Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3

Alma Alicia Benítez Pérez

Resumen: Explorar la representación gráfica vía la *interpretación global* permite establecer modificaciones en la expresión algebraica para identificar su correspondiente variable visual en la gráfica, lo que concede asociar una variable visual con una variable categórica en la expresión algebraica, favoreciendo la articulación entre dichas variables. Sin embargo, desarrollar la interpretación global en polinomios de grado mayor que dos parece ser una tarea compleja, debido al comportamiento del trazo, lo que complica identificar e interpretar las correspondientes variables visuales que experimentan múltiples variaciones. Frente a esta problemática, se propuso una alternativa orientada a explorar cualitativa y cuantitativamente el trazo para identificar las "características visuales", información que se enriqueció con la representación numérica, lo que permitió identificar el contenido de la parábola y el trazo cúbico. Esta propuesta se implementó en dos grupos del nivel medio superior que cursaban la asignatura de álgebra (15 a 16 años); la finalidad de la investigación es el análisis de las estrategias que el alumno emplea cuando ha tenido la vivencia de explorar las representaciones gráfica, numérica, y algebraica vía la interpretación global en situaciones que demandan la construcción de la expresión algebraica de una gráfica (recta, parábola y cúbica). Durante la experiencia, los alumnos contaron con el apoyo del software *Cabri géomètre* para realizar las tareas diseñadas.

Palabras clave: interpretación global, representación gráfica, representación numérica y características visuales.

Numerical study of the graph to build its algebraic expression. The case of polynomials of degree 2 and 3

Abstract: Exploring the graphical representation by means of the Global Interpretation allows to establish modifications in the algebraic expression to identify the corresponding visual variable in the graphic, allowing the association of a visual variable within the algebraic expression, contributing to the articulation between such

Fecha de recepción: 16 de agosto de 2008.

variables. However, developing the global interpretation in polynomials of higher degree than two seems to be a complex task because of the behavior of the trace which makes difficult to identify and interpret the corresponding visual variables that experiment multiple variations. To overcome this problem an alternative was proposed oriented to explore in a qualitative and quantitative way traces to identify the "visual characteristics", information that is enriched with the numerical representation; this allows to identify the content of the parabola and the cubic trace. This proposal was applied in two high-school groups, where students were studying an algebra course (15 to 16 year-old students). The objective of this research is the analysis of the strategies that the students employed when they have had the experience to explore the graphic, numeric and algebraic representations using the global interpretation in situations that demand the construction of the algebraic expression in a graph (straight line, parabola and cubic). During the experience, the students employed the dynamic software *Cabry géomètry* to do the designed tasks.

Keywords: global interpretation, graphic representation, numerical representation and visual characteristics.

ANTECEDENTES

Diversas investigaciones han dirigido sus esfuerzos al estudio de la enseñanza y aprendizaje en el tópico de funciones por ser un tema relevante en matemáticas. En general, la literatura relativa al tema de funciones considera dos tareas fundamentales, a saber, interpretación y construcción.

Interpretación se refiere al acto por el cual un estudiante adquiere sentido de una situación por medio de una gráfica, una ecuación o bien una tabla numérica. La interpretación puede ser de dos tipos: global o local. La primera se enfoca en tareas que involucran la interpretación de la gráfica, por ejemplo, cuando el estudiante determina la pendiente de una recta a partir de su gráfica (Duval, 1988; Schoenfeld, Smith y Arcavi, 1993). La segunda se refiere a la localización de puntos interesantes en el plano cartesiano, la interpretación que se realiza particularmente en la gráfica puede desarrollarse dentro de la misma gráfica, o bien, puede moverse a la expresión algebraica.

Ambas interpretaciones son importantes para el estudio de las representaciones y, en particular, para la representación gráfica; sin embargo, se ha soslayado la interpretación global y se ha fortalecido la local en los programas de estudio tradicional, ya que la primera es valiosa para la aprehensión de conceptos matemáticos. Dicho acercamiento puede dar como resultado el estudio de la gráfica mediante puntos aislados más que como un objeto o entidad conceptual (Janvier, 1987; Duval, 1988).

Por otra parte, la interpretación en la gráfica puede ser cualitativa, mirando total o parcialmente su comportamiento para asociar las propiedades globales. En este rubro, Janvier (1987) analiza fenómenos físicos para desarrollar actividades que permiten estudiar las características globales de la gráfica. Por su parte, Dugdale (1993) describe cambios en las estrategias de los estudiantes cuando abordan temas que requieren la interpretación de la gráfica para analizar simultáneamente diferentes aspectos de algunas secuencias de eventos, incorporando software gráfico en una unidad de instrucción sobre Identidades trigonométricas.

En tareas de interpretación de gráficas de funciones, es importante la traslación entre representaciones, ya que es un proceso psicológico para pasar de un modo de representación de una función a otra (Janvier, 1987; Kaput, 1987 y Dugdale, 1993), o bien, para construir otra representación dada. En este sentido, la traslación no es exclusiva de la interpretación, sino también de la construcción, pues es una actividad fundamental para el concepto de función (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990). En esta dirección, los trabajos realizados por Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), con apoyo de la computadora, mencionan la importancia que tiene para el estudiante moverse con mayor facilidad en el simbolismo algebraico, mientras éste mantenga un significado visual. Además, estiman que el razonamiento visual para observar las transformaciones como movimientos "sobre" o "del" plano tienen un poder potencialmente cognitivo en el alumno, el cual requiere tiempo, oportunidades y recursos para hacer construcciones, conjeturas y modificaciones.

Kaput (1993) también retoma la importancia del software dinámico para explorar las relaciones cuantitativas en la gráfica, permitiendo la identificación de estas relaciones con otras representaciones. Este enfoque explora el comportamiento de las parejas ordenadas para establecer relaciones cuantitativas y poder determinar relaciones con las representaciones numérica y algebraica.

Por su parte, Cordeo y Solís (1995) presentan secuencias de actividades con apoyo de la calculadora TI82 para la conceptualización de la función, analizando el comportamiento tendencial de la gráfica y de la expresión analítica de las funciones. La curva completa se vincula con la expresión $Y = A[f(\mathrm{x})] + B$; en ese sentido, deja de ser importante la variable "x" y pasan a ser importantes los coeficientes A y B de la expresión. Asimismo, Cantoral y Montiel (2001) exploran gráficamente las transformaciones $Y = C[f(ax + b)]+d$ para las funciones básicas $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$ y $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3$.

Los trabajos desarrollados por Kaput (1993), Confrey y Smith (1995) y Dugdale (1993) subrayan la importancia que reviste establecer relaciones entre las representaciones, en particular, para el concepto de función, identificando relaciones cuantitativas en las diferentes representaciones.

