Propuesta didáctica en optimización dinámica. Investigación en el aula

José Campero y María Trigueros

Resumen: Este artículo tiene como objetivo informar los resultados de la puesta a prueba de una propuesta didáctica para la enseñanza de la *optimización dinámica,* en particular del *cálculo de variaciones*. El diseño de la propuesta se hizo con base en la teoría APOE y se puso a prueba en una institución de enseñanza superior. Los resultados obtenidos del análisis de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario y una entrevista ponen de manifiesto que los estudiantes muestran concepciones proceso y, en ocasiones, objeto de los conceptos abstractos de esta disciplina como resultado de su aplicación, aunque se detectaron algunas dificultades que resultaron difíciles de superar para dichos alumnos.

Palabras clave: optimización dinámica, teoría APOE, propuesta didáctica, concepciones, aprendizaje.

Didactic in dynamic optimization. Classroom research

Abstract: The purpose of this paper is to present the results of a research study on a didactical proposal to teach Dynamical Optimization, in particular, Calculus of Variations. The proposal design was based on APOS theory and was tested at a Mexican private university. Results obtained from the analysis of students´ responses to a questionnaire and an interview show that students construct process conceptions, and in some cases, object conceptions of this discipline´s abstract concepts. Some problems were however difficult to overcome for these students.

Keywords: dynamical optimization, APOS theory, didactical proposal, conceptions, learning.

Fecha de recepción: 6 de junio de 2010.

INTRODUCCIÓN

La *optimización dinámica* estudia la obtención de la solución óptima de sistemas que evolucionan en el tiempo susceptibles de influencia mediante decisiones externas. Si bien en un principio los problemas de interés relacionados con esta disciplina se hallaban en la ingeniería o en las ciencias exactas, hoy se estudian problemas de esta naturaleza cada vez con mayor frecuencia en el marco de las ciencias económicas y sociales.

Este artículo inicia con una breve explicación sobre las motivaciones que propiciaron el diseño y validación de la propuesta didáctica, así como los antecedentes de este trabajo en la literatura. Puesto que la propuesta se diseñó a partir del análisis de las posibles construcciones mentales necesarias para el aprendizaje de los conceptos involucrados, se presenta brevemente la teoría APOE que lo sustenta, así como algunas razones que justifican su elección. A continuación, se describe la metodología seguida en el análisis y evaluación de la propia secuencia didáctica. Por último, se presentan la propuesta didáctica seguida de los resultados obtenidos en la investigación sobre su aplicación en el aula y se sugieren algunas alternativas para mejorarla.

ANTECEDENTES

Se pueden considerar como antecedentes indirectos de este trabajo aquellas investigaciones relacionadas con investigaciones educativas que informan acerca de propuestas didácticas que utilizan como marco teórico la teoría APOE, ya que el interés de esta investigación es similar. Encontramos en la literatura elementos que permiten considerar que una propuesta didáctica basada en esta teoría puede ser exitosa en términos del aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, Weller, Clark, Dubinsky, Loch, Mc Donald y Merkowsky (2003) informan actitudes positivas y resultados interesantes de aprendizaje de estudiantes en diversos cursos diseñados con base en la teoría APOE, y Salgado y Trigueros (2009) informan los resultados de un trabajo más completo (Salgado, 2007) acerca de una propuesta didáctica para enseñar el tema de conteo a estudiantes universitarios. Sus resultados indican que, si bien los estudiantes presentan muchas dificultades para aprender los conceptos asociados al conteo, es posible diseñar una secuencia didáctica, basada en la teoría APOE, que permite a los estudiantes superar dichas dificultades. Por otra parte, en la conferencia internacional sobre Álgebra Lineal y sus aplicaciones del

2002, Weller informó que los alumnos que siguieron un curso de esta disciplina siguiendo un texto basado en la teoría APOE (Weller, K., A. Montgomery, J. Clark, J. Cottrill, M. Trigueros, I. Arnon y E. Dubinsky, 2000), e impartido en dos universidades diferentes, tuvieron resultados positivos.

En cuanto a la revisión de textos que incluyen el tema optimización dinámica enfocada en la economía, se encontró que la mayoría presentan el tema a partir de definiciones formales y demostraciones rigurosas. Se dan unos cuantos ejemplos, pero incluyen pocas aplicaciones a la economía. En cuanto a aplicaciones en contexto económico, existen pocos textos y los que existen tienen relativamente pocas aplicaciones (Cerdá, 2001; Chiang, 1992; Lomelí y Rumbos, 2003). El contenido de estos textos no está basado en investigación en Matemática Educativa y no se detectó ningún trabajo de esta disciplina relacionado con el tema de la presente investigación.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE (Dubinsky, 1991, a, b, c, 1994, 1996, a, b, c, 2001; consiste en una teoría cognitiva-constructivista basada en el mecanismo de "abstracción reflexiva" que Piaget utilizaba para explicar la construcción del conocimiento. Dubinsky retomó este mecanismo para dar cuenta de la manera en que se pasa de un estado de conocimiento a otro en el caso de los conceptos matemáticos de nivel universitario. Además de la abstracción reflexiva como mecanismo de conocimiento, las componentes principales de la teoría APOE son los distintos tipos de concepción que se presentan en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos. Dichos tipos de concepción son: acción, proceso, objeto y esquema. El paso de uno a otro requiere mecanismos ligados a la "abstracción reflexiva": interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión.

Así, se dice que un estudiante muestra un tipo de concepción acción sobre un concepto si únicamente puede utilizar algoritmos o reglas dictadas por una fuente externa o interna, como la memoria, pero sin mostrar comprensión de ellos. Al llevar a cabo acciones sobre objetos matemáticos conocidos y al reflexionar sobre el concepto bajo estudio, el alumno interioriza las acciones en procesos; ello le permite llevarlas a cabo sin necesidad de reglas específicas o saltarse pasos en los algoritmos. Si en algún momento el estudiante tiene necesidad de ejercer acciones sobre un proceso, éste se encapsula en un objeto sobre el cual puede realizar nuevas acciones. Distintas acciones, procesos y objetos pueden interrelacionarse entre sí para formar un esquema. El esquema también puede incluir esquemas construidos previamente. Cuando un esquema se utiliza de manera coherente y es posible hacer acciones sobre él como un todo, se dice que el esquema se ha tematizado y puede considerarse como un objeto.

En la aplicación de la teoría APOE, un paso fundamental consiste en diseñar un modelo, basado en la experiencia de los investigadores, el análisis histórico y el análisis de resultados previos de investigación, el cual describa las posibles construcciones que un alumno lleva a cabo para aprender un concepto matemático. Este modelo, que se conoce como *descomposición genética,* sirve como base teórica para la investigación de las construcciones de los alumnos y también como modelo para el diseño de actividades destinadas a la enseñanza del o de los conceptos de interés. La descomposición genética no es única y constituye un elemento esencial en la investigación.

Descomposición genética

Como se mencionó anteriormente, en el caso del presente trabajo, además de la experiencia de los investigadores, se llevó a cabo un análisis histórico-epistemológico del desarrollo de la optimización dinámica (Lenstra, Rinnoy y Schrijver, 1991) que proporcionó elementos para el diseño de la descomposición genética. Así, por ejemplo, consideramos que la optimización dinámica tuvo su origen en problemas geométricos y físicos, pero que los problemas relacionados con la economía desempeñaron un papel importante en su desarrollo; así que las acciones que se llevaron a cabo para la solución de estos tipos de problemas se incluyeron en la descomposición genética propuesta.

Los esquemas que supuestamente los estudiantes deben haber construido previamente son:

1. Un esquema de función que incluya la construcción de funciones de una y de varias variables, sus derivadas, funciones vectoriales de variable real (trayectorias) y derivadas e integrales de funciones vectoriales de variable real, al menos como proceso, y que incluya relaciones que permitan al estudiante distinguir los distintos tipos de funciones, sus propiedades y representación geométrica.
2. Un esquema de espacio vectorial que incluya la construcción del concepto de espacio vectorial y de base de un espacio vectorial, al menos como concepción acción.

