Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía

Abraham Cuesta Borges, Jordi Deulofeu Piquet y Marco Antonio Méndez Salazar

Resumen: Se informa una investigación en el campo de la educación matemática relacionada con las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de licenciatura en Economía en la Universidad Veracruzana, México. El artículo toma como marco teórico las principales contribuciones de la línea de investigación conocida como Pensamiento Matemático Avanzado y sus conclusiones están en concordancia con las de estudios previos (Janvier, 1987; Leinhardt *et al.*, 1990; Azcárate, 1992; Artigue, 1995; Fabra y Deulofeu, 2000). Los autores identificaron dificultades en tareas de interpretación y construcción relacionadas con el concepto de función, estableciendo que la estructura cognitiva del estudiante está más asociada con algunas de las características de la función que con el propio concepto. El concepto de extremo es explicado por los estudiantes, en algunos casos, por la posición relativa de tal punto dentro de una localidad de valores y sobre la base de representaciones gráficas.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, dificultades, función, innovación didáctica.

Analysis of the process of learning of the function concepts and end of a function in economics students

Abstract: A research into the field of mathematical education, concerning the difficulties in the teaching-learning process of the concepts of function and extreme points of functions on Economics undergraduate students at the Universidad Veracruzana in Mexico, is reported. The paper takes as its theoretical framework the main contributions of the research program known as Advanced Mathematical Thinking, and its conclusions agree with those of previous studies (Janvier, 1987; Leinhardt *et al.*, 1990; Azcárate, 1992; Artigue, 1995; Fabra & Deulofeu, 2000).

Fecha de recepción: 23 de marzo de 2009.

The authors detect difficulties regarding interpretation and construction tasks related to the concept of function, then state that the student's cognitive structure is more related to some characteristics of the function than to the concept itself. The concept of extreme point of a function is explained by the students, in some cases, by means of the relative position of this point inside a neighborhood of values and on the basis of graphical representations.

Keywords: teaching, learning, difficulties, function, didactic innovation.

INTRODUCCIÓN

El artículo es un informe de investigación concerniente a la problemática que plantea el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de licenciatura en Economía de la Universidad Veracruzana, México. Desde esta perspectiva y con el objetivo de analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, se intenta conocer los conocimientos que se utilizan y las dificultades existentes al responder preguntas relacionadas con estos conceptos. Se evalúa el aprendizaje tanto de un grupo de estudiantes que tomó un primer curso de cálculo diferencial e integral (Cálculo I) como de otro grupo que, sin haber estudiado Cálculo I, únicamente estudia las ideas intuitivas sobre estos conceptos.

De este modo, en la primera fase del estudio se analizan dificultades en la comprensión de estos conceptos después del curso de Cálculo I; el sujeto de estudio es un grupo de 36 estudiantes y una muestra de 10 estudiantes del grupo para el estudio de casos. En la segunda fase se trabaja con otro grupo (48 estudiantes) y una muestra de 6 estudiantes del grupo para el estudio de casos; estos estudiantes, sin cursar Cálculo I, estudian las ideas intuitivas de estos conceptos mediante la aplicación de la innovación didáctica. El propósito es analizar el proceso de aprendizaje con un enfoque diferente de enseñanza, así como comparar los resultados con los mostrados por el primer grupo de estudiantes.

La investigación pudo corroborar la existencia de dificultades en tareas de interpretación y construcción del concepto de función, producidas por el efecto combinado de los significados que poseen los estudiantes sobre este concepto y del conocimiento que se tiene sobre los contextos en que se deben realizar dichas tareas.

MARCO TEÓRICO Y REFERENTES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación, dentro del tema funciones y gráficas, toma como referencia las principales aportaciones teóricas de la línea de investigación del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Un modelo importante dentro de esta línea de investigación es la propuesta de Tall y Vinner (1981) formulada para establecer la relación existente entre el concepto matemático y la representación interna. Se fundamenta en dos aspectos interconectados del concepto: la definición conceptual y el esquema conceptual.

Asumen como "definición conceptual" (*concept definition*) aquella secuencia de palabras que explica el concepto y cuya precisión varía desde las definiciones formales, aceptadas por la comunidad científica, hasta las definiciones personales que se utilizan para construir o reconstruir la definición formal. Tall y Vinner (1981) introducen el constructo "esquema conceptual" (*concept image*) para explicar algo que es recordado en nuestra memoria cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto.

