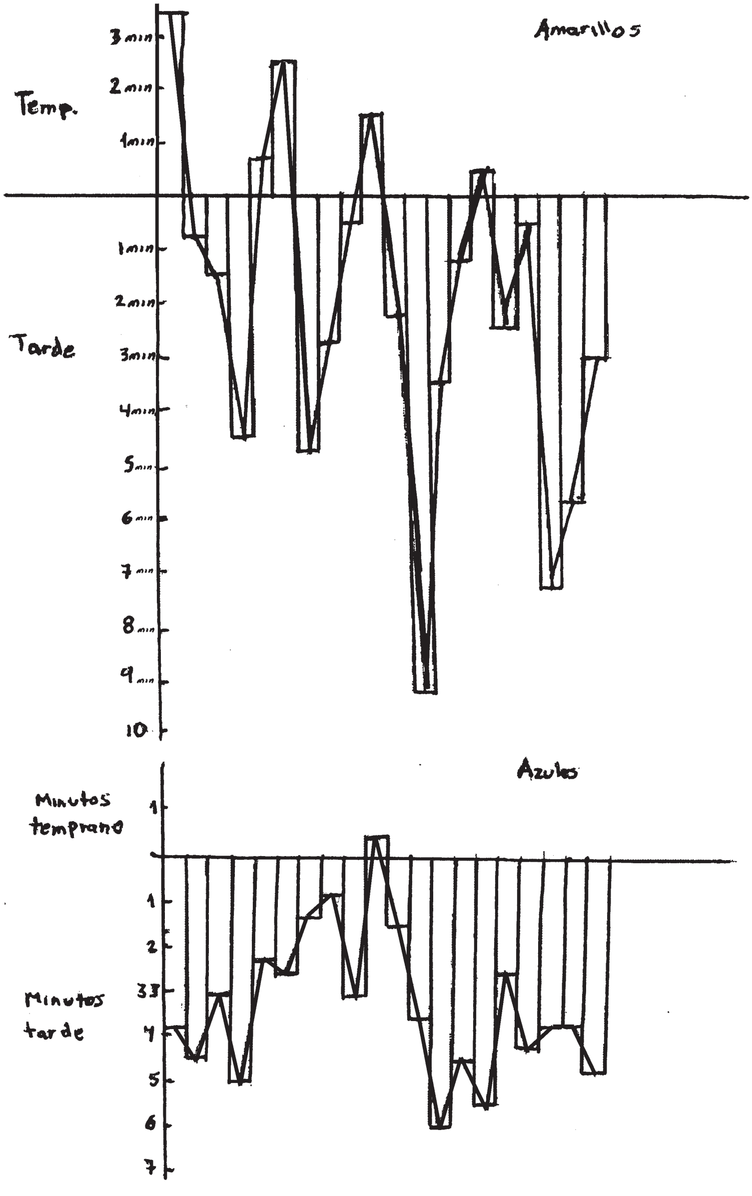
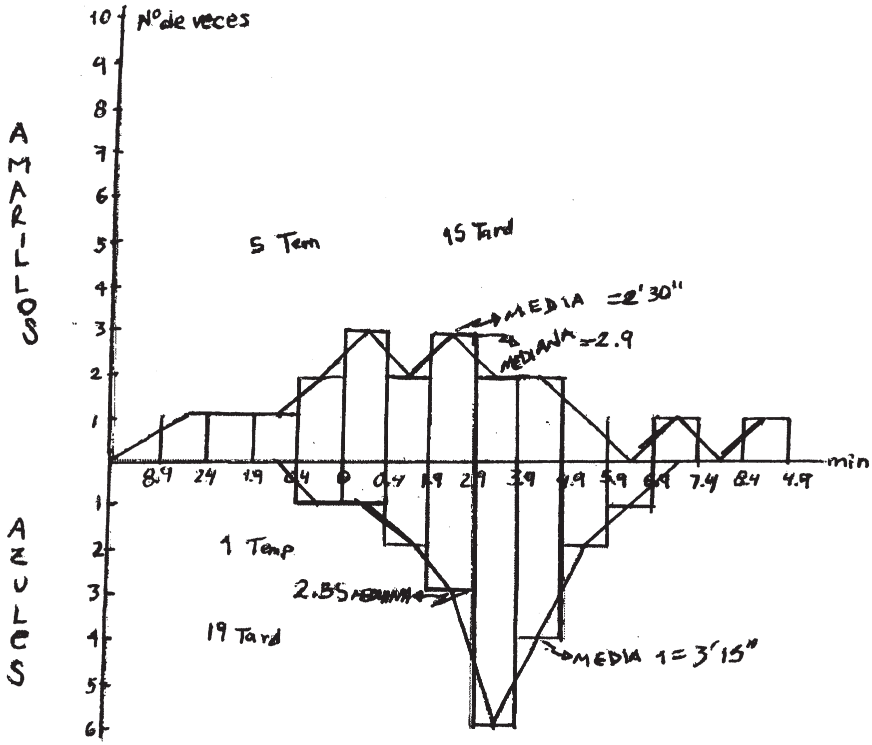


Figura 3 Respuestas del equipo H en *Ordenar un taxi*



preguntó dónde quedaban ubicados esos promedios, tuvo dificultades para responder; sólo mencionó que eran minutos y debían quedar en el eje *y*. Alejandra concluyó su presentación argumentando que los Azules eran mejores taxis, porque los Amarillos son menos constantes y corres el riesgo de algún día llegar tarde. Además, "si lo pides a una hora es porque a esa hora se necesita"; esto motivó el cuestionamiento de la mayoría de los estudiantes, pues iba en contra de lo que habían obtenido en sus equipos.