3. El concepto de conjunto como un proceso que permita determinar sus elementos y comparar conjuntos.
4. Los conceptos de ecuación diferencial y de solución como un proceso que permita resolver ecuaciones de segundo orden y sistemas de ecuaciones lineales y con coeficientes constantes.

Llamamos *esquema de funcional* al esquema que se desea que los alumnos construyan en el curso. Este esquema incluye los conceptos de funcional lineal, condiciones necesarias de primer orden de optimización dinámica, condiciones suficientes de segundo orden de optimización y condiciones de transversalidad.

Para construir el concepto de funcional, es necesario desencapsular el esquema de función y el de espacio vectorial para construir las acciones o procesos que permiten definir distintos tipos de funciones, en particular aquellas con dominio en cualquier espacio vectorial normado; como caso especial, son necesarias las acciones que permiten iniciar el proceso de construcción como objeto de funciones con dominio en R^n como dominio de una función más general cuyo rango son los reales. En la historia se observa que éstas fueron las acciones que Newton llevó a cabo en la solución del problema de la braquistócrona y que más tarde fueron retomadas por Bernoulli. Mediante estas acciones, fue posible incorporar la variación, es decir, la variable tiempo y su relación con las trayectorias en los problemas de optimización. Las acciones sobre estas últimas funciones se interiorizan en un proceso que se puede coordinar con la concepción proceso de otros tipos de funciones para hacer posible su comparación con el fin de generalizar la noción de función conocida por los alumnos en una definición general de funcionales. Este proceso se encapsula en un objeto sobre el cual se pueden ejercer nuevas acciones. Evidentemente, las funciones reales que aparecen en el esquema de funciones también serían funcionales; de hecho, este tipo de funciones fue el que utilizó Newton para definir las variaciones, aunque él no las llamaba aún funciones. La reflexión sobre las acciones que permite a los alumnos construir funcionales y compararlas con otros tipos de función permite interiorizarlas en un proceso en el que se distinguen las características de aquellas funciones que no se pueden considerar como funcionales y las que sí lo son. Este proceso se coordina, además, con el esquema de función de manera que dicho esquema se enriquezca al incluir la noción de funcional.

Por otra parte, se efectúan acciones sobre diversas funciones para calcular una integral sobre una trayectoria (integral de línea). Estas acciones se interiorizan en el proceso que permite generalizar la noción de función para considerar esta operación como una función cuyo dominio es una trayectoria y cuyo rango (en los reales) está dado por el conjunto de valores obtenidos para cada trayectoria. La coordinación de este proceso con aquel que lleva a la interiorización de la noción de funcional permite a los alumnos considerar que una integral de línea es un caso particular de funcional.

Este proceso se debe coordinar con el proceso requerido para representar gráficamente las curvas para las que se calcula la integral sobre una trayectoria y con el resultado de este cálculo para comparar las trayectorias y determinar la óptima.

Una vez construido el concepto de funcional como un proceso, se ejercen sobre él acciones que permiten considerar la primera variación, a fin de encontrar una condición de primer orden para hallar la funcional cuyo valor es óptimo; es decir, acciones sobre la integral para determinar la trayectoria para la cual la primera variación de la funcional sea cero ($DJ(x^*) = 0$). Estas acciones se interiorizan en un proceso que puede compararse y coordinarse con el seguido en la optimización de funciones.

Las acciones antes mencionadas consisten en aquellas que permiten calcular incrementos en funcionales mediante la consideración de la variación:

$$J\left(x(t)+h(t)\right)-J\left(x(t)\right)=\int_a^b f\left(x(t)+h(t),\dot{x}(t)+\dot{h}(t),t\right)dt-\int_a^b f\left(x(t),\dot{x}(t),t\right)d,$$

que requiere desencapsular el objeto integral del esquema de funciones y la posibilidad de utilizar sus propiedades elementales como procesos, así como el proceso de aproximación lineal de funciones para coordinarlo con los procesos necesarios para simplificar la definición de incremento, considerar la derivada de la funcional y expresar la condición necesaria de optimización como

$$DJ\left(x(t)\right)h(t)=\int_a^b h\left(f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)dt=0, \text{ ó}$$

$f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}=0$, que se conoce como ecuación de Euler.

Las acciones que se ejercen sobre la ecuación de Euler conducen a encontrar una ecuación diferencial de segundo orden que es equivalente a ella. Estas acciones se interiorizan en un proceso que se coordina con el proceso de solución de una ecuación diferencial de manera que permite encontrar el conjunto solución de la ecuación diferencial y, con ello, el valor óptimo de la funcional en el caso de problemas específicos. Este proceso se generaliza en otro proceso que permite encontrar las condiciones de primer orden de problemas de optimización en general.

La construcción del proceso que permite obtener la segunda variación de la funcional es análoga a la construcción de proceso para la primera variación. Para construir las condiciones de suficiencia, se desencapsula el esquema de función, a fin de considerar el proceso que permite obtener las condiciones de suficiencia para la optimización de una función con dominio en R^n, y los procesos de cálculo de la integral de este mismo tipo de funciones y los que permiten el uso de sus propiedades elementales para coordinarlos con los procesos análogos en el uso de funcionales y construir así las condiciones suficientes de segundo orden para funcionales como un proceso que permite determinar si una trayectoria que cumple con la condición necesaria para la primera variación es un máximo o un mínimo.

Las condiciones de transversalidad se pueden construir generalizando el proceso de construcción de la funcional y el proceso que permite considerar los cambios en las condiciones de frontera e incluir el tiempo como variable. Las acciones mencionadas en la construcción de la funcional y de la primera variación se repiten en este caso para construir las condiciones que se deben considerar en el proceso de optimización.

Todas las construcciones descritas anteriormente se relacionan entre sí para construir el esquema de funcional.

METODOLOGÍA

La teoría APOE induce su propia metodología, en ella deben seguirse los siguientes pasos: diseño de una descomposición genética de los conceptos bajo estudio; diseño y aplicación de instrumentos didácticos y de validación de la propuesta didáctica y presentación del análisis de los resultados obtenidos al utilizar los instrumentos de validación de la propuesta y, de acuerdo con éstos, proponer cambios en la propuesta didáctica o en la descomposición genética, así como investigaciones futuras.

Una vez propuesta la descomposición genética, se llevó a cabo el diseño de la propuesta didáctica en sí, al igual que el de los instrumentos de validación, utilizándola como base.

En el diseño de la propuesta didáctica, se consideró que las funcionales pueden proceder de problemas abstractos o de problemas concretos de aplicación en los que la trayectoria y su valor tienen un significado específico. Estos problemas de aplicación, junto con la definición de espacio vectorial, desempeñaron un papel importante en el renacimiento de la optimización dinámica: Pontryagin, Boltiansky y Mishenko utilizaron el trabajo de Newton y Bernoulli, junto con las aplicaciones para desarrollar la definición de funcional que ahora conocemos. Puesto que, históricamente, el proceso de definición de las funcionales se inició con el trabajo sobre aplicaciones, en particular las relacionadas con la asignación óptima de recursos, se consideró pertinente que las acciones de construcción del esquema de funcional se iniciaran justamente con problemas de la misma naturaleza de los que dieron origen tanto al cálculo de variaciones como a la teoría de control. Pero también se consideró que no debemos olvidar que la construcción de los conceptos abstractos requiere la ejecución de acciones sobre objetos de la propia matemática, lo cual, dicho sea de paso, fue lo que los autores antes mencionados hicieron en sus propuestas, además de interiorizarlas en procesos que se coordinan con los esquemas de variable y variación para definir las funcionales adecuadas para la modelación.