> ...es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso de que tenga representaciones visuales o una colección de expresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria... Cuando escuchas la palabra "función", puedes evocar la expresión "$y = f(x)$", puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como: $y = x^2$ o $y = \text{sen } x$, $y = \ln x$, etcétera (Tall, 1991, p. 68).

Nos parece conveniente una precisión respecto a las ideas de Tall y Vinner (1981); de acuerdo con Azcárate (1995), el esquema conceptual (*concept image*) "describe la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático, y se define como el conjunto de todas las imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, diagrama, gráfica, etc.) del estudiante asociadas al concepto con todas las propiedades y procedimientos que lo caracterizan" (Azcárate, 1995, p. 55).

Las imágenes mentales sobre el concepto matemático, así como el proceso de su manipulación, están sustentadas en las experiencias previas (matemáticas o no) del estudiante. En efecto, y según Artigue (1990), la definición conceptual personal puede diferir de la definición conceptual formal aceptada por la comunidad matemática, o bien pudo ser aprendida de una manera memorística, es decir, que carece de un aprendizaje significativo. Así, muchas de las experiencias previas del estudiante tienen relación o se generan en el propio proceso de enseñanza, en el cual se presenta, en ocasiones, el conocimiento matemático como un producto final y refinado.

Como resultado, el estudiante asocia el concepto matemático sólo con las situaciones que le son conocidas en el proceso de instrucción; su experiencia personal se basa en lo "estudiado", o más bien "enseñado", sobre el concepto. La propia investigación en didáctica (Dreyfus y Eisenberg, 1982; Tall, 1989; Artigue, 1990; Leinhardt *et al.*, 1990) ha mostrado que algunas de las dificultades en el aprendizaje de los conceptos matemáticos son provocadas por un método tradicional de instrucción que enseña rutinas: "haz esto, luego esto, luego aquello..." (Dreyfus, 1991, p. 3) y que evalúa (Artigue, 1995) aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, convirtiendo lo evaluado en lo esencial para los estudiantes.

En el caso del concepto de función, se documenta que existe una amplia variedad de obstáculos y dificultades en el aprendizaje de los conceptos asociados a su estudio, especialmente en la etapa transitoria, desde una etapa inicial de comprensión, donde el concepto es concebido de una manera intuitiva o basado en la experiencia, a otra etapa, cuando el concepto se especifica mediante una definición formal a través de la deducción lógica.

Muchas de las dificultades se hallan en la articulación entre las diferentes maneras de representar el concepto; la idea de traducción (*translation task*) surge de los trabajos de Janvier (1978, 1987), en cuyo análisis se abordan las diferentes traducciones entre distintos tipos de representación (verbal, tabla, gráfica y expresión algebraica). También Leinhardt *et al.* (1990) señalan dificultades en dos tipos de tareas relacionadas con el lenguaje gráfico: de interpretación, en las que el alumno obtiene un significado (o información) o de construcción, en la cual debe generar una cosa nueva. Para Leinhardt *et al.* (1990), las dificultades en tareas de interpretación y construcción de gráficos tienen incidencia en el proceso de aprendizaje del concepto de función, hasta el punto de que pueden convertirse en un obstáculo para el alumno.

Para efectos de nuestra investigación, queremos destacar que muchas de las dificultades son provocadas por un sistema de enseñanza, desde la secundaria hasta la universidad, donde el aprendizaje consiste en un proceso ascendente de formalización matemática, en muchas ocasiones carente de significado. Nuestra realidad contradice la propia esencia de la enseñanza, tal y como la concibe Azcárate (1997): "el proceso de enseñanza-aprendizaje consiste, en gran parte, en ir compartiendo entre el profesor y los alumnos los esquemas conceptuales de las nociones matemáticas objeto de estudio. Por tanto, debemos cuidar los lenguajes verbal, gráfico, simbólico, gestual que contribuyen al desarrollo y enriquecimiento de dichos esquemas" (Azcárate, 1997, p. 29).