Cuando Alejandro (equipo C) presentó la solución de su equipo, dijo que sus dibujos eran similares a los de Alejandra y anotó sus cálculos. Para los Taxis Amarillos: rango –5.45 min y mediana 2.55 min; para los Taxis Azules: rango

Figura 3 Respuestas del equipo H en *Ordenar un taxi* (continuación)

1. Con base en estos registros decide que compañía es mejor. Usa adecuadamente cálculos, gráficas y diagramas, que te permitan analizar los datos y hacer comparaciones más fácilmente. Escribe todo lo que necesites para responder.

2. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Amarillos" es la mejor compañía. Escribe claramente tu argumento.

   ES MEJOR PORQUE LLEGA MAS VECES TEMPRANO Y AUNQUE A VECES LLEGAN TARDE ES MUY POCO EL TIEMPO QUE LLEGAN TARDE

3. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Azules es la mejor compañía.

   PORQUE AUNQUE LLEGAN TARDE MUCHAS VECES SON CONSTANTES

4. ¿Cuál de los argumentos que presentaste es más convincente? ¿Por qué?

   EL 1° PORQUE LO QUE SE BUSCA ES LLEGAR TEMPRANO.

–5.30 min y mediana 3.20 min. Concluyó que los Amarillos eran mejores porque llegan más temprano. El profesor pidió que explicara cómo había obtenido la mediana y dónde quedaba ubicada. Alejandro tuvo dificultades.

Fabián (equipo A) dijo que tenían una solución diferente. Pasó al pizarrón, dibujó los diagramas de barras que habían construido basados en las frecuencias de llegada, T_1 temprano y T_2 tarde, para cada una de las compañías (figura 1) y entonces argumentó que si el interés es llegar temprano, los Taxis Amarillos son mejores, porque llegaron más veces temprano. Esta forma de solución fue cuestionada por los equipos B, E y H, ya que ignora la magnitud del tiempo que un taxi llega tarde; un retraso de pocos segundos se considera igual que uno de varios minutos. Posteriormente, Yibé (equipo A) y Core (equipo F) presentaron las soluciones de sus equipos, reforzaron la conclusión de que los Taxis Amarillos eran los mejores. A continuación transcribimos parte de la interacción que se dio entre la presentación de Fabián y la de Core (la participación de Victoria (equipo E) es clave):

FABIÁN: *...más o menos tenemos que, como los Taxis Amarillos llegaron más veces temprano* [señala las barras correspondientes a los Amarillos] *entonces son los mejores...*

PROFESOR: *A ver, ¿tienen preguntas? Victoria, ¿quieres hacer preguntas o comentarios?*

VICTORIA: *Yo digo que los Taxis Azules son mejores, porque de nada sirve que los Taxis Amarillos lleguen extremadamente temprano si no los vamos a necesitar a esa hora, es como tiempo perdido...*

YIBÉ: [en el pizarrón bosqueja sus gráficas, tiempo en el eje *y*] *como la media de los Taxis Amarillos es menor que la de los Azules, y vimos que los Amarillos llegaron cinco veces temprano y los Azules solamente una vez, entonces los Taxis Amarillos son mejores... aunque sí es cierto, tenemos un rango muy grande* [señala el rango].

ALEJANDRA: *Por eso decimos que no convienen los Amarillos, porque son menos constantes y te pueden hacer quedar mal, en cambio con los Azules... puedes calcular cuánto tiempo van a tardar...*

CORE: *La mediana la sacamos al ordenar los datos, es el tiempo que se encuentra en la mitad de la lista; y las medias fueron éstas... Taxis Amarillos son los mejores.*

En ese momento, Karla y Andrés (equipo H) señalaron que la mayoría estaba mal por haber puesto el tiempo en el eje *y*; ahí siempre debe ir la frecuencia. Desde su lugar, Andrés mostró sus histogramas (figura 3) y explicó que el tiempo debe ir en el eje *x*; concluyó que Taxis Amarillos era la mejor compañía porque llegaba más veces temprano y señaló las medias en su gráfica. Esto motivó la aceptación de la mayoría de los estudiantes; sin embargo, Victoria (equipo E) manifestó estar de acuerdo con Andrés respecto a los histogramas, pero no con su conclusión. Entonces se originó la siguiente discusión:

VICTORIA: *...cuando tu pides un taxi es porque a esa hora lo necesitas y los Taxis Azules son más constantes que los Amarillos, entonces basta con que los pidas unos minutos antes.*

ANDRÉS: *Nosotros obtuvimos los promedios de* $x = 2'30''$ *(tarde) para Amarillos y* $x = 3'15''$ *(tarde) para Azules, entonces los Amarillos sí son mejores.*

PROFESOR: *¿Solamente debes tomar en cuenta el promedio?* [Andrés se queda callado].