La propuesta didáctica estuvo formada por un conjunto de siete actividades que se trabajaron colaborativamente en clase, con el objetivo de brindar oportunidades que permitieran a los estudiantes construir los conceptos bajo estudio. En particular, se destinó por lo menos una actividad a la construcción de cada concepto. En la primera, se introdujo a los estudiantes en el tipo de problemas que estudia la optimización dinámica; se utilizaron en particular los problemas que dieron origen al cálculo de variaciones, aunque utilizando notación moderna, con el objetivo de introducir las acciones necesarias para modelar el problema de la braquistócrona y algunos problemas de aplicación a la economía y construir, a partir de ellos, el concepto de funcional y la necesidad de optimización de este tipo de funciones.

Entre las actividades que se propusieron en particular para la construcción del concepto de condiciones necesarias de primer orden para optimizar funcionales de interés, se encuentran las siguientes:

1. En un cierto instante t_0, una empresa dispone de un *stock* $x(t_0) = x_0$ de

un determinado producto. El costo de almacenaje por unidad de dicho producto es de *c* unidades monetarias. La empresa puede utilizar las unidades que tiene en el *stock* para venderlas en cierto mercado. La venta de *q* unidades de este bien en el mercado proporciona un ingreso $I(q)$.

i. En economía se supone que la función de ingreso es cóncava. Dar argumentos de tipo económico que justifiquen esta hipótesis. Escribir la función de utilidad en cada instante de tiempo.
ii. ¿La función de beneficios es cóncava o convexa? (Justificar.)

La solución de estas dos partes de la actividad requiere las acciones necesarias sobre objetos económicos y sobre la función, como objeto, para determinar, por una parte, la concavidad o convexidad de las funciones y, por otra, para construir la función utilidad y la función beneficio.

iii. ¿Qué relación existe entre *q* y *x*?

En esta parte, se requieren acciones o procesos para distinguir las variables que aparecen en el problema y construir las relaciones necesarias entre ellas.

iv. La empresa desea distribuir sus existencias de modo óptimo durante cierto horizonte de planificación $[t_0, t_1]$, de modo que maximice su beneficio total a lo largo de ese periodo. (Se supone que en ese tiempo la empresa no puede obtener más unidades del bien y que las unidades no vendidas en el horizonte temporal dado no tienen ningún valor después del instante t_1.) Utilizando, en particular, los incisos ii y iv, escribir analíticamente el problema de optimización de la empresa.

El trabajo con esta parte de la actividad requiere la interiorización de las acciones ejercidas previamente en procesos que permitan considerar las distintas trayectorias posibles que corresponden al problema y construir la funcional, así como considerar el proceso de acumulación del beneficio en dichas trayectorias para generalizar los procesos que intervienen en el problema de optimización estática en uno de optimización dinámica.

v. Utilizar la restricción para eliminar la variable y llevar a cabo las acciones y procesos análogos a los de la optimización estática para llegar a la ecuación de Euler y aplicarla.

En esta parte, los alumnos deben llevar a cabo las acciones o procesos que les permitan determinar, por una parte, las condiciones de primer orden, es decir, las acciones o procesos necesarios para determinar que la ecuación de Euler desempeña el papel de las condiciones de primer orden en este tipo de problemas, así como coordinarlos con el proceso de solución de ecuaciones diferenciales necesario para utilizar dichas condiciones en la búsqueda de la trayectoria óptima para obtener un beneficio óptimo.

vi. Dar una interpretación económica a la ecuación de Euler.

En esta parte del problema, es necesario que los alumnos coordinen los procesos que han construido en su estudio de la economía con los procesos incluidos en la ecuación de Euler para hacer posible su interpretación.

vii. ¿Cómo podríamos verificar que efectivamente se trata de un máximo? (Sugerencia: efectuar los procedimientos análogos a los de optimización estática; en particular, revisar los dos primeros incisos del problema.)

En esta parte del problema, se requiere nuevamente ejercer acciones o procesos sobre las funciones que se realizaron en los primeros incisos para generalizar el proceso de función y coordinarlo con procesos análogos sobre funcionales que permitan construir las condiciones suficientes de segundo orden para optimización de funcionales.

Es claro que una sola actividad como la anterior no es suficiente para construir los conceptos abstractos que se requieren en la optimización dinámica. Por ello, se utilizaron distintas actividades, algunas basadas en aplicaciones y otras centradas únicamente en las matemáticas para dar oportunidades a los alumnos de repetir el mismo tipo de acciones y reflexionar sobre ellas y así lograr su interiorización en los procesos descritos en la descomposición genética.

También se diseñaron los instrumentos de validación para evaluar la propuesta didáctica. Estos instrumentos consistieron en dos cuestionarios que se aplicaron a los estudiantes a lo largo del semestre y un tercer cuestionario y una entrevista que se aplicaron al final del curso y que permitieron, entre otras cosas, determinar los tipos de construcción mostrados por los estudiantes sobre los conceptos en estudio. Una hipótesis de este trabajo consiste en que, al considerar de manera global todos los instrumentos de validación, se podría apreciar la evolución de la construcción de estos conceptos a lo largo del curso en el caso de algunos estudiantes.

Los cuestionarios se aplicaron a todos los estudiantes del grupo, mientras que la entrevista semiestructurada se aplicó a un grupo de alumnos seleccionados por la maestra del curso, atendiendo a su trabajo en el curso y en los exámenes de manera que representaran una muestra de 14 alumnos con diferente desempeño.

A continuación y a manera de ejemplos, se presentan algunos problemas que se utilizaron repetidamente en los cuestionarios y en la entrevista. Se presenta, asimismo, el análisis que se hizo con base en la descomposición genética.

1. *¿Cuáles de las siguientes son funcionales y por qué?*

i) $f(x) = \int_0^x (2t^2 + 5)dt$; ii) $f(x, y) = x^2 + y^2$; iii) $f(x, x', t) = \sqrt{1 + x'^2}$

iv) $J(x) = \left(\int_0^5 x^2(t)dt, \sqrt{1 + x'^2} \right)$; v) $J(x) = \int_0^T (x^2 + x'^2)dt$

En este problema se espera determinar si los estudiantes han llevado a cabo las acciones necesarias para distinguir cuándo son espacios vectoriales los dominios de las funciones presentadas en los distintos incisos y cuándo son números reales sus codominios, como en el caso de los incisos ii y iii, y si han interiorizado dichas acciones en el proceso de comparación y distinción de aquellas expresiones que son funcionales y las que no lo son.

2. Resolver: Opt. $J(x) = \int_0^3 (xx' - x'^2)dt$, $x(0) = 5$, $x(3)(\mathit{libre})$

Se espera que los estudiantes lleven a cabo las acciones necesarias para plantear la ecuación de Euler: $f_x - \frac{df_{x'}}{dt} = 0$, en este caso donde $f(x, x', t) = xx' - x'^2$, así como las acciones de escribir las condiciones iniciales y de transversalidad. De acuerdo con sus supuestos, se puede considerar si estas acciones se han interiorizado en un proceso que se puede coordinar con el proceso que permite plantear y resolver la ecuación diferencial resultante.

3. La trayectoria óptima para el problema: $\int_0^1 (4x - x'^2 - x^2)e^{-0.1t}dt$ *está dada* *por:* $x^*(t) = 2 + Ae^{-0.951t} + Be^{1.051t}$. *Determinar si la trayectoria óptima dada es máxima o mínima, justificando la respuesta.*

Esperamos que los estudiantes lleven a cabo por lo menos las acciones necesarias para construir la matriz hessiana y operar con ella, a fin de determinar si la función es cóncava o convexa.

La elaboración de los instrumentos de validación, con base en la descomposición genética antes mencionada, incluye la propuesta de los criterios objetivos que permiten el análisis de las respuestas de los estudiantes y, mediante éste, poder determinar el tipo de concepción de cada uno de ellos. Es importante aclarar que el tipo de concepción de cada alumno sobre cada uno de los conceptos en estudio se determinó basándose en toda la información obtenida y no únicamente con base en una pregunta aislada. En el anexo 1 se muestra completo el cuestionario 3, así como las preguntas de la entrevista semiestructurada que se utilizó con los estudiantes seleccionados.