Por una parte, se hallan los propósitos establecidos por la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México. En el estudio, por ejemplo, de funciones en bachillerato:

> el estudiante aprenderá a relacionar magnitudes para modelar diversas situaciones de su entorno a partir de la idea de variabilidad y relación funcional de dos variables, que le resultará de utilidad para interpretar aspectos numéricos y lógicos de sus vivencias personales y de su realidad social [...] el estudiante desarrollará habilidades de comunicación al transitar por distintas formas de representación de las funciones, incluyendo representaciones tanto matemáticas (algebraicas: ecuaciones; numéricas: tablas; geométricas: gráficas), como no matemáticas (descripciones en lenguaje ordinario, orales o escritas) (SEP).

Por la otra, una práctica educativa caracterizada por la adquisición de conocimientos, casi siempre por transferencia del profesor, seguido del intento por resolver problemas y ejemplos rutinarios del libro de texto.

En la propia universidad, la enseñanza del Cálculo I ha resultado ser una actividad que inicia con el estudio de la teoría matemática de funciones y determinación de puntos extremos para culminar con supuestas aplicaciones a problemas rutinarios de la ciencia económica. Los estudiantes, con mucha dificultad, pueden llegar, como exige el programa de estudios de Cálculo I, al conocimiento del concepto de función que les permita posteriormente adquirir competencias para plantear y resolver problemas elementales de optimización en Economía. Este esquema de enseñanza, centrado en la exposición del profesor, puede tener como consecuencia que el estudiante no asimile la idea de todo el concepto, la cual le permitiría "organizar sus procesos mentales" (Tall, 1985, p. 3) y llegar a la construcción de significados (matemáticos o económicos).

METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló con dos grupos de estudiantes de la licenciatura en Economía. Al primer grupo, compuesto por 36 estudiantes (grupo 1) que cursaron y aprobaron el curso de Cálculo I, se le propuso una prueba escrita de preguntas relacionadas con el concepto de función. Un segundo instrumento consistió en una entrevista, realizada a una muestra de 10 estudiantes de este grupo (muestra 1), con la finalidad de conocer y profundizar en los argumentos que se utilizan en respuestas a las preguntas propuestas. Se trata de interpretar cuáles son las dificultades específicas a partir de los comentarios de los estudiantes.

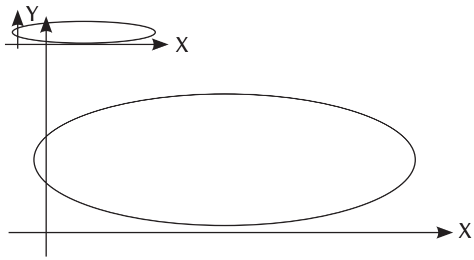
Para obtener información del grupo 2 (48 estudiantes que no han estudiado el curso tradicional de Cálculo I), primero se aplica la innovación didáctica: "Funciones, sus formas de representación y extremo de una función" (Cuesta, 2007, pp. 51- 63). Ésta consiste en un conjunto de actividades de enseñanza-aprendizaje, divididas en tres secuencias características de su comportamiento: (i) Lectura e interpretación de gráficas, (ii) Estudio de los fenómenos de cambio, y (iii) El concepto de función. Se pretende, con su aplicación, que los estudiantes:

- Se familiaricen con el conocimiento aportado por las gráficas, así como con el significado que poseen en cada situación estudiada.
- Comprendan, a partir del análisis de ejemplos de fenómenos de cambio, las ideas de variable y de dependencia funcional.
- Logren familiaridad con un conocimiento intuitivo y global del concepto de función a partir de los diferentes lenguajes en los que se puede representar este concepto: verbal, numérico (tablas), gráfico y algebraico.
- Se familiaricen con la idea intuitiva de puntos extremos de una función.

Por último, se propone a los estudiantes una prueba escrita; en ella, los estudiantes deben responder preguntas de cuyas respuestas se pueden conocer tanto los significados que se le confieren a los conceptos de función y extremos de una función, como las dificultades vinculadas a tareas de construcción o interpretación del concepto de función. Para el estudio de casos, se toma una muestra de seis estudiantes (muestra 2), con el objetivo de conocer los argumentos que se utilizan cuando responden las preguntas propuestas.