En su trabajo "Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros", Duval (1988) menciona los diferentes tratamientos que se han desarrollado para identificar información de la gráfica a partir del análisis de la expresión algebraica, destacando el tratamiento cualitativo vía la *interpretación global,* donde se señala que la modificación en la expresión algebraica corresponde a una variable visual pertinente para interpretar la gráfica, lo cual permite asociar una variable visual con una variable categórica en la expresión algebraica, lo que favorece su articulación.

Por su parte, Hitt (1994) analiza la tarea para articular un contexto físico o real con la representación gráfica de una función. Hitt aplicó este cuestionario a una población de profesores de secundaria, cuyos resultados mostraron que la forma de la gráfica determinó el tipo de recipiente del dibujo (traslación de la forma).

De acuerdo con lo antes expuesto, se aprecia una problemática de investigación amplia, relacionada con tareas que involucran la interpretación y construcción del concepto de función, sobre todo en las representaciones gráficas, las cuales se caracterizan por la tendencia del estudiante a la elección de puntos en el plano cartesiano, confusión intervalo/punto, interpretación icónica, confusión altura/pendiente (Leinhardt y Zaslavsky y Stein, 1990), así como la aproximación de diversos investigadores (Janvier, 1987; Kaput, 1993; Dugdale, 1993; Schoenfeld, Smith, y Arcavi, 1993, y Duval, 1988, entre otros) para abordar el concepto de función, considerando las representaciones como un aspecto fundamental para llevar a cabo el proceso de aprendizaje en este tópico. Sin embargo, los enfoques son diversos, ya que ciertos investigadores (Kaput, 1993; Confrey y Smith, 1995) han considerado en un primer momento el análisis cuantitativo, mientras que, para otros (Dugdale, 1993; Duval, 1988), es fundamental el análisis cualitativo, al menos en la representación gráfica.

MARCO TEÓRICO

La visualización matemática (Duval, 2003) no es un acto de aprehensión simultánea en el campo de la percepción, es una actividad cognitiva intencional que produce una representación, en una superficie de dos dimensiones (pantalla, papel...), que muestra las relaciones entre las unidades que componen las figuras, eso quiere decir que la visualización matemática expone únicamente objetos, los cuales se hacen "ver" a través de las organizaciones de relaciones que tienen las unidades de las figuras. Por tanto, "ver" en matemáticas implica la identificación de las relaciones o la organización de relaciones entre las unidades representacionales que constituyen una representación semiótica. En esta dirección, Torregrosa y Quesada (2007) exponen la necesidad de crear un modelo conceptual para caracterizar las interacciones entre los procesos de visualización y razonamiento junto con su coordinación, definiendo la visualización en el estudio de la geometría como "el proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental o viceversa", cuya aprehensión será la manera de ver la figura matemáticamente, es decir, identificar las características de la acción de transferencia realizadas por el sujeto sobre una figura.

Puesto que las representaciones gráfica y numérica son un tipo de visualización matemática, ambas representaciones poseen organizaciones visuales bidimensionales: el cuadriculado del plano en líneas para la gráfica y la distribución en columnas para la tabla.

La representación gráfica posee sus propias leyes de organización (Bertin, 1968) y su funcionamiento se basa en la relación de dos figuras: figura fondo, referida al plano cartesiano, y figura forma, referida al trazo. Según Duval (1988), la interpretación global es un tratamiento eminentemente cualitativo, pues consiste en identificar los distintos valores visuales en la representación gráfica, explorando la forma y orientación de la gráfica para establecer relaciones con los valores categóricos de la expresión algebraica, es decir, con las unidades significativas propias de la expresión algebraica, fortaleciendo así la aprehensión global del contenido de la representación gráfica.

Sin embargo, la interpretación global concentra su atención en la figura forma y descuida la figura fondo, la cual se considera un marco estable para el tratamiento cualitativo, ya que, si se altera la figura fondo, al dividir localmente la unidad de graduación, se origina un cambio en la figura forma, actividad que altera el comportamiento del trazo y, por consiguiente, los valores visuales. Al respecto, Duval menciona que el punto central y decisivo en el aprendizaje de las representaciones gráficas es la discriminación de los valores visuales y su coordinación con los valores categóricos de la expresión algebraica, atendiendo la discriminación de los valores visuales en relación con la figura fondo. Para ello, las actividades diseñadas deben permitir explorar las variaciones de una sola variable y mantener constantes los valores de las demás variables, a fin de que los valores de las distintas variables visuales se unifiquen para ser exploradas como una única figura forma/fondo.

Otro acercamiento a la aprehensión global mediante tratamientos cuantitativos en la representación numérica es el expuesto por Confrey y Smith (1994), quienes mencionan el uso de problemas contextualizados para introducir familias de funciones. Los autores indican el desarrollo de estrategias en el estudiante para construir tablas de datos, lo que a menudo sirve como el primer punto de entrada en la situación problemática. Este proceso de iniciar con los datos se entrelaza a menudo con la construcción de las variables (Confrey y Smith, 1995), además de mencionar el aspecto básico que desempeña examinar y sistematizar el valor de los datos para este proceso.

Como resultado, Confrey y Smith (1995) argumentan el hecho de que, para este contexto, el estudiante construye la imagen de la función como la coordinación de los elementos dispuestos en dos columnas, esto es, no sólo como un modelo de valores dentro de una simple columna, sino como la coordinación de valores de dos columnas diferentes para responder preguntas referentes a la situación con el propósito de explorar relaciones entre ambas columnas. De manera paralela, el alumno puede insertar valores entre los valores de datos dados, por ejemplo, si una columna se incrementa aditivamente por dos y la otra por seis, los alumnos asocian un cambio de uno con un cambio de tres, insertando los valores apropiados para establecer la aproximación covariacional (Confrey y Smith, 1994) y describiendo la situación en términos de razón de cambio. En esta discusión, Confrey considera que la covariación ofrece una comparación alternativa del concepto de función, por tener la aproximación de correspondencia, la cual se basa en la definición de función como una relación entre dos conjuntos, el dominio (A) y el rango (B) donde para cada "x" en A hay exactamente una "y" en B. La propuesta de los autores se recupera durante el trabajo de investigación para identificar y analizar la información que encierra la representación numérica en lo relativo a la aproximación covariacional.

Por su parte, Duval (1999) establece que la representación numérica pertenece a las representaciones no discursivas, las cuales permiten la organización de relaciones entre las unidades representacionales que componen el contenido de la tabla numérica. La unidad representacional elemental de una tabla no es la casilla, como la intersección de una fila y una columna, sino la lista, como la enumeración realizada según una relación de orden. El margen sirve de referencia para organizar los datos de otra lista.

Duval destaca el principio común de la organización visual para las representaciones gráfica y numérica sobre el fenómeno esencial del aprendizaje, el cual presenta dos niveles de aprehensión:

- *"una aprehensión que resulta de un simple planteamiento cognitivo de* ***control*** *sin que la totalidad de la representación (gráfica, numérica) esté realmente comprendida*
- *y una aprehensión que resulta de un planteamiento de interpretación global"* (Duval, 2003, pp. 29-64).