El análisis de las respuestas de los estudiantes a los instrumentos de validación y a los instrumentos didácticos fue llevado a cabo de manera independiente por dos investigadores. Los resultados se negociaron entre ellos para lograr mayor objetividad.

RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados obtenidos del análisis de los instrumentos descritos antes con el fin de evaluar la propuesta didáctica se pueden dividir en dos rubros:

1. La eficacia didáctica de la propuesta considerando, por una parte, el aprendizaje de los alumnos en términos globales, es decir, como grupo y, por otra, la motivación de los estudiantes en el curso.
2. La valoración de las actividades propuestas y de la descomposición genética que las sustenta en términos de las construcciones que se observaron en los estudiantes, nuevamente, considerando al grupo en su totalidad.

Aprendizaje global de los alumnos

El análisis de las respuestas de los alumnos a los cuestionarios permitió hacer un seguimiento de las construcciones de los alumnos a lo largo del curso. En este trabajo, sin embargo, y con el fin de valorar el conocimiento que construyeron los alumnos en el curso, nos concentraremos en los resultados del análisis del último cuestionario y de la entrevista a los estudiantes del grupo con el que se trabajó la propuesta didáctica.

El concepto de funcional resultó el más difícil para los estudiantes. Consideramos que esta dificultad está relacionada en gran parte con el concepto de espacio vectorial normado. Este concepto es complejo; la literatura en educación matemática informa que este concepto resulta difícil para los estudiantes (Trigueros y Oktaç, 2005; Maracci, 2006; Parraguez, 2009). Este estudio confirma esa dificultad en las respuestas de los alumnos. Por ejemplo, en el problema 1, más de la mitad de los estudiantes afirmó que el primer inciso representaba una funcional, ya que consideraron los números reales como espacio vectorial o confundieron la notación tomando la variable x como una función, ya que en otros problemas se había considerado la función $x(t)$.

Otra respuesta bastante común fue considerar el cuarto inciso del mismo problema como funcional, porque *"su dominio son curvas, como en los ejemplos que vimos en clase"*, o alguna frase equivalente.

Los alumnos que dan este tipo de respuestas muestran ser capaces únicamente de seguir las acciones determinadas en un algoritmo o la memorización de las características de los funcionales utilizados con mayor frecuencia en clase y no son capaces de realizar las acciones necesarias para analizar el dominio y el codominio de cada función.

Alrededor de 30% de los estudiantes no consideró las funciones de varias variables como casos particulares de funcional. La mayoría de estos alumnos fue capaz de responder otras preguntas relacionadas con funcionales de manera correcta, pero al mostrar dificultad con esta pregunta, ponen de manifiesto que no han interiorizado las acciones en un proceso.

Al pedir a los alumnos ejemplos de funcional, alrededor de la mitad de los estudiantes exhibieron ejemplos del mismo tipo que los vistos en clase, donde, por razones curriculares, se favorece el estudio de funcionales cuyo dominio es un espacio de funciones derivables dos o más veces. Sin embargo, algunos estudiantes mostraron ser capaces de realizar las acciones que les permitían distinguir las funcionales de las que no lo son y proponer ejemplos de funcionales distintas de las favorecidas en clase en algunos contextos particulares. Estos alumnos dieron muestra de haber interiorizado las acciones mencionadas anteriormente en un proceso de funcional.

Por ejemplo, cuando se preguntó si $J(x)=\left(\int_0^5 x^2(t)dt, \sqrt{1+x'^2}\right)$ era o no funcional, un estudiante respondió en el tercer cuestionario: "*Aunque se parece a los ejemplos de clase y la* x *debe ser función derivable, pues aparece su derivada, el rango no son los reales, por lo que no debe ser funcional*".

Otro estudiante dio un ejemplo de funcional diferente de los vistos en clase:

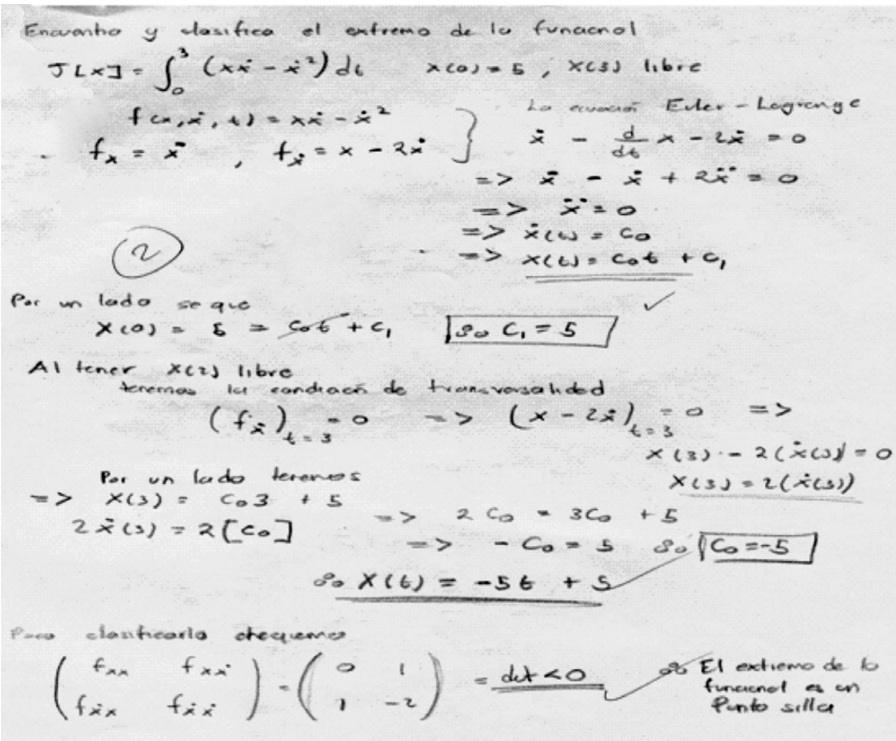
Sea $M=\left\{A\in M_{2x2}\right\}$ *el conjunto de matrices de 2x2, que es un espacio vectorial de dimensión cuatro. Una norma para este espacio podría definirse como la suma del valor absoluto de sus entradas. Un ejemplo de una funcional J de M en R (escribe J : M → R) sería:* $J(x) = \det(A)$".

Es común observar la tendencia de los estudiantes a repetir lo que se hizo en clase, pero se puede considerar que, sea por falta de actividades al respecto, sea por falta de reflexión de los propios alumnos, en este curso hicieron falta las oportunidades para reflexionar en el uso de espacios vectoriales diversos como dominio de funcionales.

Consideramos que, en general, el tipo de concepción de funcional mostrado por los alumnos puede considerarse de tipo acción; algunos alumnos mostraron una concepción tipo proceso y sólo un estudiante mostró haber construido una concepción tipo objeto de funcional. Este estudiante fue capaz de coordinar los procesos analíticos y geométricos requeridos en los problemas en general y dio muestras de haber encapsulado el proceso resultante. Por ejemplo, en el último cuestionario respondió: *Una funcional es una función cuyo dominio es un espacio vectorial normado y su rango, los reales* y, al proporcionar ejemplos concretos, empezó dando ejemplos con funciones de varias variables y terminó utilizando dominios en espacios vectoriales de dimensión infinita, como es el caso de las funciones derivables, e incluso propuso la norma para tales espacios y, además, explicó brevemente la no posibilidad de interpretación geométrica para este ejemplo:

Sea $V=\left\{x(t) : x(t)\in C^2\left[a, b\right]\wedge t\in\left[a, b\right]\right\}$ *el espacio vectorial de las funciones dos veces diferenciables sobre el intervalo cerrado* $[a, b]$*, donde puede definirse la norma de dicho espacio como:* $\left\|x(t)\right\| = Sup\left|x(t)\right|, t\in\left[a,b\right]$*, y un ejemplo de fun-funcional sobre este espacio sería:* $J(x)=\int_a^b \left(x'^2-3x+5t^2\right)dt$*, aunque no se* *puede dar una interpretación geométrica, ya que el dominio es un conjunto de funciones.*

Si bien muchos alumnos presentaron dificultades para distinguir las funcionales de otro tipo de funciones, la mayor parte de ellos, más de 80% de quienes respondieron el cuestionario y todos los que se entrevistaron, mostraron haber interiorizado las acciones necesarias para plantear la ecuación de Euler, que es el resultado de las condiciones de primer orden para la optimización por cálculo de variaciones, así como las acciones que se requieren para la manipulación de dicha ecuación con el propósito de obtener la ecuación diferencial asociada a ella. Un gran número de estudiantes, también más de 80%, mostraron ser capaces de coordinar el proceso de plantear y manipular las condiciones necesarias y el proceso de solución de la ecuación diferencial resultante.