De este modo, la metodología utilizada en el estudio es cualitativa, de naturaleza exploratoria e interpretativa. Partiendo de las respuestas de ambos grupos, así como de los argumentos de sus respectivas muestras, se analizaron las dificultades de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. Para efectos de este trabajo, se toman en consideración sólo algunas de las preguntas planteadas a uno y otro. Las preguntas son:

1. *¿Qué es una función? Explica.*
2. *¿La figura representa la gráfica de alguna función numérica de una variable? Explica.*



3. *¿Qué entiendes por máximo relativo y por mínimo relativo de una función?*
4. *Problema:* Se presenta una situación en un contexto geométrico. El estudiante debe realizar la traslación entre las diferentes formas de representar la función: de la situación y dibujo a la tabla de valores, a la grafica y a la ecuación, para finalmente interpretar los resultados en el contexto geométrico inicial.

Para el grupo 1: *Un granjero dispone de 320 metros de valla para cercar un campo rectangular, en el cual poder resguardar su ganado. ¿Cómo debería usarse la valla para que el área encerrada sea tan grande como sea posible?*
Para el grupo 2: *La suma de dos lados adyacentes de un rectángulo es 15 cm. Se desea estudiar cómo varía el área del rectángulo cuando variamos la longitud de sus lados.*

a) Realiza una tabla de valores con los valores de un lado y los valores del área que se obtengan.

b) *¿Cómo se puede representar esta relación mediante una gráfica?*
c) *¿Es esta relación una función? ¿Cuáles son las variables?*
d) *Escribe una ecuación que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente.*

RESULTADOS

El análisis realizado se basa en el supuesto de que ambos grupos son homogéneos en cuanto al nivel de conocimientos que poseen al ingresar en los estudios universitarios; la diferencia fundamental entre grupos radica en los conocimientos adquiridos (dentro del curso de Cálculo I o mediante la innovación didáctica) de manera inmediatamente previa a la aplicación de ambas pruebas. Debemos destacar que el curso de Cálculo I se desarrolló durante un semestre (75 horas en total), mientras que a la innovación didáctica se le dedicaron únicamente 20 horas de clase. De este modo, es de suponer que las dificultades del proceso de aprendizaje de uno y otro entorno de enseñanza se manifiesten de manera directa en los resultados obtenidos en cada prueba.

En referencia con el concepto de función. Las respuestas escritas de ambos grupos, así como los argumentos durante las entrevistas de sus respectivas muestras, nos permitieron realizar una clasificación de respuestas a la pregunta: "*¿Qué es una función? Explica*". Dicha clasificación es:

- Regla. El estudiante reconoce, al menos, la existencia de una relación de dependencia entre dos variables, donde a cada valor de una variable le corresponde uno y sólo un valor de la otra variable. Ejemplo: "función es aquella que tiene dos variables, independiente y dependiente, y al valor del dominio le corresponde uno del contradominio".
- Regla inversa. Se asume, incorrectamente, que a cada valor de la variable dependiente le corresponde uno y sólo un valor de la variable independiente, es decir, se confunden los papeles de las variables dependiente e independiente. Ejemplo: "es cuando una variable dependiente depende de otra independiente y a cada valor de la dependiente le corresponde uno de la independiente".

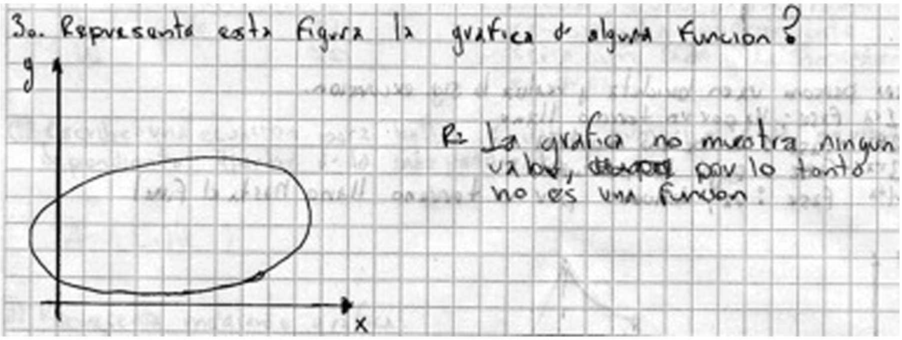
Cuadro 1 Repuestas a la pregunta *¿Qué es una función?*