El primer nivel es el más socorrido en la enseñanza, pues se enfoca exclusivamente en un planteamiento de control, mientras que se soslaya el segundo nivel, pues se requiere explorar el contenido de la representación para identificar las unidades representacionales que permitan establecer conexiones con otras representaciones, en particular, con la representación algebraica.

La tesis doctoral de Benítez (2004) expone la importancia de explorar el contenido de las representaciones a partir de tratamientos cualitativos y cuantitativos, empleando la interpretación global para construir la expresión algebraica, dada su gráfica, con el apoyo de un *software* dinámico.

La presente investigación se enfoca en el estudio global del polinomio cúbico para ser explorado cuantitativamente, lo que permitió la identificación de las secuencias numéricas, tanto en la representación gráfica como en la numérica. Para ello, se atendió el análisis del contenido de la representación gráfica mediante la información que brindan tanto la figura forma como la figura fondo, haciendo de esta representación una estructura cognitivamente poderosa. Por consiguiente, se requiere dotar al alumno de oportunidades y recursos para explorar su riqueza, permitiéndole construir, conjeturar y realizar modificaciones, a fin de que tenga un panorama rico en experiencias alrededor del contenido de la representación gráfica, lo que implica la decisión de pertinencia y no sólo de credibilidad.

LIMITACIONES PARA UTILIZAR LA INTERPRETACIÓN GLOBAL QUE SUGIERE DUVAL, EJEMPLOS: PARÁBOLA Y CÚBICA

La *interpretación global* (Duval, 1988) señala que la modificación en la expresión algebraica corresponde a una variable visual pertinente para interpretar la gráfica, lo cual permite asociar una variable visual con una variable categórica en la expresión algebraica, lo que contribuye a la identificación y establecimiento de relaciones entre ambos registros de representación para su articulación.

Duval analiza el comportamiento de la recta vía la interpretación global, y menciona la posibilidad de realizar un análisis similar en el caso de la parábola.

El presente trabajo ha identificado y analizado las variables visuales y las variables categóricas (expresión algebraica) para este polinomio, su estudio reveló la dificultad para discriminar las variables visuales que caracterizan al polinomio, ya que el comportamiento del trazo presentó más variaciones que la línea recta, lo que incrementó el número de variables identificadas.

Respecto del estudio del polinomio cúbico, se realizó la interpretación de su contenido por esta vía mediante el análisis de las modificaciones en su expresión algebraica, tarea que fue exhaustiva debido al comportamiento del trazo, lo que obstaculizó la interpretación de las correspondientes variables visuales, las cuales experimentaban múltiples variaciones. No obstante, se identificaron de manera directa las variables visuales correspondientes al término cúbico ($y = \pm \boldsymbol{a}x^3$), pero se complicó el análisis cuando participaron los términos cuadrático y lineal, no así con el término independiente, ya que éste no alteró significativamente el comportamiento del trazo.

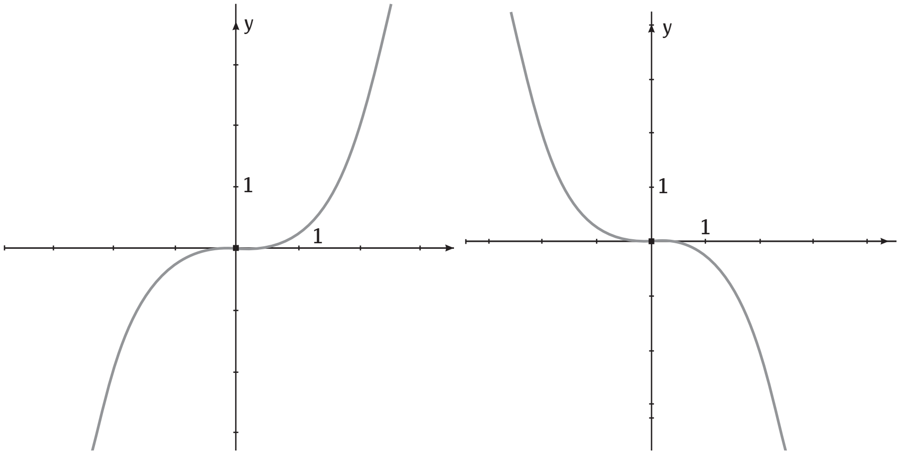
Frente a esta problemática, se propuso una alternativa orientada a explorar cualitativamente el polinomio cúbico alrededor del origen en una vecindad suficientemente pequeña, por lo cual el término a_3x^3 es despreciable en magnitud respecto del resto ($a_2x^2 + a_1x^1$), lo que induce un comportamiento muy "similar" del polinomio de grado tres al de $a_2x^2 + a_1x^1$, facilitando la identificación de las variables visuales respecto de las modificaciones aplicadas a la expresión algebraica en cuanto a los términos cuadrático y lineal, mientras que el término independiente se consideró nulo para analizar el comportamiento del trazo alrededor del origen.

Puesto que las condiciones que se utilizaron para discriminar las variables visuales en el polinomio de tercer grado, específicamente para los términos $a_2x^2 + a_1x^1$, son diferentes a las desarrolladas por Duval (1993), se ha decidido llamarlas "características visuales".

El análisis se inició utilizando las variables visuales correspondientes al término cúbico del polinomio de tercer grado, las cuales son: si el trazo viene del infinito negativo presenta la concavidad hacia abajo, para luego cambiar su concavidad hacia arriba y continuar hacia el infinito positivo; por el contrario, si el trazo viene del infinito positivo, su concavidad es hacia arriba para luego cambiar su concavidad hacia abajo y continuar hacia el infinito negativo (figura 1).

El análisis para identificar las "características visuales" de los términos cuadrático y lineal se llevó a cabo eligiendo una vecindad suficientemente pequeña alrededor del origen, donde el término es despreciable en magnitud respecto del resto ($bx^2 + cx$), lo que induce un comportamiento del polinomio de grado

Figura 1 Comportamiento del polinomio cúbico $y = \boldsymbol{a}x^3$;
($a > 0$ y $a < 0$, respectivamente)



tres muy "similar" al de $bx^2 + cx$, es decir, se examinó el polinomio cúbico $Y(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, considerando las funciones: $y(x) = ax^3$ y $h(x) = bx^2 + cx$ para identificar tanto las variables visuales del término cúbico como las "características visuales" de los términos cuadrático y lineal (véase la figura 2).