VICTORIA: *Debe tomarse en cuenta qué tan temprano o qué tan tarde pueden llegar y ver cuáles son más constantes, por eso nos quedamos con los Azules.*

ALEJANDRA: [remarca] *los pides unos minutos antes y ya.*

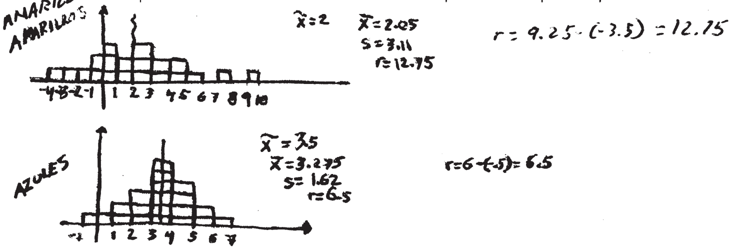
Después de haber escuchado estos últimos argumentos de Victoria y Alejandra, la mayoría de los estudiantes del grupo manifestaron estar de acuerdo con ellas. Éstas, a su vez, aceptaron la manera de hacer histogramas que explicó el equipo H. El profesor aprovechó la ocasión para hacer una sistematización.

En el trabajo individual: 21 estudiantes representaron los datos mediante histogramas o polígonos de frecuencia, con el tiempo en el eje x y la frecuencia en el *y*. En la conclusión final, dos dieron una respuesta ambigua “depende de los intereses de la persona”, siete mantuvieron su posición “Taxis Amarillos es la mejor compañía”, y 15 contestaron que “Taxis Azules eran mejores”. En las figuras 4 y 5 se puede ver los trabajos individuales de Erick (equipo F) y de Karla (equipo H). Esta última modificó la manera de graficar los datos.

AZULEJOS EN LA COCINA

Esta tarea fue adaptada y reformulada de su versión original. Es una tarea que involucra el descubrimiento de un patrón y la obtención de un modelo. Se trata de cierta disposición de azulejos en una cocina y predecir el número de azulejos de cada color necesarios para cubrir cualquier nivel que se pida. El enunciado va acompañado de una serie de figuras formadas por azulejos de colores:

Figura 4 Trabajo individual de Erick (equipo F) en *Ordenar un taxi*



1. Con base en estos registros decide que compañía es mejor. Usa adecuadamente cálculos, gráficas y diagramas, que te permitan analizar los datos y hacer comparaciones más fácilmente. Escribe todo lo que necesites para responder.

2. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Amarillos es la mejor compañía. Escribe claramente tu argumento.

Porque Los taxis amarillos tienen la media menor ala delos azules

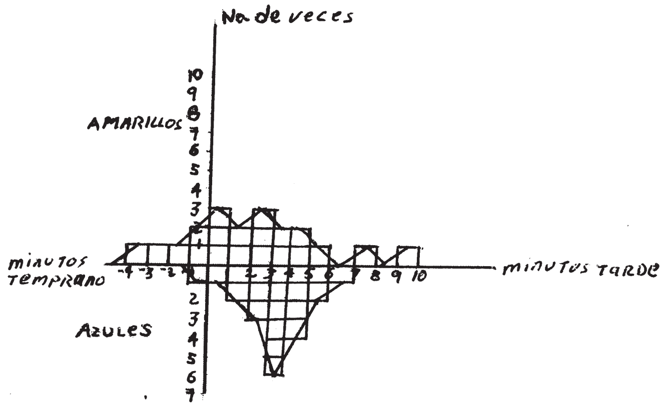
3. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Azules" es la mejor compañía.

Porque los taxis Azules la desviación estandar es más pequeña que la delos Amarillos

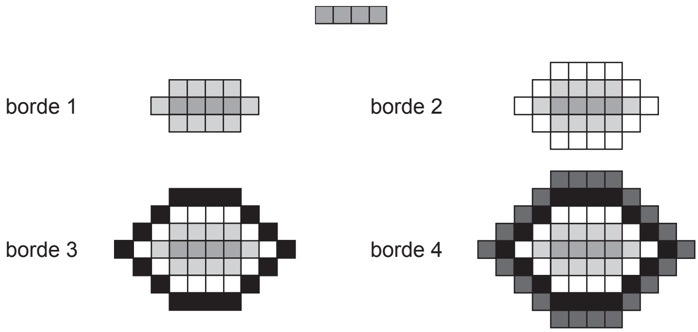
4. ¿Cuál de los argumentos que presentaste es más convincente? ¿Por qué?