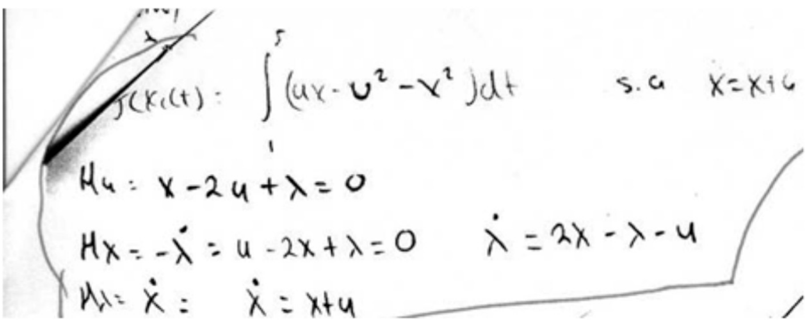
Cuando se toman en consideración las respuestas a la pregunta 4 del cuestionario, como se muestra en el ejemplo de la figura anterior, podría caber la sospecha de que los alumnos estuvieran utilizando procedimientos memorizados y, en ese caso, sólo podría considerarse que muestran una concepción acción de las condiciones necesarias de optimización. Por ello, en el cuestionario y en la entrevista se incluyó otra pregunta (la número 5) que requería llevar a cabo las acciones necesarias para plantear la ecuación de Euler y posteriormente otras acciones que permitieran transformar dicha ecuación de una manera específica que no podría haberse memorizado. Más de tres cuartas partes de los estudiantes fueron capaces de obtener la ecuación diferencial requerida en la pregunta: $\dfrac{d\left(\dfrac{x'}{t\sqrt{1+x'^2}}\right)}{dt}=0$, mostrando que habían interiorizado las acciones mencionadas con anterioridad en un proceso y que coordinaron este proceso con el requerido para llegar a la ecuación diferencial. Entre las respuestas a esta pregunta, se encuentra la de un estudiante que da muestras de haber coordinado también esos procesos con el de solución de una ecuación diferencial más complicada que las que aparecen por lo general en el curso: *Sea* $x = \tan(\theta) \Rightarrow t = sen(\theta)$, *y como* $\dfrac{dx}{dt}=\tan\left(\theta\right)$ *entonces* $dx=\tan\left(\theta\right)dt=C\,\mathrm{sen}\left(\theta\right)$ *lo que implica que* $x(t) = Csen(t)$, $y(t) = -C\cos(t) + K$.

Es posible suponer que este estudiante encapsuló los procesos antes mencionados en un objeto.

Todos los estudiantes del grupo, con excepción de uno, mostraron que eran capaces de aplicar las acciones necesarias para utilizar las condiciones de suficiencia para este tipo de optimización, como se muestra en la respuesta típica que dieron a la pregunta 6 del cuestionario:

Utilizando la matriz hessiana: $H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xx'} \\ f_{x'x} & f_{x'x'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2e^{-0.1t} & 0 \\ 0 & -2e^{-0.1t} \end{pmatrix}$ *podemos determinar que se trata de una trayectoria mínima.*

Una vez más, las respuestas a la pregunta 6 del cuestionario no son suficientes para afirmar algo más que la posibilidad de los estudiantes de realizar las acciones necesarias para utilizar las condiciones de segundo orden y determinar si la trayectoria óptima encontrada resulta en un máximo o en un mínimo de la funcional. Para poder determinar si algunos estudiantes habían interiorizado estas acciones en un proceso, se analizaron conjuntamente las respuestas a la pregunta 7 del mismo cuestionario en la que el criterio de uso del hessiano no era aplicable y en la que había que hacer un análisis más fino de la funcional. Todos los estudiantes utilizaron la condición de segundo orden en términos del hessiano, pero no todos reaccionaron al darse cuenta de que no era aplicable. Algunos de ellos mostraron haber interiorizado las condiciones de segundo orden en un proceso, pues fueron capaces de utilizar otros elementos para determinar si se trataba de un máximo o de un mínimo. Por ejemplo, un estudiante respondió: ... *al no aplicar el criterio del hessiano, me percato de que geométricamente la función es convexa, por lo que se trata de un mínimo...* Otro estudiante respondió: ...*habría que considerar trayectorias que pasen por los mismos puntos y comparar el valor de las respectivas funcionales, sólo que evaluar las trayectorias en este problema es difícil.* Este estudiante muestra también que ha coordinado distintos procesos en un nuevo proceso que le permite determinar de diversas maneras si la funcional en cuestión es máxima o mínima para la trayectoria óptima encontrada. Un ejemplo más que muestra la coordinación de distintos procesos exhibida por los estudiantes ante este problema es la respuesta de otro estudiante, que utilizó el proceso de conversión para transformar este problema en uno equivalente utilizando la teoría de control y mencionó que únicamente habría que determinar el signo de H_{uu}, donde H representa el hamiltoniano asociado al problema y u la variable de control. Mencionó que, como el problema propuesto era difícil operativamente, lo ejemplificaría con el otro problema del cuestionario. Su respuesta textual fue: *El problema dado, en el lenguaje de teoría de control, se escribiría:*



y como $H_{uu} = -2 < 0 \Rightarrow$ *es mínimo.*

Las respuestas dadas por este estudiante a lo largo de la entrevista confirmaron que mostraba una concepción de objeto sobre este concepto.

Por último, respecto al concepto *condiciones de transversalidad,* todos los estudiantes manifestaron de una u otra manera que dichas condiciones se obtienen al considerar el intervalo de tiempo variable. En este caso, si bien todos mostraron una concepción de tipo de acción sobre este concepto, al menos aproximadamente la mitad del grupo mostró la posibilidad de haber interiorizado las acciones en un proceso que fueron capaces de coordinar con el proceso geométrico correspondiente y de ilustrar las cuatro posibilidades entre considerar t y $x(t)$ libres o dadas y, además, dieron muestras de haber encapsulado el proceso resultante de esta coordinación en un objeto.

A partir de los resultados mostrados antes, es posible apreciar que los estudiantes del grupo piloto construyeron concepciones proceso y, en ocasiones, incluso concepciones objeto para todos los conceptos de interés en este estudio, excepto el de funcional. A continuación, se muestra un cuadro que resume los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes entrevistados para cada uno de los conceptos que componen el esquema de funcional.

En la primera columna del cuadro se muestran las iniciales de los estudiantes, el resto de las columnas representan los conceptos bajo estudio: funcional, condiciones necesarias de primer orden, condiciones suficientes de segundo orden y condiciones de transversalidad. Las letras A, P, y O representan el tipo de concepción que se determinó que mostraba cada estudiante mediante criterios basados en la descomposición genética propuesta.