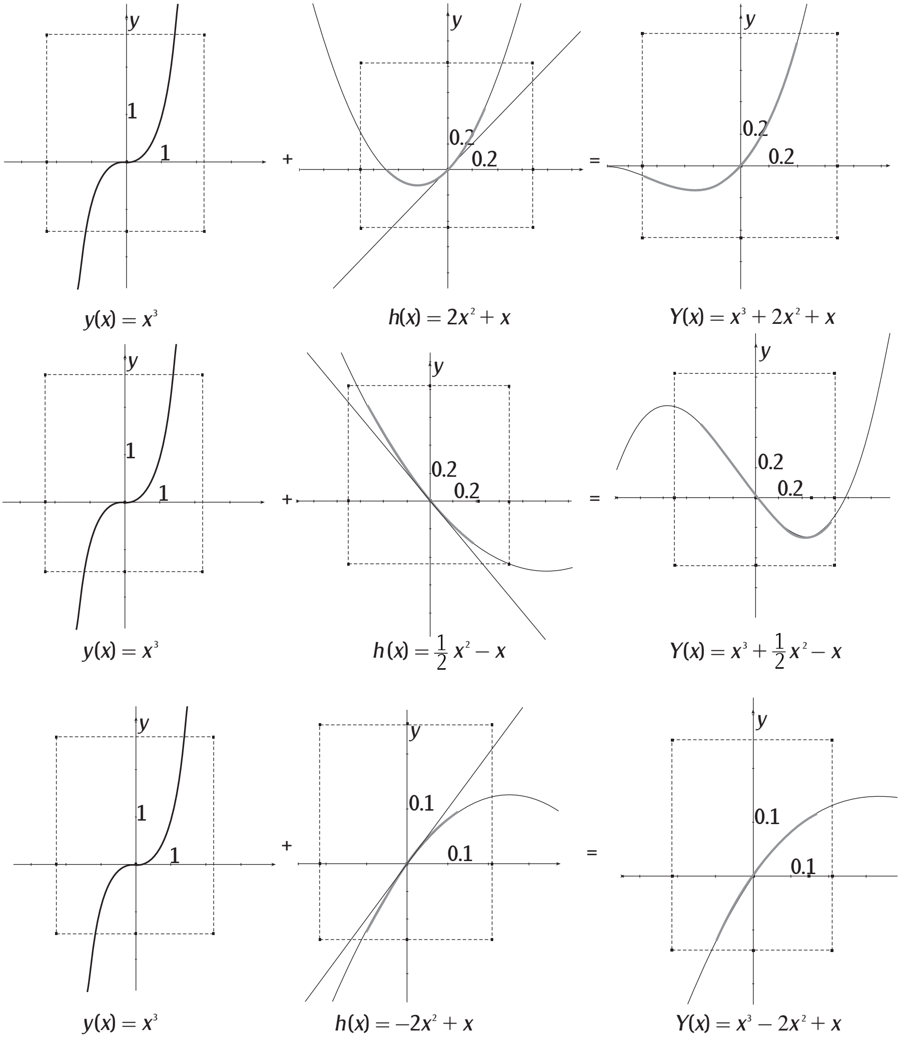
Las "características visuales" identificadas en la vecindad del origen son las siguientes:

Características visuales	Variables categóricas (bx^2)
El trazo abre hacia arriba	$b > 0$
El trazo abre hacia abajo	$b < 0$
El trazo se acerca a su eje de simetría	$b \geq 1$
El trazo se aleja de su eje de simetría	$b < 1$

Respecto del comportamiento del término lineal, el trazo es la recta tangente a la parábola en el origen; dicha recta se desplaza a la derecha o a la izquierda del eje vertical del comportamiento parabólico.

El análisis del comportamiento del trazo alrededor del origen favoreció la realización de la interpretación global mediante el tratamiento cualitativo para identificar las "características visuales" e interpretar la información desde la pers-

Figura 2 Ejemplos del comportamiento de los términos cuadrático y lineal para el polinomio cúbico ($Y(x)=ax^3 + \mathbf{b}x^2 + \mathbf{c}x$)



Características visuales	Variables categóricas (cx)
Desplazamiento del comportamiento parabólico hacia la izquierda	Considerando $b > 0$ y $c > 0$
Trazo ascendente a 45°	$c = 1$
Trazo ascendente cuyo ángulo formado con el horizontal es menor que 45°	$0 < c < 1$
Trazo ascendente cuyo ángulo formado con el eje horizontal es mayor que 45°	$c > 1$

pectiva global, lo cual permitió establecer relaciones a partir de las modificaciones realizadas a las variables categóricas de la representación algebraica.

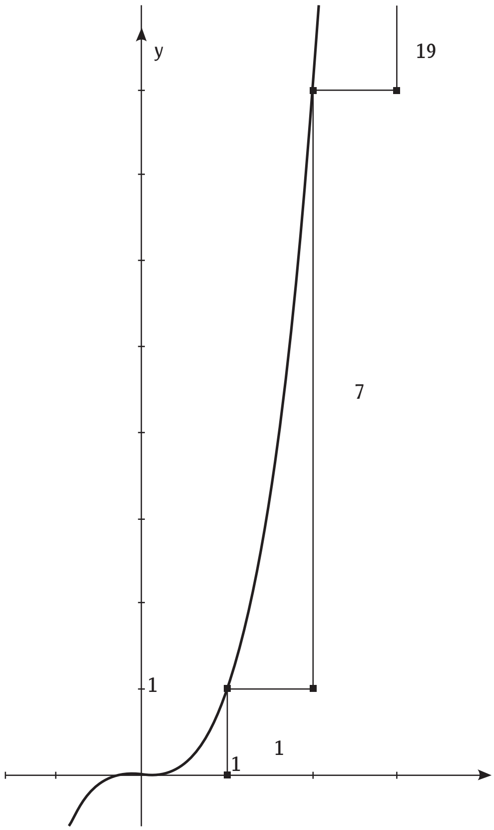
Este acercamiento fortaleció la exploración del trazo en una región del plano, identificando la información para el reconocimiento de las "características visuales", así como las relaciones con la representación algebraica (variables categóricas).

Lo expuesto propone un estudio global en una región del plano cuya información contribuya a identificar relaciones en la gráfica, en la expresión algebraica y entre ellas, de acuerdo con las modificaciones establecidas en la expresión algebraica; sin embargo, construir su expresión algebraica requiere la participación de otras representaciones que fortalezcan la información identificada y, por supuesto, que la enriquezcan.

EXPOSICIÓN DE MOTIVOS PARA EXPLORAR EL CONTENIDO NUMÉRICO EN LA GRÁFICA (FIGURA FONDO), ASÍ COMO LA NECESIDAD DE EMPLEAR LA REPRESENTACIÓN NUMÉRICA (TABLA DE VALORES) PARA ENRIQUECER LA INFORMACIÓN IDENTIFICADA EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Hasta este momento, se ha analizado la información de la representación gráfica empleando tratamientos cualitativos; sin embargo, la tarea para construir la expresión algebraica de una gráfica requiere información de tipo numérico, lo que plantea la posibilidad de analizar la gráfica vía la interpretación global mediante tratamientos cuantitativos, es decir, analizar la relación de la gráfica con la figura fondo desde un punto de vista numérico. Lo anterior motivó la exploración de la información de la figura fondo para establecer relaciones con el comportamiento del trazo, lo que requirió el uso de tratamientos que contribuyeran a la identifi-

Figura 3 Tratamiento cuantitativo, polinomio $y = x^3$



cación de valores numéricos pertinentes y, por tanto, la posibilidad de establecer relaciones con las características y variables visuales ya identificadas.