La de los Azules, porque tambien tiene un rango mucho menor que el de los Amarillos

Figura 5 Histograma conjunto de Karla en *Ordenar un taxi*



"Alfredo decide cubrir el piso de la cocina con azulejos cuadrados de diferentes colores. Empieza con una fila de cuatro azulejos del mismo color. Enseguida rodea esos cuatro con un borde de azulejos de un color diferente".



Alfredo hace una tabla con los azulejos que se necesitan para cada borde, ¿cómo se obtienen los números de la segunda columna a partir de los de la primera?

Número de borde	Número de azulejos
1	10
2	14
3	18
4	22

Contesta:

1. ¿Cuál es el número de azulejos en el séptimo borde? Encuentra la fórmula que te indique el número de azulejos que necesitas para cualquier número de borde. Describe cómo encontraste tu fórmula.
2. Emma quiere empezar con cinco azulejos en fila. Elabora una tabla como la de Alfredo y encuentra la fórmula que le permita obtener el número de azulejos para cada número de borde. Muestra cómo obtuviste esos resultados.

Durante el trabajo en pequeños grupos se observó que los estudiantes distinguieron un incremento proporcional en la segunda columna. Sin embargo, hubo distintos acercamientos para encontrar la fórmula que se pide en la pregunta 1. Los equipos A y D intentaron establecer una regla de tres y encontrar una relación entre la segunda y primera columnas sin lograrlo. El equipo E, después de varios intentos, logra establecer una regla de tres, al parecer como resultado de analizar los números en cada una de las columnas, pero no completaron la solución.

El equipo B completó oralmente la tabla hasta el borde siete (la sesión fue audiograbada) para encontrar el número de azulejos. Luego, basándose en el dibujo, notaron que, para calcular el primer borde, necesitaban multiplicar 4 por 2 y agregarle los dos azulejos de los extremos. Sin embargo, esa fórmula no les permitía encontrar el número de azulejos para los demás bordes y tuvieron dificultades con el manejo de las variables. Después de un periodo aproximado de 15 minutos, encontraron la fórmula $NA = 4(NB) + 2 + 4$, donde NA representa al número de azulejos y NB el número de borde. Por último, comprobaron sus resultados con los datos de la tabla. A continuación se muestra parte del diálogo del equipo B cuando discutieron la pregunta 1. Integrantes: Omar, Wendy, y Dulce.

DULCE: *...Yo digo que las vayamos sacando al mismo tiempo, porque si sacas primero ésta* [se refiere a encontrar primero la fórmula para la pregunta 1]*, no te va a dar con ésta* [se refiere a la pregunta 2] *y tiene que ser la misma* [comenta esto mientras su compañero trabaja].

WENDY: *¡Ahí está!, ¡ahí está!*

DULCE: *Es que viene siendo lo mismo del doble.*

WENDY: *No, ¡ahí está!, mira, 3 por 4 que es la primera* [se refiere a la fila inicial] *más dos, más cuatro, 18. Entonces, es que no es el doble, es el número de la primera, por el número de bordes más 2, más 4.*

OMAR: *¿Qué no era lo que teníamos?*

DULCE: *Pues más o menos...*

WENDY: *OK, entonces sería, el número de azulejos es igual a 4 que es el de la principal* [número inicial de azulejos] *por el número de borde más dos de las laterales más cuatro de los extremos.*

DULCE: *Que es la variable* [se refiere al incremento en cada borde].

Comprueban su resultado, considerando el tercer borde y obtienen el 18; festejan.

Observemos cómo un integrante del equipo supone que las preguntas 1 y 2 se encuentran relacionadas, es decir, intenta ver una generalización respecto al número inicial de azulejos. Sin embargo, su compañero sugiere que se centren primero en responder la primera pregunta. La figura 6 muestra que, al parecer, la fórmula propuesta provino de buscar relaciones entre la primera y la segunda columna de la tabla y luego se le dio el significado a cada constante basándose en el dibujo.

Figura 6 Trabajo realizado por el equipo B en la pregunta 1

1. ¿Cuál es el número de azulejos en el séptimo borde? Encuentra la fórmula que te indique el número de azulejos que necesitas para cualquier número de borde. Describe cómo encontraste la fórmula.

N° de azulejos en el $7^{mo} = 34$ ~~b = 2a + 2 (+4)~~

N° de bordes $\boxed{NA = 4(N.B) + 2 + 4}$

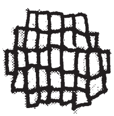
2# +2

a = (# de azulejos de la primera fila)

Para sacar el número de azulejos en los bordes solamente se les van sumando 4 azulejos que son las esquinas .a

NA = # de azulejos
NB = # de bordes

2. Emma quiere empezar con cinco azulejos en fila. Elabora una tabla como la de Alfredo y encuentra la fórmula que le permita obtener el número de azulejos para cada número de borde. Muestra cómo obtuviste estos resultados.