Argumentos	Grupo 1	Muestra 1	Grupo 2	Muestra 2
Regla	1	1	7	4
Regla inversa	3	1	3	
Dependencia entre variables	8	3	16	
Relación entre valores	6		9	
Expresión matemática	10	5	9	2
Otra	8		4	
Total	36	10	48	6

- Dependencia entre variables. El estudiante únicamente hace mención de una relación de dependencia de una variable con respecto a la otra. Ejemplo: "función es aquella que tiene dos variables, una dependiente y otra independiente, una depende de la otra".
- Relación entre valores. No se hace mención de las variables, sino sólo de una relación entre valores o datos; en ocasiones se menciona un tipo de dependencia. Ejemplos: "es una relación entre un valor y otro" o "cuando tenemos dos datos que tienen relación, uno independiente y otro dependiente".
- Expresión matemática. Se expone que una función es una ecuación o representación algebraica que sirve para determinar o expresar algo; en ocasiones se reconoce la existencia de variables. Ejemplos: "representación algebraica que muestra referencia de una cosa x con otra cosa y" o "ecuación que existe cuando hay variable dependiente y otra independiente".
- Otra. El estudiante expresa algo que no se puede clasificar en ninguna de las anteriores y cuyo significado está muy alejado de aquéllas.

Los estudiantes de ambos grupos responden de diversa manera esta pregunta (véase el cuadro 1). Obsérvese un hecho interesante, la idea que poseen los estudiantes que han cursado Cálculo I resulta estar más alejada de la definición del concepto, comparada con las respuestas del grupo que estudia la innovación didáctica.

Figura 1 Respuesta de un estudiante del grupo 1



En algunos estudiantes de este grupo persiste la idea de asociar la función a una ecuación o representación algebraica, por ejemplo: “*no sé que es función, pero si lo escribo sí puedo identificar qué es una función*”. Unido a ello, en algunas respuestas se conciben las representaciones algebraica y gráfica como cosas independientes, ejemplo: “*función es una expresión algebraica que se le asigna un valor para hacer primero una gráfica*”.

Una dificultad adicional sobre el reconocimiento de la función se pone de manifiesto en la respuesta a la pregunta 2. Incluso aquellos estudiantes que hacen uso de la regla para responder la pregunta 1 no utilizan este conocimiento de manera flexible para explicar por qué la figura no representa una función. Sólo un estudiante, perteneciente al grupo 2, responde de manera correcta esta pregunta a partir de su idea sobre el concepto de función.

En la mayoría de los casos no se puede identificar la razón por la cual la gráfica no representa una función; surgen respuestas del tipo: “*no es una función porque a cada valor de uno de los ejes le tocan dos valores*” o “*sí es función, hubo un ciclo ya que a cada valor de* x *le toca uno de* y”. Para otros estudiantes, la respuesta depende incluso de que existan (se muestren) valores específicos (véase la figura 1).

En cambio, otras respuestas van asociadas a recuerdos inmediatos de lo estudiado en clases, por ejemplo: “*no sé si es una función, en clase manejamos varias, pero nunca este tipo de gráfica*”. Y en otras respuestas se manifiesta una interpretación icónica de la situación; el argumento está asociado a la fotografía literal, sin poder comprender o explicar el significado de los conceptos y expresiones, ejemplo: “*la* x *tiene dos alturas*”.

Cuadro 2 Repuestas a la pregunta *¿Qué entiendes por máximo (mínimo) relativo?*

Argumentos	Grupo 1	Muestra 1	Grupo 2	Muestra 2
Cambio de comportamiento	5	1	9	2
Valor en una localidad	6	2	21	3
Asociación con altura	18	4	12	1
Interpretación icónica	7	3	6	
Total	36	10	48	6

En referencia con el concepto de extremo relativo. Las respuestas se clasifican en:

- Cambio de comportamiento. Se explica el máximo (mínimo) a partir de la idea de que la función cambia su comportamiento. Ejemplo: "máximo es cuando la función crece y después decrece".
- Valor en una localidad. Se explica la existencia del máximo (mínimo) como un punto de la grafica tal que los valores a su izquierda y derecha son menores (mayores). Ejemplo: "mínimo es, dentro de un intervalo, el menor, y debe tener valores mayores antes y después".
- Asociación con altura. Se identifica la existencia de estos puntos con los valores más altos (o más bajos) de la gráfica. Ejemplo: "máximo es el valor más grande".
- Interpretación icónica. El estudiante señala estos puntos en la representación gráfica, pero no puede explicar o expresar la relación entre las variables.