En este sentido, la discriminación de los valores numéricos se encuentra determinada por la escala, ya que depende de ella conservar o no las variables y características visuales determinadas antes por tratamientos cualitativos, por lo que se consideró la misma graduación para ambos ejes, que es la condición para identificar a través de la aprehensión global las características y variables visuales, así como las variables numéricas. A partir de esta premisa, se analizaron las variables y características visuales de los polinomios de grados dos y tres, explorando la figura fondo, lo cual permitió identificar valores numéricos específicos.

El tratamiento cuantitativo desarrollado en la figura fondo generó secuencias numéricas, las cuales se identificaron globalmente. La discriminación se realizó mediante "covariación", la cual consiste en desplazamientos de y_m a y_{m+1} coordinados con desplazamientos de x_m a x_{m+1}, manteniendo la misma graduación en ambos ejes. Lo que favorece atender de manera particular el comportamiento de los valores numéricos que se obtienen mediante los desplazamientos en las ordenadas (figura 3).

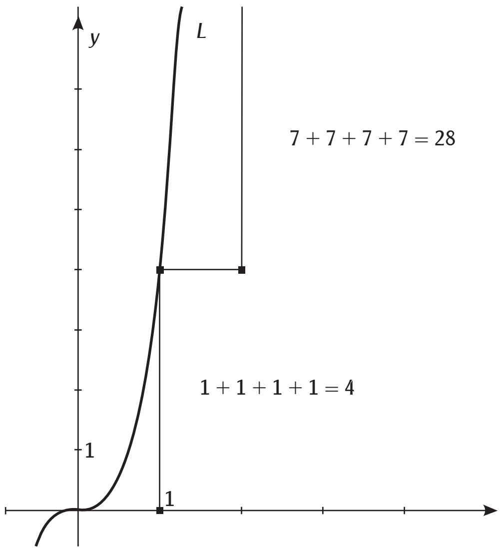
Los desplazamientos que tienen lugar sobre el eje "y" generan la siguiente secuencia numérica: **1, 7, 19, ..., $3n^2 + 3n + 1$** (llamada secuencia numérica básica). Esta secuencia posee un papel importante para el estudio de la cúbica, pues es la que la identifica desde la aprehensión global. El valor numérico para la variable visual, definido como *"el trazo que viene del infinito negativo presenta la concavidad hacia abajo, para luego cambiar su concavidad hacia arriba y continuar hacia el infinito positivo"*, se traduce ahora en el signo que toma cada uno de los miembros que integran la secuencia numérica; en este caso particular, se habla del signo positivo. Respecto del segundo valor visual (o valor del término cúbico), se aprecia que la secuencia numérica se repite una sola vez, ello permite considerar el hecho de que "se repita una sola vez" como el factor que permite discriminar el valor numérico, por lo que resulta ser la unidad. Esta información se traduce numéricamente en la representación algebraica $y = 1x^3$.

Existe una amplia gama de polinomios cúbicos que presentan la variable visual antes mencionada, que genera diversas secuencias numéricas, por ejemplo, la figura 4 muestra la cúbica L y genera la secuencia numérica: 4, 28, 76, ..., por lo que, nuevamente, la variable visual es positiva, ya que todos los miembros de la secuencia poseen el signo positivo. Por otro lado, la secuencia numérica 4, 28, 76, ... está constituida por la secuencia numérica **1, 7, 19, 37, ..., $3n^2 + 3n + 1$**. De esta manera, tenemos que la secuencia 1, 7, 19, 37, ..., $3n^2 + 3n + 1$ está multiplicada por 4, pues la secuencia 4, 28, 76, ... = **4**(1, 7, 19, ..., $3n^2 + 3n + 1$), por tanto, el valor numérico del segundo valor visual es **4.**

La información numérica de la gráfica se relaciona con la correspondiente variable categórica de la representación algebraica, construyendo la expresión algebraica $y = \mathbf{4}x^3$ para la gráfica L.

Para identificar las secuencias numéricas en la representación numérica (tabla de valores), se exploró el comportamiento coordinado de los valores de "x" y de los valores correspondientes a "y", es decir, para la columna compuesta con los valores de "x", se realizó la operación de sustracción de los términos consecutivos. Típicamente, el incremento para x es la unidad, mientras que para

Figura 4 Tratamiento cuantitativo para identificar la secuencia numérica del polinomio cúbico L



la columna de los valores de y se aplicó la operación sustracción de sus valores consecutivos (diferencias finitas).

Al identificar el grado del polinomio, se procede a determinar valores numéricos de las variables visuales que conforman el polinomio. La exploración se realiza con la información que generan las diferencias finitas, la tabla 1 muestra el tratamiento cuantitativo para identificar información que contiene el polinomio de grado tres.

Para el caso del polinomio de grado tres ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$), el análisis cuantitativo de la representación numérica genera tres columnas que corresponden a la primera, segunda y tercera diferencias (cuadro 1); cada una de ellas proporciona información para discriminar los valores numéricos de las variables visuales y, por consiguiente, los valores numéricos de los valores categóricos para su expresión algebraica, por ejemplo, la tercera diferencia ($\Delta(\Delta(\Delta y))$) (cuadro 1, columna 5) presenta una diferencia común, la cual permite la identificación del valor numérico para el coeficiente del término cúbico (***a***), usando la regla general para la diferencia común "$6a$".

Cuadro 1 Tratamiento cuantitativo global para la representación numérica

x	$y = ax^0 + bx^2 + cx + d$	Δ y 1ª diferencia	$\Delta(\Delta$ y) 2ª diferencia	$\Delta(\Delta(\Delta$ y)) 3ª diferencia
0	d			
		$a + b + c$		
1	$a + b + c + d$		$6a + 2b$	
		$7a + 3b + c$		$6a$
2	$8a + 4b + 2c + d$		$12a + 2b$	
		$19a + 5b + c$		$6a$
3	$27a + 9b + 3c + d$		$18a + 2b$	
		$37a + 7b + c$		
4	$64a + 16b + 4c + d$			

Diferencia común

Tercera diferencia	
Constante	Valor categórico
6	a

La segunda diferencia ($\Delta(\Delta y)$) (cuadro 1, columna 4) permite discriminar el valor numérico para el valor categórico del coeficiente del término cuadrático (***b***). La segunda diferencia está compuesta por dos secuencias numéricas, la primera de ellas se multiplica por el valor categórico del coeficiente del término cúbico, mientras que la segunda se multiplica por el valor categórico del coeficiente del término cuadrático.