# de bordes		# de azulejos
1		12
2		16
3	+4	20
4	+4	24
5	+4	28
6		32
7		36

~~NA = 5(NB) + B + 4~~

Tarea 3   2

El equipo C, en cambio, observó el dibujo y notó que para el primer borde se dobla el número de la fila (4) y luego se le suman 2 azulejos (los que están en los extremos), obteniendo la fórmula $nx + 2 = y$, donde $x = 4$ (fila inicial de azulejos), y es el número de azulejos y n es el número de bordes más 1. Para la pregunta 2, elaboraron la tabla y propusieron inmediatamente la fórmula $n5 + 2 = y$; consideraron que sólo bastaba con cambiarle el número inicial de azulejos a la fórmula de la pregunta 1, pero al hacer las comprobaciones con los datos de su tabla notaron que la fórmula no era correcta, como se muestra en la figura 7. En el equipo C, integrado por Jessica, Guadalupe y Mariana, se dio el siguiente diálogo:

JESSICA: ... *En cada uno se va aumentando 4.*

GUADALUPE: ...*El 2 se lo puse, porque va arriba de 4 y abajo del 4, son 4 más 4 nos da 8, más 2 de las dos orillas nos da* y, x *la puse como* $x = 4$, *luego en la siguiente, como son 3...*

MARIANA: *¿Qué no serían 4 más? aumenta una arriba y una abajo, o sea que en total son 4.*

GUADALUPE: *Tres para que le siga, porque es el que sigue consecutivamente... 3 por* x *son 12 más dos, 14 y nos da* y, *en la siguiente sería 4 por 4, 16, más dos nos da 18...*

JESSICA: *Más bien, nada más pon* $7x + 2$.

GUADALUPE: ...*No pero sería* $8x + 2 = y$... [notaron que deben agregarle uno al número de borde pedido], *en el séptimo borde hay 34 azulejos* [después discuten la manera en la que deben escribir la fórmula para la segunda pregunta].

MARIANA: ...*Más bien,* x *representa el número de cuadritos que están fijos por el número de filas* [se refiere al número de bordes] *más dos* [sustituyeron 5 (el número de cuadritos fijo) en la fórmula propuesta y comprobaron para el primer borde de la pregunta 2, obteniendo un resultado distinto al de la tabla].

GUADALUPE: *Era demasiado bueno para ser verdad.*

El diálogo muestra el problema del manejo de las variables y constantes. Es importante notar que este equipo, a diferencia del equipo B, empieza su análisis basándose en el dibujo.

Durante las presentaciones, el equipo A se propuso encontrar el número de azulejos en un determinado borde, elaborando una tabla hasta llegar a él. Comentaron que ello da la solución a dicha pregunta.

Figura 7 Trabajo mostrado por el equipo C

Alfredo hace una tabla mostrando cuántos azulejos necesita para cada borde.

Número de bordes	Número de azulejos en bordes
1	10
2	14
3	18
4	22

Observa los números de la segunda columna y expresa cómo se obtienen a partir de los de la primera.

Que ha aumentando 4

$X=4$

Para el borde 1 $= 2x+2=y$

Después consecutivamente para los sig bordes

1. ¿Cuál es el número de azulejos en el séptimo borde? Encuentra la fórmula que te indique el número de azulejos que necesitas para cualquier número de borde. Describe cómo encontraste la fórmula.

Bordes

$2x\,12=y$

$3x+2=y$

$4x+2=y$

$x=4$

$8x+2=y$

$32+2=y$

$34=y$

en el séptimo borde Hay 34 azulejos.

2. Emma quiere empezar con cinco azulejos en fila. Elabora una tabla como la de Alfredo y encuentra la fórmula que le permita obtener el número de azulejos para cada número de borde. Muestra cómo obtuviste estos resultados.

No de Bordes	Número de azulejos
1	12
2	16
3	20
4	24

Filas no de cuaditos

$x + 2$ columnas $= y$ no de azulejos

$X=5$

Tarea 3

$(a+2)5+2=y$ $(a+1)4+2+2=y$

Hubo opiniones a favor y en contra hasta que Wendy, integrante del equipo B, expuso la fórmula obtenida por su equipo $NA = 4(NB) + 2 + 4$, explicó cómo llegaron a ella y qué representa cada variable y cada constante. Esta fórmula convenció a la mayoría del grupo como una respuesta correcta.