Inicial estudiantes	Func.	Cond. 1er. ord.	Cond. sufs.	Cond. transv.
Ge	O	P	P	A
Er	A	P	A	A
Ya	A	P	P	O
Jr	P	P	P	O
Ed	A	A	O	A
Fr	A	P	P	A
Ar	P	P	P	O
Pe	A	A	P	A
Al	A	A	A	A
Mi	P	P	P	O

Inicial estudiantes	Func.	Cond. 1er. ord.	Cond. sufs.	Cond. transv.
Er	P	O	O	A
Ma	P	P	O	O
Hu	A	P	O	A
Na	A	P	P	O

Los resultados globales obtenidos del análisis de todos los instrumentos de validación pueden resumirse de la siguiente manera:

- Sobre el concepto de funcional, aproximadamente 35% de los estudiantes mostró una concepción proceso y sólo un alumno dio muestras de haber construido una concepción objeto.
- Respecto de la aplicación de las condiciones necesarias de primer orden: más de 70% de los estudiantes mostró una concepción proceso y únicamente un estudiante mostró un tipo de concepción objeto. Los resultados globales obtenidos sobre las condiciones suficientes de segundo orden muestran que alrededor de 57% de los estudiantes mostró una concepción proceso y 28.5% mostró una concepción objeto.
- Los resultados globales sobre condiciones de transversalidad ponen de manifiesto que aproximadamente 43% de los estudiantes mostró una concepción objeto y el resto (57%) mostró una concepción tipo acción.

Los resultados que los alumnos obtienen en general en los cursos de esta materia ponen de manifiesto que los estudiantes presentan dificultades con todos estos conceptos y que, en la mayoría de los casos, únicamente memorizan los procedimientos necesarios para emplearlos. Los resultados antes mencionados permiten afirmar que la propuesta didáctica diseñada para el curso piloto descrito contribuyó a un aprendizaje más profundo de los conceptos enseñados por parte de los alumnos.

Motivación de los estudiantes

En las entrevistas con los estudiantes al término del semestre, aproximadamente la mitad de los estudiantes opinó favorablemente sobre las actividades que se utilizaron durante el semestre para el aprendizaje de los conceptos. Estos estudiantes emitieron comentarios como el siguiente:

> Ar: *Las actividades me ayudaron mucho a ver las relaciones entre sistemas dinámicos y cálculo de variaciones.*

Más de la mitad de los estudiantes comentó que consideraban muy positivo que el curso iniciara planteando problemas de optimización dinámica y que de ahí surgiera la necesidad de resolver sistemas dinámicos:

> Mi: *Es la segunda vez que llevo la materia y ahora me cayeron muchos veintes (refiriéndose a que había entendido cosas) que antes ni sospechaba.*

Hubo cinco o seis comentarios más en este sentido hechos por estudiantes que habían cursado la materia con anterioridad y que podían comparar la didáctica utilizada en este curso con la manera tradicional de enseñarlo, que es la que se utiliza con mayor frecuencia. Coincidieron en que, gracias a la manera en que se había diseñado el curso, fueron capaces de entender mejor la relación entre los sistemas dinámicos y la optimización dinámica y que antes les parecieron dos temas totalmente independientes.

La opinión de los alumnos fue compartida por la profesora del curso, quien en una entrevista manifestó:

> *Pienso volver a dar el curso con el mismo orden, utilizando las mismas actividades. En mi opinión, funcionaron bien, comparando con cursos que he dado anteriormente, en éste los alumnos tuvieron claramente mejor desempeño.*

Otra opinión que manifestaron varios estudiantes se relacionó con la motivación surgida del uso del contexto histórico en el que se presentaron los problemas de optimización dinámica. Fue común encontrar comentarios como el siguiente:

> Ed: *Me gustaron mucho las actividades del curso, pues cada una se partía en pedacitos que ayudaban a entender mejor los conceptos y así los pude relacionar mejor con problemas que nos dejan en economía.*

Estas opiniones ponen de manifiesto que la propuesta didáctica resultó atractiva para los estudiantes y que motivó en ellos, por una parte, el gusto por la materia y, por otra, el interés y la sensación de que aprendían los conceptos que se les enseñaban.

Valoración de las actividades propuestas

Como parte de la validación de la eficacia de la propuesta didáctica, es importante analizar los posibles efectos de cada una de las actividades empleadas durante el curso en términos de las respuestas de los estudiantes a los tres cuestionarios y a la entrevista. El análisis de estas actividades nos permite determinar la evolución en las construcciones de los estudiantes conforme se fueron utilizando las distintas actividades.

Los resultados de este análisis muestran una construcción paulatina de los conceptos de interés por parte de los estudiantes y, en algunos casos, es posible observar un desarrollo considerable entre la aplicación de un cuestionario y el siguiente. Con el fin de mostrar los cambios en las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios después de ir utilizando las actividades, se muestran (como ejemplo) las respuestas de uno de los estudiantes.

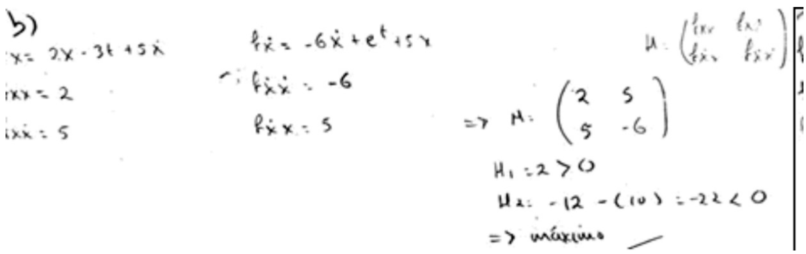
En el primer cuestionario la respuesta de Ya relacionada con el concepto de funcional fue: *Una funcional son curvas que se dibujan en los reales* y al pedirle ejemplos, mencionó: *Una curva entre dos puntos;* en el tercer cuestionario su respuesta ante este tipo de preguntas fue: *Una funcional es una función cuyo dominio es un conjunto de curvas, a cada una de las cuales se les asocia un número real*. En la entrevista su respuesta fue: *Una funcional es una función que va de un espacio vectorial cualquiera y se le asocia un número real bajo algún criterio concreto* y dio ejemplos en distintos contextos, uno de los cuales fue el siguiente: $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ *es una funcional que representa la longitud de una curva. Optimizarla es buscar la curva que, al sustituirla en la integral, dé el menor número posible, o sea que el integrando es como el criterio que se usa para optimizar. En este caso, claro, es la recta*. De las respuestas del párrafo anterior, podemos observar que, en el primer cuestionario, no menciona ni el dominio ni el rango; en el tercer cuestionario, aunque da muestras de que su respuesta está basada en la memoria, ya introduce explícitamente el concepto de dominio y rango, mientras que en la entrevista generaliza el dominio y especifica la relación funcional entre dominio y rango. Se puede observar que las palabras que usa Ya, por ejemplo "criterio concreto", son semejantes al vocabulario empleado de manera constante en las actividades trabajadas durante el curso. Este estudiante muestra un cambio que puede considerarse significativo, puesto que inicia con respuestas incompletas y, en la mayor parte de los casos, memorizadas, y termina construyendo el concepto de funcional con un tipo de concepción proceso.

En cuanto a las condiciones suficientes de segundo orden, en su respuesta al segundo cuestionario, Ya escribe el hessiano y utiliza el criterio basado en este objeto matemático para determinar que la trayectoria óptima es mínima. Escribe la respuesta de la siguiente manera:

El hessiano queda: $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xx'} \\ f_{x'x} & f_{x'x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-0.1t} & 0 \\ 0 & -2e^{-0.1t} \end{pmatrix}$*, por lo que la trayectoria es mínima*. En el tercer cuestionario, plantea el hessiano y agrega que este criterio no funciona. Su respuesta textual es la siguiente: *Como el hessiano queda:* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*, este criterio no aplica* y no dice nada más. En la entrevista su respuesta es:

$$H\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xx'} \\ f_{x'x} & f_{x'x'} \end{pmatrix}$$

Para determinar si es máximo o mínimo.



Se puede aplicar también la condición de Legendre que dice

$$\begin{cases} fx'x' & > 0 \ \textit{mínimo} \\ fx'x' & < 0 \ \textit{máximo} \end{cases}$$

Se puede observar también que la función es cóncava. También podríamos intentar con trayectorias vecinas.