Segunda diferencia	
Valor categórico	Secuencia numérica
a	(6, 12, 18, ..., 6n)
b	(2, 2, 2, ..., 2)

La columna 3, la cual corresponde a la primera diferencia (Δy), proporciona la información para identificar el valor categórico del coeficiente del término lineal (***c***), compuesto por tres secuencias numéricas: la primera de ellas se multiplica por el valor categórico del coeficiente del término cúbico (***a***), la segunda secuencia se multiplica por el valor categórico del coeficiente del término cuadrático (***b***) y, finalmente, la última secuencia se multiplica por el valor categórico del coeficiente del término lineal (***c***), esto es:

Primera diferencia

Valor categórico	Secuencia numérica
a	$(1, 7, 19, 37, ..., 3n^2 + 3n + 1)$
b	$(1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1)$
c	$(1, 1, 1, ..., 1)$

El desglose de las diferencias finitas para las ordenadas de la representación numérica permite identificar los valores numéricos de las variables visuales y de las características visuales. Dichos valores también están presentes en las representaciones algebraica y gráfica, lo que permite establecer conexiones entre las tres representaciones a partir de la interpretación global según el enfoque numérico.

METODOLOGÍA

La metodología se caracterizó por determinar dónde y cómo se llevaría a cabo el estudio en los grupos piloto. Para ello, se analizó el programa de estudio correspondiente a la asignatura de álgebra, así como los lineamientos de la institución (IPN), lo cual dio como resultado un plan general de la asignatura que hace énfasis en la exploración de las representaciones gráfica, numérica y algebraica. Sobre esta base, se diseñaron diversas situaciones para explorar el contenido de la representación gráfica, utilizando tratamientos que permitieran evidenciar su riqueza. Para ello, se diseñó una dinámica que apoyara el fortalecimiento de la interpretación global mediante tratamientos cualitativos y cuantitativos. Durante el proceso, se realizaron videograbaciones y entrevistas para identificar las estrategias empleadas por el estudiante.

La experiencia se llevó a cabo en el contexto de un curso de álgebra. Los estudiantes no habían participado anteriormente en este modo de trabajo, por lo que se modificó la práctica en el salón de clase, es decir, se impulsó la comunicación de ideas y la continua participación en clase. La experiencia educativa se llevó a cabo con dos grupos del nivel medio superior (CECyT 11, "Wilfrido Massieu"), cada uno con 32 alumnos, que cursaban el primer semestre del ciclo escolar; la duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15 y 16 años.

Desarrollo de la experiencia educativa

1. Fase de introducción. Los alumnos participantes provenían de diversos centros escolares (secundarias). Por tal circunstancia, se asumió que no había un ambiente adecuado para llevar a cabo la dinámica en el aula, ya que los alumnos estaban habituados a una enseñanza magistral. Ante esta situación, durante la primera semana de trabajo se introdujo a los estudiantes, mediante conversaciones por parte del maestro, en la dinámica que se quería desarrollar en el aula, es decir, trabajo en equipo y discusión en grupo, donde el profesor asumió el papel de coordinador del proceso. Asimismo, se informó a los padres de familia los lineamientos que se iban a seguir durante el semestre, mencionando con precisión la participación del alumno durante las clases, así como los aspectos que se iban a evaluar.
2. Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4 a 5 integrantes, para conformar así un total de 6 equipos por grupo. Al inicio de la sesión, se entregó una actividad diseñada por el profesor para que fuera trabajada de manera colectiva y se mencionó que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras que el profesor participaba con los equipos como espectador y para proporcionar información. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un informe escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para que expusiera su trabajo al grupo. El criterio de selección consideraba los diferentes puntos de vista, favoreciendo la discusión en el grupo para aclarar dudas y superar posibles dificultades. Los informes de los equipos se devolvían a los alumnos en la siguiente sesión con diferentes anotaciones para que el alumno, de manera indi-

vidual, revisara el trabajo y lo corrigiera, si era el caso, en una carpeta que sería evaluada al final de la experiencia. En determinados momentos durante la experiencia educativa, el maestro expuso al grupo algunos tópicos que presentaban dificultad, por ejemplo, identificar las diferentes variables visuales que componen la recta y la parábola para vincularlas con las representaciones algebraica y numérica. Cuando el profesor realizó esta experiencia, los alumnos mostraron mayor interés para explorar los trazos. Esta situación se debe posiblemente a la necesidad que siente el estudiante de que el profesor intervenga en determinados momentos del proceso. Durante las sesiones que se realizaron en la sala Microsoft, se continuó con la misma dinámica que en el salón de clase.

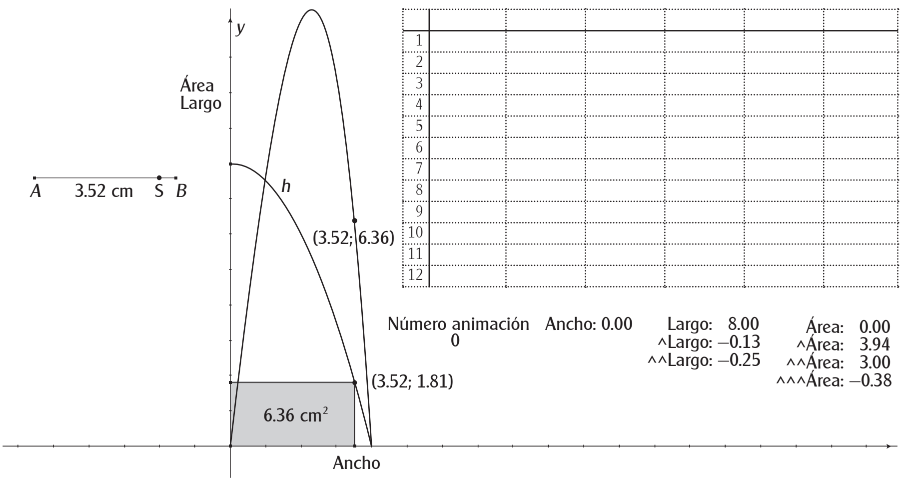
3. Las actividades se diseñaron partiendo de la representación gráfica y utilizando tratamientos que permitieran identificar características en la gráfica que no se reconocen de manera inmediata, sino mediante la exploración del comportamiento del trazo. El tratamiento que se usó al inicio fue el cualitativo, a fin de proporcionar a los estudiantes un panorama global del comportamiento del trazo. Asimismo, se introdujeron tratamientos de tipo cuantitativo, los cuales permitieron identificar los valores numéricos de las variables visuales. Las actividades contribuyeron a explorar el contenido de la gráfica aplicando tratamientos cuantitativos cuya información puede interpretarse global o puntualmente. Para este tipo de tareas, los alumnos exploraron el contenido del plano cartesiano, especialmente la escala; asimismo, los estudiantes también reconocieron la riqueza de contenido que encierra la representación numérica. En particular, al polinomio cúbico se le aplicaron tratamientos cualitativos para identificar las "características visuales" del trazo y, posteriormente, se introdujeron tratamientos cuantitativos para determinar el valor numérico de algunas "características visuales".
4. Después de concluir la experiencia educativa, se solicitó la participación de seis alumnos para formar tres equipos. Los alumnos participantes fueron invitados a esta tarea por haberse mostrado comprometidos y dispuestos a participar. La actividad se llevó a cabo en la sala de Cómputo (Microsoft) y sus sesiones se realizaron extraclase con una duración de dos horas por sesión. Se proporcionó la tarea, en cuyo texto se menciona brevemente la situación y se exponen las indicaciones básicas para explorar el archivo que muestra las gráficas que generan los anchos, largos y áreas de diferentes rectángulos, también se presenta la tabla numérica vacía para que los equipos desarrollen el tratamiento que consideren pertinente.