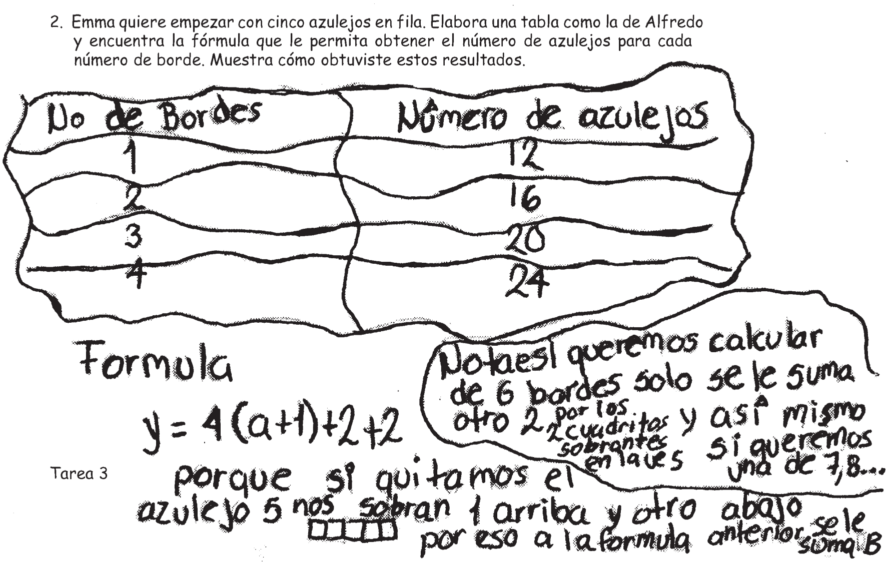
El equipo C manifestó que tenían una solución distinta; propusieron en el pizarrón la expresión $2x + 2 = y$, aclarando que el primer 2 es para calcular el borde 1 y para calcular determinado borde se tendrá que sustituir el número de borde requerido más uno, para así encontrar el número de azulejos buscado. Además, la x equivale al número inicial de azulejos (en el caso de la pregunta 1, $x = 4$). Es claro que las integrantes de este equipo tienen una confusión en el uso de variables y constantes, lo cual generó discusión en toda la clase.

El profesor intervino para ver si era posible que los estudiantes asignaran correctamente las variables y constantes. Con la intervención del equipo B, entre otros, la fórmula presentada por el equipo C se transformó en $(x + 1)\ 4 + 2 = y$; un integrante del equipo E hizo notar ante el grupo que esa expresión corresponde a la misma fórmula que la presentada por el equipo B, salvo por la manera de escribirla.

Para la pregunta 2, en la que se inicia con cinco azulejos, un estudiante del equipo E propuso la fórmula $y = 4x + 8$ y justificó que las figuras son parecidas a las de la pregunta 1, pero agregándole dos azulejos. Esto lo llevó a concluir que sería la misma fórmula más 2. Enseguida, una integrante del equipo C pasó al pizarrón y aclaró la idea de su compañero; escribió la fórmula $(x + 1)\ 4 + 2 + 2 = y$. El grupo se convence y genera su curiosidad por predecir la fórmula variando el número inicial de azulejos. Cabe mencionar que en la pregunta 2, el equipo C, en su trabajo inicial en pequeños grupos, propuso la fórmula $n5 + 2 = y$, la cual no les resultó al hacer comprobaciones numéricas.

En esta tarea fue notable el avance que tuvo la mayoría de los estudiantes; inicialmente tenían problemas de entendimiento de la tarea, después de las presentaciones y discusión colectiva la resolvieron y mostraron interés por la búsqueda de relaciones entre los datos. El trabajo individual muestra que los estudiantes lograron dar una respuesta correcta a las dos preguntas. En sus explicaciones hay claridad de lo que se pide en los enunciados y se incorporan las reflexiones generadas en el grupo completo; incluso, algunos se plantearon preguntas que van más allá de lo requerido en la tarea, como se muestra en la figura 8. Obsérvese cómo Jessica fue capaz de realizar una extensión de la tarea (en la "nota"); estableció verbalmente una generalización de la regla que permite calcular el número de azulejos para cada borde, iniciando con distinto número de azulejos, lo cual está relacionado con las funciones de dos variables.

Figura 8 Trabajo realizado por Jessica, del equipo C


2. Emma quiere empezar con cinco azulejos en fila. Elabora una tabla como la de Alfredo y encuentra la fórmula que le permita obtener el número de azulejos para cada número de borde. Muestra cómo obtuviste estos resultados.

No de Bordes	Número de azulejos
1	12
2	16
3	20
4	24

Formula

$y = 4(a+1)+2+2$

porque si quitamos el azulejo 5 nos sobran 1 arriba y otro abajo por eso a la formula anterior se le suma B

Nota es si queremos calcular de 6 bordes solo se le suma otro 2 por los 2 cuadritos sobrantes en la ve 5 y así mismo si queremos una de 7, 8...

Tarea 3

DISCUSIÓN

Con las presentaciones de los equipos, prácticamente inició la discusión colectiva, la cual se convirtió en una plataforma para tratar asuntos relacionados con el entendimiento del problema, el uso de distintas representaciones, relaciones matemáticas y la solución de los problemas. En los primeros acercamientos se aprecian conocimientos fragmentados, ideas incompletas o incorrectas; sin embargo, cuando los estudiantes tuvieron oportunidad de discutir y explorar sus ideas con otros estudiantes, mejoraron sus acercamientos iniciales para proponer maneras más "robustas y sofisticadas" de resolver la tarea. Las ideas fundamentales que surgieron en el trabajo de los estudiantes involucran el uso de figuras, cálculo de medidas estadísticas, aplicación de proporcionalidad y la búsqueda de una relación entre el número de borde y el número de azulejos.