Respecto a las condiciones suficientes de segundo orden, en el segundo y tercer cuestionario las respuestas de Ya consisten en repeticiones memorizadas de las definiciones. En cambio, en la entrevista menciona cuatro posibles maneras distintas para determinar si la funcional es máxima o mínima, dando muestras de coordinación entre cada una de ellas. En particular, coordina los procesos geométricos y analíticos y da muestras de encapsulación de estos procesos, por lo que es posible concluir que muestra una concepción de tipo objeto de este concepto.

En el cuadro siguiente, se muestran los cambios de concepción respecto de los conceptos en estudio en los cuestionarios 1 y 3 y en la entrevista para algunos estudiantes entrevistados.

Iniciales est.	Funcional			C.N. 1er. orden				C.S. 2º. orden			C. transv.		
	I	3	E	1	2	3	E	2	3	E	2	3	E
Ya	A	A	P	P	P	P	P	A	A	O	O	O	O
Ar	A	P	P	P	P	P	P	A	A	O	O	O	O
Ma	P	P	P	P	P	P	P	A	O	O	O	O	O
Mi	A	P	P	P	P	P	P	O	O	O	O	O	O

Los datos que mostramos en el cuadro, basados en la respuesta de cada alumno a todas las preguntas de cada uno de los cuestionarios y de la entrevista, ponen de manifiesto que estos estudiantes tuvieron, a través de las actividades trabajadas en el curso, las tareas y su propio estudio, oportunidades para reflexionar en los conceptos involucrados en la optimización dinámica y mostraron, al final del curso, construcciones tipo proceso en la mayoría de los casos para los conceptos de funcional y de condiciones de primer orden, y de objeto, para las condiciones de segundo orden y las condiciones de transversalidad.

El análisis de los datos mostró también que, si bien los estudiantes del curso lograron construir los conceptos bajo estudio de mejor manera que lo que se había observado en cursos impartidos por la misma maestra en ocasiones anteriores, uno de los objetivos de la propuesta, la construcción de un esquema de funcional, como se definió en la descomposición genética, no se logró cabalmente, ya que, si bien los alumnos construyeron relaciones entre los conceptos involucrados en el esquema, esta construcción fue únicamente parcial. Por ejemplo, y debido quizá a su experiencia en optimización estática, los alumnos relacionan las condiciones necesarias de primer orden con las condiciones suficientes de segundo orden y conciben esta relación como una generalización de lo que ya conocen del caso de la optimización dinámica. Sin embargo, cuando se trata de conceptos nuevos como los de funcional, integral de línea y condiciones de transversalidad, muestran dificultades para relacionarlos entre sí. Podría decirse que los alumnos desarrollaron un esquema en nivel intrafuncional y que algunos alumnos tal vez están en transición hacia el nivel interfuncional, pero no se encontraron pruebas de que algún alumno construyera un esquema coherente de funcional.

CONCLUSIONES

El objetivo central de este trabajo de investigación consistió en el análisis de una propuesta didáctica relacionada con la optimización dinámica. Los resultados discutidos anteriormente permiten apreciar que la mayor parte de los estudiantes del grupo construyeron concepciones de tipo proceso u objeto para casi todos los conceptos analizados. Es posible asegurar también, en el caso de los alumnos entrevistados, que las actividades diseñadas, conjuntamente con toda la actividad del curso, permitieron la construcción paulatina de los conceptos a lo largo del semestre del curso piloto para todos los estudiantes, si bien a ritmos distintos y con resultados también distintos. Sin embargo, las relaciones que los alumnos construyeron entre los conceptos no resultaron ser tan sólidas como se hubiera deseado. De estos resultados, se puede concluir que la propuesta didáctica diseñada funcionó de manera adecuada para estos estudiantes, pero requiere afinarse.

Fue posible apreciar también que los estudiantes mostraron la mayoría de las construcciones predichas por la descomposición genética, por lo que puede considerarse como un buen primer modelo para describir las construcciones mentales de los alumnos. Puesto que no fue posible determinar con claridad la construcción de las relaciones entre los conceptos por parte de los alumnos, sería conveniente revisar la descomposición genética en términos de las acciones y procesos que intervienen en dicha construcción para tenerlos en cuenta y refinarla.

El análisis de los resultados obtenidos, en particular el relacionado con las dificultades encontradas respecto al concepto de funcional, muestra que es necesario poner mayor atención en la manera en que los estudiantes construyen este concepto. El análisis de los datos nos permite proponer como hipótesis que el supuesto hecho en la descomposición genética acerca del conocimiento previo respecto a la noción de espacio vectorial no fue apropiado y que es necesario tener en cuenta su construcción, así como la construcción del espacio vectorial normado para que los estudiantes logren una construcción más profunda del concepto de funcional.

Estos resultados nos permiten concluir que la propuesta didáctica diseñada es pertinente y también eficaz. Dada la ausencia de estudios de investigación en Educación Matemática acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización dinámica, que es un tema que ha cobrado muchísima importancia en las áreas de aplicación de las matemáticas a la economía y las ciencias sociales, podemos resaltar además la originalidad de la propuesta didáctica y de la investigación aquí presentada. Los resultados de esta investigación proporcionan información que nos parece importante para la enseñanza de esta disciplina de una manera más eficiente.

Queda, por último, como tema abierto para futuras investigaciones la reconsideración del papel que desempeña el concepto de espacio vectorial en la construcción del concepto de funcional, el análisis de las construcciones requeridas en la construcción de los conceptos asociados a la teoría de control y las necesarias para fortalecer las relaciones entre los conceptos y hacer evolucionar el esquema de funcional.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Asociación Mexicana de Cultura, A.C. por su apoyo en la realización de la presente investigación. Esta investigación fue posible gracias a los fondos del proyecto Conacyt #62375.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cerdá, Emilio (2001), *Optimización dinámica*, Madrid, España, Prentice Hall.

Chiang, A.C. (1992), *Elements of dynamic optimization*, Heights, Illinois, Waveland Press.

Dubinsky, E. (1991a), "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Alemania, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

——— (1991b), "The Constructive Aspects of Rellective Abstraction in Advanced Mathematics", en L.P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences,* Nueva York, EUA, Springer-Verlag, pp. 135-148.

——— (1991c), "Constructive Aspects of Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Alemania, Kluwer Academic Publishers, pp. 231-250.

——— (1994), "A Theory and Practice of Learning College Mathematics", en A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving,* Nueva York, EUA, Hillsdale, Erlbaum, pp. 221-243.

——— (1996a), "Una aplicación de la perspectiva piageteana a la educación matemática postsecundaria", *Revista de Educación Matemática,* vol. 8, núm. 3, pp. 24-25.

——— (1996b), "El aprendizaje de los conceptos abstractos de la matemática avanzada", en *Memorias de la décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* Puerto Rico, 1996, pp. 1-9.

——— (1996c), "Aplicación de la perspectiva piageteana a la educación matemática universitaria", *Revista de Educación Matemática,* vol. 8, pp. 31-36.

Dubinsky, E. y M. Mc Donald (2001), "APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Research", en D. Holton (ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study,* Alemania, Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

Lenstra, J.K., A. Rinnoy y A. Schrijver (1991), *History of Mathematical Programming. A collection of Personal Reminiscences,* Ámsterdam, Holanda, North Holland Press.

Lomelí, H. y B. Rumbos (2003), *Métodos dinámicos en Economía. Otra búsqueda del tiempo perdido,* México, Thomson.

Maracci, M. (2006), "On students conceptions in vector space theory", en J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, pp. 129-136, Praga, PME.

Parraguez, M. (2009), "Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial", Tesis de doctorado inédita, CICATA-IPN, México.

Salgado, H.M. (2007), *Conteo: una propuesta didáctica,* Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, CICATA-IPN, México.