Actividades

Los estudiantes exploraron e interpretaron el contenido de las representaciones gráfica, numérica y algebraica para construir la expresión algebraica que modela la situación, la cual se presentó en diversos contextos, por ejemplo, en el contexto gráfico se presentaron una o dos gráficas para explorar el comportamiento del trazo en términos de la situación. Las curvas que se exponen son: recta, parábola, dos rectas, parábola y recta, y dos parábolas. La tarea consistió en construir la expresión o expresiones algebraicas que representan la gráfica o gráficas expuestas. Además, se presentaron diversas actividades para que el alumno explorara, con apoyo del *software* dinámico, el contenido de la gráfica (recta, parábola y el polinomio cúbico), empleando para ello tratamientos cualitativos y cuantitativos.

La tarea 1 consideró diferentes situaciones, su propósito era explorar las propiedades de la gráfica para construir la expresión algebraica que modela la formación de los rectángulos, la cual representa una parábola, así como el área de los rectángulos, cuyo comportamiento es un trazo cúbico.

Tarea 1 Construcción de los polinomios de grado dos y cúbico

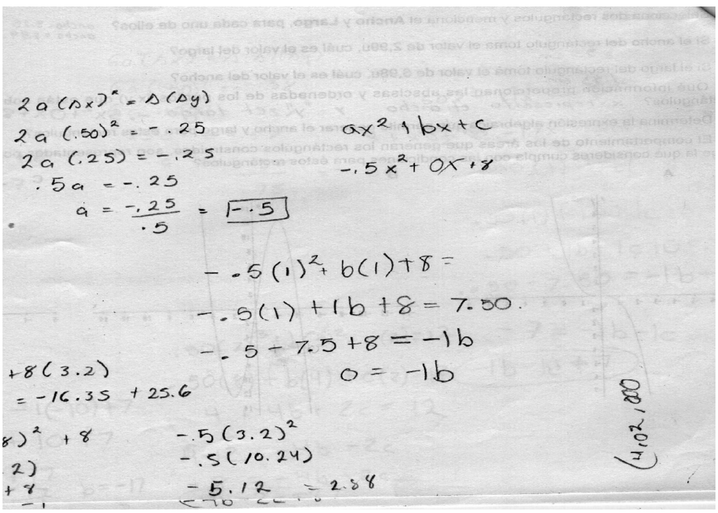


El archivo muestra la situación para la formación de los rectángulos a través de discriminar los largos (ordenadas) y anchos (abscisas) de los puntos que integran la gráfica ***"h"***, así como los puntos que integran la gráfica ***"s"***, los cuales generan las áreas. Tales atributos hacen que la tarea 1 presente dificultades, ya que, por un lado, solicita del estudiante la construcción de la expresión algebraica para la gráfica ***"h"*** (parábola) y, por el otro, la exploración del comportamiento de un trazo cúbico (gráfica "***s***").

El equipo constituido por las alumnas D y J exploraron el contenido de la representación numérica mediante tratamientos cuantitativos, actividad que les permitió identificar la constante en la tabla numérica cuando se aplicaba la segunda diferencia, con lo que se verificó que el trazo fuera una parábola.

E: ¿Están seguras de que la gráfica h *es una parábola?*
D: Todavía no.
J: Hasta buscar las diferencias... traes calculadora (realizan cálculos).
D: Vemos que no es constante, buscamos doble diferencia.
J: ¿Segunda diferencia?
D: Para ver si... (realizan cálculos).
J: Si es una parábola.
D: Es igual a *a* = −*1 (segunda diferencia para las ordenadas).*
J: O sea, que sí es constante.
D: Y sí es una parábola.

El equipo continúa explorando la representación numérica para determinar el valor numérico del coeficiente del término cuadrático (***a***) e identificar el valor numérico del término independiente (***c***) en la representación gráfica.



*S: Pues la fórmula es 2*a *por incremento de* x *al cuadrado igual a las dobles diferencias de* y, *y 2*a *(incremento* x*)*^{2} *puede ser cualquier número, a ver (señala el doble incremento de "*y*").*

E: ¿Qué significan esos dobles incrementos?
S: Pues, perdón, son éstos, son éstos.
*S: 2*a*(0.50)* ^{2} *= –0.25, por tanto,* a *= –0.5.*
*S: Éste sería el valor de "*a*", entonces ya tenemos –0.5*x^2*, nada más faltaría "*b*" y aquí nos da (grafica "*h*") la "*c*", que sería ocho y nos faltaría encontrar "*b*". ¿Lo sacas tú?*

El equipo identificó la constante por medio de las diferencias finitas (tabla numérica). Esta información se empleó para determinar el valor numérico del coeficiente del término cuadrático, utilizando la expresión

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Primera}\\ \text{diferencia}}}{2a(\Delta x)2} \quad = \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Segunda}\\ \text{diferencia}}}{\underbrace{\Delta(\Delta y)}}$$

Una vez determinado el valor para el coeficiente, el equipo integró la información ($y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 8$) y se mencionó la tarea siguiente: localizar el valor del coeficiente del término lineal.

El equipo usó tratamientos cuantitativos para elegir una pareja ordenada y desarrollar procedimientos algebraicos, lo que permitió identificar el valor numérico del coeficiente del término lineal (***b***):

S: Que sería sustituir en ax^2 + bx + c.
J: (Escribe lo que indica S).
S: Entonces sería –0.5(1)^2 *tienen que dar uno de los puntos ¿no? (Señala la columna de las "*x*") los anchos, sería 1 al cuadrado* + b *por uno* + c.
J: c *es 8.*
S: Que sería igual ¿a?
J: Inicia los cálculos (–0.5(1)^2 *+ 1*b *+ 8 = 7.50).*

S: *Entonces la* b *sería igual a cero.*
E: *¿Cuál es la expresión algebraica para los largos?*
J: *De los largos es* $-0.5x^2 + 0x + 8$.

Básicamente, el equipo desarrolló tratamientos cuantitativos y cualitativos en las representaciones numérica y gráfica, respectivamente, para identificar los valores numéricos de la expresión algebraica de coeficientes del término cuadrático e independiente.

En relación con el valor numérico del coeficiente del término lineal, el equipo desarrolló tratamientos cuantitativos para ser interpretados puntualmente mediante la elección de parejas ordenadas elegidas aleatoriamente (tabla numérica). La información que se obtuvo se exploró con procedimientos algebraicos para determinar el valor del coeficiente.