Como resultado de la discusión, algunos estudiantes modificaron sus puntos de vista y otros reafirmaron sus conjeturas. Los estudiantes mostraron interés por participar en la actividad y, después de la introducción de cada tarea, manifestaron entusiasmo y disposición para contestar cada pregunta, sin que esto quiera decir que todos las respondieron correctamente. En el trabajo en equipos fue posible identificar contribuciones que muestran distintas cualidades matemáticas y, cuando los estudiantes hicieron sus presentaciones, compartieron y criticaron fortalezas y limitaciones de los métodos de solución de los demás.

La forma de trabajo en el aula y las cualidades asociadas a las tareas permitió que los estudiantes desarrollaran procesos de resolución de problemas y practicaran los pasos establecidos en el método de Polya (1945): tanto en los equipos como en el grupo completo, la discusión giró en torno al esclarecimiento de qué es lo que se pregunta, cuáles son los datos, etc.; surgió un plan de ataque al problema, a veces de manera individual o colectiva; se llevó a cabo el plan utilizando distintos recursos matemáticos que incluyen trazos, arreglos numéricos, operaciones, aplicación de fórmulas, etc.; y obtuvieron resultados que fueron comprobados o revisados para ver su pertinencia como solución.

Así, las exposiciones de los estudiantes resultaron relevantes para discutir asuntos relacionados con:

La importancia de comprender el problema. ¿Qué es lo que se pide en cada problema?, ¿cuáles son los datos?, ¿qué tipo de números están involucrados?, ¿con qué problemas parecidos se han enfrentado anteriormente?

El empleo de representaciones del problema. ¿Cómo se pueden representar los datos?, ¿se pueden utilizar histogramas?, ¿es posible reproducir la tabla que contiene el número de azulejos?, ¿se puede identificar alguna operación en las columnas de Alfredo?

La búsqueda de relaciones matemáticas. ¿Qué medidas estadísticas podemos calcular en los tiempos de llegada de los taxis?, ¿qué relaciones podemos establecer entre los datos?, ¿cómo relacionar el número de borde con el número de azulejos?

El análisis de relaciones particulares. ¿Qué significado tienen el rango, la media o mediana para los datos de Sara?, ¿qué tipo de proporcionalidad existe entre el borde y los azulejos?, ¿qué tipo de gráfica le corresponde a la relación del borde con el número de azulejos?

Solución del problema. ¿Cómo combinar la representación gráfica y los cálculos para tomar la decisión?, ¿qué es lo más importante para la toma de decisiones en el contexto de las compañías de taxi?, ¿qué significa expresar una relación de proporcionalidad mediante una fórmula?

Verificación de la solución. ¿Cómo comprobar que la solución corresponde a lo que se pide en cada uno de los problemas?

Extensión del problema. ¿Qué ocurre si se calculan otras medidas estadísticas?, ¿y si se incluyera una tercera empresa de taxis?, ¿qué pasa si Emma inicia con k azulejos?

COMENTARIOS FINALES

El desarrollo de este proyecto se sustenta en la visión del NCTM (2000) y del grupo Balanced Assessment Package for the Mathemacis Curriculum (1999, 2000) para promover el aprendizaje de las matemáticas mediante la utilización de tareas diseñadas bajo ciertos principios: atractivas y fáciles de entender, con contenidos fundamentales del currículo, y que su diseño permita recuperar los procesos de pensamiento utilizados por los estudiantes en sus intentos de solución. Definitivamente, esto rompe con el punto de vista tradicional de la estructura rígida de las asignaturas y, aunque fue posible implementar las tareas aquí informadas, un reto importante es conseguir grupos escolares donde sea posible contar con condiciones *ad hoc* para realizar este tipo de investigaciones en educación matemática.

Además, el NCTM resalta la importancia de contemplar en la instrucción diferentes escenarios de aprendizaje, en los que los estudiantes tengan la oportunidad de combinar el trabajo colectivo, ya sea en pequeños equipos o en el grupo completo, con el trabajo individual; lo cual va de acuerdo con las teorías constructivistas y del aprendizaje cooperativo (Hagelgans, *et al.,* 1995). Se espera que los estudiantes aprendan a exponer y defender públicamente las ideas que utilizaron en sus intentos por resolver los problemas, así como a comunicar sus resultados. Para lograr estos propósitos, se requiere la participación del profesor en momentos precisos que contribuyan a destrabar posibles controversias, de manera que se logre un avance en el aprendizaje de los estudiantes. Sus intervenciones van con el sentido de alentar cambios en la manera de pensar de los estudiantes sobre determinados aspectos de los problemas, los cuales significan un mayor entendimiento de la situación, sin que ello quiera decir eliminar el reto de la tarea.

El desarrollo del aprendizaje de los estudiantes se entiende como una evolución en sus ciclos de entendimiento (Lesh *et al.,* 2000), que se traduce en un manejo más “robusto” y sofisticado de las estrategias y recursos para resolver problemas, lo que se logra cuando los estudiantes realizan prácticas que son consistentes con el quehacer de las matemáticas: tomar casos particulares, descubrir patrones y relaciones, plantear conjeturas, hacer generalizaciones, y justificar resultados.