El 69% de los estudiantes que cursaron Cálculo I (véase el cuadro 2) posee una idea distorsionada sobre el concepto de extremo local de una función. En algunos casos, se explica a través de la fotografía literal (lenguaje icónico) de la representación gráfica, es decir, señalan los puntos máximos y mínimos sin poder explicar por qué lo son. En otros casos, se identifica el valor máximo o mínimo con la idea de altura, es decir, se vincula la existencia del máximo de la función con el valor más alto y la del mínimo con el valor más bajo. Ejemplos de respuestas son: "*máximo es el valor más grande*", "*el máximo es el punto más alto que se obtenga en una determinada función*", "*mínimo es el valor más pequeño*".

En otros casos la explicación, aunque correcta, se apoya en el aspecto de tipo procedimental del concepto; ejemplo: "*de acuerdo con el cálculo, los máximos y mínimos son los términos que encontramos, utilizando el concepto de la primera y segunda derivada*".

En cambio, los estudiantes que no han estudiado Cálculo I poseen una idea intuitiva más cercana al concepto de extremo local de una función. En 62% de las respuestas se asocia la idea de puntos extremos a uno de dos significados: (i) un punto donde cambia el comportamiento de la función (ejemplo: "*a su izquierda crece y a su derecha decrece*") o (ii) un punto donde se halla el valor más alto (bajo) en cierta localidad de valores (ejemplo: "*el mínimo es el punto local más bajo, por izquierda y derecha son máximos al punto*").

En referencia con la tarea de construcción del concepto de función. En las tareas de construcción (Leinhardt *et al*., 1990) del concepto (problema) se ponen de manifiesto otras dificultades, causadas por el escaso nivel de conocimiento del contexto (geométrico) en que se desarrollan. Para 95% del grupo de estudiantes que cursó Cálculo I, resultó ser un grave conflicto plantear, de manera algebraica o tabular, la condición del problema. En primer lugar, porque se desconoce la relación existente entre las magnitudes (perímetro y área) de un rectángulo. Cabe mencionar que sólo un estudiante de la muestra 1 realiza un intento, inconcluso, por llegar a la solución mediante una tabla de valores a partir de la condición geométrica planteada.

Durante las entrevistas con la muestra 1, se pudo constatar la génesis de estas dificultades. Ante la pregunta "*¿Dónde se halla la dificultad?*" surgen respuestas como "*el problema dice que dispone de 320 metros, pero no dice cuánto tiene de largo ni de ancho*" o "*en que tengo que determinar el área más grande posible*". Los estudiantes tienen una idea confusa sobre el perímetro de un rectángulo y su relación con el área; sin embargo a la pregunta "*¿Cómo se determina el área de un rectángulo?*" todos responden de igual manera: "*con la fórmula* $A = bh$".

En el caso del grupo 2, sólo tres de los estudiantes pueden representar la función en las formas solicitadas (tabla, gráfica y expresión algebraica). La primera dificultad se halla en la imposibilidad de trasladar las ideas, expresadas en lenguaje geométrico, al lenguaje de funciones. Para muchos estudiantes, resulta un conflicto representar la tabla de valores solicitada, la gráfica y la ecuación algebraica a partir de la frase "*la suma de los lados adyacentes de un rectángulo es 15 cm*". En las entrevistas se pudieron identificar dos razones principales: (i) la incomprensión de la frase expresada en lenguaje matemático elemental, y (ii) la incomprensión del lenguaje algebraico en contexto geométrico.

Del proceso de análisis, se deriva un conjunto de dificultades que se puede sintetizar del siguiente modo:

- Interpretación icónica de una situación en contexto.
- Incomprensión de la relación de dependencia entre variables en contexto.
- Incomprensión del comportamiento de la función.
- Incomprensión del lenguaje algebraico en contexto geométrico.