Por último, se integró la información identificada en las representaciones numérica, gráfica y algebraica para construir la expresión algebraica $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + 8$.

El uso de la interpretación global por tratamientos cualitativos favoreció el descubrimiento de un panorama general del comportamiento del trazo, situación que permitió la toma de decisión de traer a escena otras representaciones. Asimismo, la interpretación global mediante tratamientos cuantitativos contribuyó a identificar el tipo de trazo que se analizaba, así como a la determinación del valor numérico de los coeficientes.

Es importante mencionar que el equipo participante utilizó tratamientos cualitativos y cuantitativos para explorar la situación cuya información se interpreta global o puntualmente. Al respecto, el equipo empleó la interpretación global al inicio de la actividad y, para concluirla, la interpretación puntual. La interpretación puntual es el cierre de un análisis extenso para explorar los contenidos de las representaciones gráfica, numérica y algebraica.

CONCLUSIONES

- Durante la experiencia educativa, los alumnos exploraron cuantitativamente la identificación de las secuencias numéricas, tanto en la representación gráfica como en la numérica; su propósito consistió en proporcionar información al estudiante para que determinara los valores numéricos que constituían la expresión algebraica, teniendo como antecedente la interpretación global (tratamiento cualitativo) de las representaciones gráfica y algebraica. No obstante, el desempeño de los equipos para explorar el contenido de la representación gráfica se enfocó en el estudio cualitativo de las curvas con una participación mínima del estudio cuantitativo global. Éste se desarrolló con mayor asiduidad en la tabla de valores (representación numérica) debido a que, en la representación gráfica, la figura forma y la figura fondo están integradas en una sola forma, por lo que la identificación de las secuencias numéricas está afectada, primero, por el tipo de curva y, segundo, por la escala.

- Otra vía utilizada por los alumnos para explorar la representaciones gráfica y numérica fue mediante el punteo, esta vía la menciona Duval (1988) como una vía asociativa limitada a los valores particulares y a los puntos marcados en el plano de referencia; a través de ella, los equipos exploraron parejas ordenadas importantes (porque es un punto de intersección con uno de los ejes, o con otra curva, o porque es un máximo) para concluir la actividad o bien para plantear conjeturas que favorezcan el desarrollo de la tarea. En este sentido, explorar de manera puntual las representaciones gráfica y numérica es un tratamiento que contribuye a la exploración de las representaciones, siempre que se cuente con otras vías para estudiar aspectos no contemplados por la vía del punteo. Por consiguiente, se debe fortalecer el estudio de las representaciones de manera integral, es decir, mediante la exploración conjunta de la interpretación global y puntual, ya que cada una de ellas explora aspectos relevantes de las representaciones, pues si se soslaya alguna de las interpretaciones, el estudio se limitará a ciertos aspectos, lo que conlleva afirmaciones justificadas por suposiciones y no por argumentaciones referidas a la información identificada.
- Los equipos desarrollaron tareas rutinarias (tarea 1), es decir, trazos que se exploraron durante la experiencia educativa, y tareas no rutinarias (tarea 2), aquellas tareas que contenían curvas no estudiadas en el aula, por ejemplo, el trazo de un polinomio de cuarto grado, el cual constituyó un reto para los equipos, pues se trataba de un trazo inédito para ellos, lo que ocasionó desconcierto. Sin embargo, los alumnos iniciaron la exploración de la curva comparando el comportamiento del trazo con las gráficas analizadas en clase, después aplicaron estrategias para resolver la situación, identificando las "características visuales" del trazo y sus correspondientes variables categóricas en la representación gráfica, a fin de interpretar globalmente la información y poder seleccionar la expresión algebraica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bertin, J. (1968), "Gráfica (representación)", en *Encyclopoedia Universalis,* París, Francia, vol. 7, pp. 955-964.

Benítez, A. (2004), *Estudio exploratorio sobre la construcción de la expresión algebraica (el caso de polinomios) a través de la interpretación global de las representaciones gráfica, numérica y algebraica,* Tesis de doctorado, Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional, México.

Cantoral, R. y G. Montiel (2001), *Funciones: visualización y pensamiento matemático,* México, Rearson Education.

Confrey, J. y E. Smith (1994), "Exponential Functions, Rates of Change, and the Multiplicative Unit", *Education Studies in Mathematics,* vol. 26, pp. 135-164.

Confrey, J. y E. Smith (1995), "Splitting, covariation and their role in the development of exponential functions", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 26, núm. 1, pp. 66-86.

Cordero, F. y M. Solís (1995*), Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo,* México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Dugdale, S. (1993), "Functions and Graphs Perspectives on Student Thinking", en T. A. Romberg, E. Fennema y T. P. Carpenter (eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions,* Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum, pp. 101-130.

Duval, R. (1988), "Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros", en *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* vol. 1, pp. 235-253. Versión en español de Blanca M. Parra, en *Antología en educación matemática,* México, DME, Cinvestav, 1993.

——— (1993), "Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM de Strasbourg, Francia, vol. 5, pp. 37-65.

——— (1999), "Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking", en F. Hitt y M. Santos (eds.), *Proccedings of the Twenty First Annual Conference of the North American Group for the Psychology of Mathematical Education* (PME-NA 21), Morelos, México, pp. 3-26.

——— (2003), "Voir en mathématiques", en E. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, A. Rivera y S. Ursini (eds.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual,* México, Fondo de Cultura Económica, pp. 29-64.

Hitt, F. (1994), "Teacher difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 16, núm. 4, pp. 10-20.

Janvier, C. (1987), "Translation processes in mathematics education", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation on the teaching and learning of mathematics* Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum, pp. 27-32.

Kaput, J. (1987), "Representation Systems and Mathematics", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics education*, Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum, pp. 19-26.

——— (1993), "The Urgent Need for Proleptic Research in the Representation of Quantitative Relationships", en T. Romberg, E. Fennema y T. P. Carpenter (eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*, Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum, pp. 279-311.

Leinhardt, G., O. Zaslavsky y M. K. Stein (1990), "Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching", *Review of Educational Research*, vol. 60, núm. 1, pp. 1-64.

Moschkovich, J., A. Schoenfeld y A. Arcavi (1993), "Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them", en T. A. Romberg, E. Fennema y T. P. Carpenter (eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*, Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum, pp. 69-99.

Schoenfeld, A., J. Smith y A. Arcavi (1993), "Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain", en R. Glaser (ed.), *Advances in Instructional Psychology*, Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum, vol. 4.

Torregrosa, G. y H. Quesada (2007), "Coordinación de procesos cognitivos en geometría", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 10, núm. 2, pp. 275-300.

DATOS DE LA AUTORA

Alma Alicia Benítez Pérez
CECyT 11 "Wilfrido Massieu", Instituto Politécnico Nacional, México
abenitez@ipn.mx