Las tareas *Ordenar un taxi* y *Azulejos en la cocina*, así como la forma de instrucción utilizada para su aplicación, parecen favorecer el aprendizaje de los estudiantes:

a) Mantuvieron la atención y participación de los estudiantes durante el trabajo en pequeños grupos, así como en las presentaciones, la discusión colectiva y el trabajo individual. Fue factible llevar a cabo el análisis de los procesos utilizados por los estudiantes en sus intentos de solución. Esto significa que las tareas resultaron ser atractivas para los estudiantes, motivaron su participación y fue posible recuperar sus procesos de pensamiento.

b) La forma de instrucción permitió que en cada una de las tareas los estudiantes expusieran y defendieran sus ideas y propició que algunos las modificaran parcial o totalmente. También, se pudo observar que algunos estudiantes cambiaron sus puntos de vista con facilidad.

c) Se generó un ambiente en el aula que propició el aprendizaje en los estudiantes, quizás a diferente grado, que habían mostrado distintos niveles de desempeño escolar. Esto se manifestó por el hecho de que la mayoría realizó intentos y se esforzaron por hacer afirmaciones con sentido para atacar los problemas planteados.

d) En ambos casos, hay respuestas más completas en el informe del trabajo individual que el correspondiente al trabajo por equipos. Esto no significa, desde luego, que todos los estudiantes hayan respondido correctamente en el informe individual.

e) Todo ello ilustra la evolución en los niveles de entendimiento de los estudiantes en las tareas en asuntos que, al principio, les resultaban problemáticos en el trabajo por equipos, lo cual se refleja en el manejo de recursos matemáticos y en el uso de estrategias propias del pensamiento matemático para resolver problemas.

En relación con las cualidades, en mayor o menor grado, las tareas: *i)* resultan atractivas para los estudiantes y admiten diferentes formas de solución; *ii)* incluyen contenidos fundamentales del currículo: la toma de decisiones basada en un conjunto de datos, el desarrollo de patrones, variación y el establecimiento de una relación; *iii)* promueven el desarrollo de habilidades para comunicar y argumentar la solución de problemas, y *iv)* su diseño permite recuperar las ideas de los estudiantes.

Las principales dificultades que se presentaron durante la implementación, algunas de ellas quizás insalvables, fueron: mantener el interés de los integrantes de los equipos cuando trabajaron en pequeños grupos; las deficiencias en el manejo de lenguaje por parte de los estudiantes (dificultad intrínseca en el proceso de aprendizaje); habituarse a la forma de trabajo propuesta, que involucra varios escenarios de aprendizaje, lo cual puede inhibir la participación de los estudiantes, pues rompe con las creencias que tienen sobre lo que es la matemática y los papeles que deben desempeñar tanto ellos como el profesor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, (1999, 2000), *High School Assessment Package 1 & 2*, White Plains, Nueva York, Dale Seymours Publications.

Hagelgans, N. L., B. E. Reyolds, K. Schwingendorf, D. Vidakovic, E. Dubinsky, M. Shahin y G. J. Wimbish Jr. (eds.) (1995), *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington, DC, MAA Notes, núm. 37.

Lesh, R., M. Hoover, B. Hole, A. Kelly y T. Post (2000), "Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers", en Antony E. Kelly y Richard Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics Education*, pp. Mahwah, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 591-645.

Lesh, R. y A. Kelly (2000), "Multitiered Teaching Experiments", en A. E. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics Education*, Mahwah, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 197-230.

Lester, F. y P. Kehle (2003), "From problem solving to modeling. The evolution of thinking about research on complex mathematical activity", en R. Lesh (ed.), *Beyond constructivism, models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (1980), *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics for the 1980s*, Reston, Virginia., National Council of Teachers of Mathematics.

——— (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston Va., National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1945), *How to solve it*, Princeton, Princeton University Press.

Postman, N. y Weingartner (1969), *Teaching as a subversive activity*, Nueva York, A Delta Book.

Santos, M. (1997), "La formulación de problemas para una instrucción y evaluación matemática balanceada", en G. Waldegg y D. Block (eds.), *Estudios en Didáctica*, Consejo Mexicano de Investigación Educativa, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos, T., L. M. (2007), *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, México, Trillas.

Schoenfeld, A. (1985), *Mathematical Problem Solving*, Orlando, Florida, Academic Press.

——— (1992), "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics", en D. A. Grows (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 334-370.

Sepúlveda, A. y M. Santos (2004), "Developing Understanding in Mathematical Problem-Solving. A Study with High School Students", en D. E. McDougall y J. A. Ross (eds.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto, OISE/UT, pp. 499-506.

——— (2006), "Sobre el desarrollo de episodios de comprensión matemática que exhiben estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, núm. 31, octubre-diciembre de 2006.

DATOS DE LOS AUTORES

Armando Sepúlveda López
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
asepulve@umich.mx

Cynthia Medina García
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
cymed_5@hotmail.com

Diana Itzel Sepúlveda Jáuregui
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
diana749@gmail.com