Salgado, H. y M. Trigueros (2009), "Conteo: una propuesta didáctica y su análisis", *Revista de Educación Matemática*, vol. 12, pp. 27-48.

Trigueros, M. y A. Oktaç (2005), "La thèorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, núm. 10, pp. 157-176.

Weller, K., A. Montgomery, J. Clark, J. Cottrill, M. Trigueros, I. Arnon y E. Dubinsky (2000), "Learning Linear Algebra with ISETL", en http://www.ilstu.edu/ifcottr/linear-alg/, recuperado el 19 de noviembre de 2008.

Weller, K., J.M. Clark, E. Dubinsky, S. Loch, M. Mc Donald y R. Merkowsky (2003), "Research in Collegiate Mathematics Education", en A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel y F. Hitt (eds.), *Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle*, Providence, RI, EUA, American Mathematical Society Press, vol. 5, pp. 97-131.

ANEXO 1

Tercer cuestionario

1. ¿Cuál es la diferencia entre un problema de control óptimo y uno de cálculo de variaciones?
2. *a)* Tanto en cálculo de variaciones como en teoría de control ¿cuáles son las condiciones suficientes de segundo orden?
   b) ¿Para qué sirven?
3. ¿Cuál es el papel de las condiciones de transversalidad en un problema de optimización dinámica?
4. *a)* ¿Qué es una funcional?
   b) ¿Cuáles de las siguientes son funcionales y por qué?

i) $f(x)=\int_0^x (2t^2+5)dt;$ ii) $f(x, y) = x^2 + y^2;$

iii) $f(x, x', t)=\sqrt{1+x'^2}$ iv) $J(x)=\left(\int_0^5 x^2(t)dt, \sqrt{1+x'^2}\right);$

v) $J(x)=\int_0^T (x^2+x'^2)dt$

5. Explica lo más claramente posible en qué consiste un problema de optimización dinámica y qué es lo que se busca como solución utilizando el cálculo de variaciones.
6. ¿Para qué tipo de problemas funciona muy bien el hamiltoniano en tiempo corriente? ¿Por qué?
7. ¿Cuál es la diferencia entre una variable de estado y una de control en un problema de control óptimo?
8. a) Encontrar la función que hace que el valor de $J[x(t)]$ sea óptimo si:

$$J\left[x(t)\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2-3x'^2+x'e^t-3tx+5xx'\right)dt;\ \text{sujeto a: } x(0)=1 \text{ y } x\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

   b) Determinar si es un máximo o un mínimo
   c) Escribe el problema como un problema de control (no lo resuelvas)
9. Encontrar la función que hace que el valor de $J[x(t)]$ sea óptimo si:

$$J\left[x(t)\right]=\int_1^5\left(ux-u^2-x^2\right)dt;\ \text{sujeto a: } x'=x+u,\ x(1)=2 \text{ y } x(5)\ \textit{libre}$$

(Recuerda que conviene despejar u de la condición necesaria para el hamiltoniano.)

ENTREVISTA

1. a) Dadas las siguientes expresiones, determinar cuáles son funcionales y cuáles son únicamente funciones (en caso de sólo ser relaciones, justificarlo).

i) $f(x)=\int_0^x\left(t^2+5\right)dt,$ ii) $f(x,y)=\int_0^3\left(\int_{y=0}^{y=x^2}\left(5x^3y+8x\right)dy\right)dx,$

iii) $f\left(x,\dot{x},t\right)=\sqrt{1+\dot{x}^2},$

considerando que x y y son variables independientes,

iv) $J(x)=\left(\int_0^5 x(t)^2\,dt, \sqrt{1+\dot{x}^2}\right)$, v) $J(x)=\int_0^T \left(x^2+\dot{x}^2\right)dt$

b) Determinar el dominio y el rango de cada una de las expresiones anteriores.
c) Con base en la respuesta dada en el inciso anterior, ¿cambiaría alguna de las respuestas del inciso a? En caso positivo, ¿en qué consistirían dichos cambios?
d) Dada una expresión analítica como en este ejemplo, ¿cómo hacer para determinar si es sólo una relación o si es función, o bien si es funcional?

2. Dar tres ejemplos de funcionales. Justificar que sean funcionales.
3. i) ¿Qué es una integral de línea? ¿Habías estudiado este concepto en cursos previos?
   ii) ¿Cómo puede calcularse una integral de línea? En cursos previos, ¿habías calculado integrales de línea?
   iii) ¿Cuál es la representación analítica de una trayectoria? ¿Las habías estudiado en cursos previos?
   iv) Dada una funcional, ¿de qué manera se puede relacionar con una trayectoria?
   v) ¿Cuál es la diferencia entre una funcional y una trayectoria?
4. a) Encontrar los extremos de las siguientes funcionales y verificar que para cualquier otra trayectoria que supusiéramos solución (proponer al menos dos), el valor de la funcional para estas trayectorias es mayor (en el caso de mínimo) o menor (en el caso de máximo):

   i) $J(x)=\int_0^{40} -\frac{\dot{x}^2}{2}\,dt, \quad x(0)=20, x(40)=0;$

   ii) $J(x)=\int_0^{2} \left(12tx+\dot{x}^2\right)dt, \quad x(0)=1, x(2)=17$

   c) Intuitivamente, ¿qué quiere decir que dos trayectorias son “vecinas”?
5. Dibujar en un plano cartesiano:

i) Las posibles soluciones al problema de optimización, señalando la que consideras óptima.

ii) Si se quisiera resolver el problema de min $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt$ (que representa la longitud de una curva entre los puntos $P(t_1, x(t_1))$ y $Q(t_2, x(t_2))$), intuitivamente, ¿cuál sería la solución óptima? Grafícala.

iii) En el inciso anterior, ¿qué tiene que ver la solución óptima con el integrando de la funcional asociada?, ¿podría ser que la trayectoria óptima estuviera en el lugar geométrico que representa el integrando o no tiene nada que ver? Justifica brevemente.

iv) Del mismo inciso ii, puede mostrarse que es un mínimo. ¿Cómo podemos interpretar geométricamente este hecho?

v) De los incisos anteriores: si queremos optimizar una funcional, necesitamos un criterio que generalmente queda implícito en la funcional. ¿Cuál es dicho criterio? (Sugerencia: observar con detalle el segundo inciso de esta pregunta.)

vi) Dar un ejemplo de una funcional que se quiera optimizar, indicando cuál es el criterio según el cual se busca la optimización.

6. ¿De qué cambios específicos, al considerar el intervalo de tiempo en un problema de optimización dinámica, surgen las condiciones de transversalidad? Grafica los distintos casos.
   i) Dado el siguiente problema de cálculo de variaciones:

      Min $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt$, dado que $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, expresarlo como un problema de control.
   ii) Plantear sin resolver las soluciones del problema del inciso anterior.
7. En teoría de control:
   i) ¿Qué es una variable de estado y qué es una variable de control?
   ii) ¿Cómo puedes saber cuál es la variable de estado y cuál es la de control?
8. ¿Qué es lo que más se te ha dificultado para:
   i) Entender bien el concepto de funcional?
   ii) Resolver problemas de optimización con funcionales?
   iii) Determinar las condiciones de transversalidad?

9. ¿En general, qué conceptos del cálculo de variaciones o de la teoría de control te han costado más trabajo construir? ¿Por qué?
10. ¿Podrías construir a partir del concepto de funcional los conceptos que tienen que ver con los principios necesarios, suficientes y de transversalidad? ¿O simplemente, los conoces de memoria? ¿A qué crees que se debe esto?
11. ¿Qué sugerencias darías para mejorar la enseñanza de los conceptos que aparecen en cálculo de variaciones o teoría de control?

DATOS DE LOS AUTORES

José Campero
Instituto Tecnológico Autónomo de México;
CICATA, Instituto Politécnico Nacional, México
jose.campero@itam.mx

María Trigueros
Instituto Tecnológico Autónomo de México;
CICATA, Instituto Politécnico Nacional, México
trigue@itam.mx