En particular, el conocimiento que se tiene sobre los contextos geométrico y algebraico constituye un obstáculo en el proceso para concebir y construir las diferentes formas de representar una función. Para muchos estudiantes, resulta incomprensible incluso la expresión verbalmente planteada, causado, quizás, por un proceso de enseñanza-aprendizaje que se fundamenta en la reiteración de ejercicios rutinarios carentes de significado para los estudiantes.

CONCLUSIONES

Las conclusiones están condicionadas por las características del contexto en que se realiza este trabajo y por el enfoque metodológico de la investigación, que incluye la innovación didáctica. En consecuencia, se presentan conclusiones en dos apartados, respecto a cada uno de los conceptos analizados.

Respecto al concepto de función. El concepto de función es, en general, identificado por los estudiantes con la existencia de una relación de dependencia, pero no se comprende la regla que domina dicha relación; se ha constatado que muchos estudiantes no son capaces de establecer la relación entre las variables de la función. Por otra parte, algunos estudiantes son capaces de recitar la definición del concepto de función, pero fracasan en decidir si una gráfica representa o no una función. Por otra parte, la idea que se tiene sobre los conceptos de preimagen e imagen de la función causa confusión en la comprensión de la regla de la función.

Se encontró que el estudiante necesita recuerdos inmediatos o prototipos para responder una pregunta o para abordar la solución de un problema. La estructura cognitiva del estudiante está más asociada con algunas de las características de la función que con el propio concepto de función, especialmente cuando éstas se visualizan mediante la representación gráfica. Algunas dificultades tienen estrecha relación con la propia experiencia personal del estudiante, basado únicamente en lo estudiado en la clase, y no se desarrolla la capacidad de utilizar este concepto de una manera flexible en situaciones conocidas o problemas que formen parte de sus experiencias personales y conocimientos anteriores.

Las tareas de interpretación y construcción del concepto de función se ven afectadas por el efecto combinado de los significados sobre este concepto y del conocimiento que se tiene sobre los contextos en que se deben realizar dichas tareas. En el estudio se ha podido constatar que:

1. El nivel de conocimiento sobre el contexto geométrico es muy elemental; para muchos estudiantes resulta conflictiva la tarea de construir las diferentes formas de representación del concepto de función.
2. La mayoría de los estudiantes no tiene la habilidad para establecer la relación entre los diferentes sistemas de representación (modelos, diagramas, lenguaje hablado y símbolos escritos).
3. Muchos estudiantes se limitan únicamente a trabajar con la representación algebraica de la función.
4. Existe un nivel bajo de comprensión del lenguaje algebraico en el contexto geométrico.

Los estudiantes que cursaron Cálculo I, a diferencia de los que participaron en la innovación, poseen otras dificultades en la comprensión del concepto de función. Se ha observado que:

- No se comprende la relación entre las variables de la función.
- No se identifican el dominio y el codominio de la función ni tampoco la relación entre ellos.
- Se asume la propiedad de linealidad o de crecimiento constante como rasgo característico del comportamiento de una función.
- A pesar del énfasis en la representación algebraica de la función, se desconoce el propio significado de esta representación.

Respecto al concepto de máximo (mínimo) relativo de una función. El concepto de extremo se explica, en el mejor de los casos, considerando el cambio del comportamiento de la función o por su posición en una cierta localidad de valores. Pero en las respuestas, la imagen evocada es la visualización gráfica del concepto, en la cual el estudiante se siente más cómodo para expresar sus ideas. En muchas ocasiones el estudiante no hace referencia alguna al concepto de función ni a los cambios de comportamiento de una de sus variables con respecto a los cambios en la otra. Unido a ello, el estudiante no puede establecer la relación entre dos sistemas de representación del concepto: la representación gráfica y la descripción verbal.

Al comenzar los estudios, muchos estudiantes poseen un esquema conceptual que asocia los valores máximo y mínimo de una función con la idea de altura. Resulta interesante que esta concepción no varía sustancialmente después de haber estudiado, en el curso de Cálculo I, los conceptos de función y de extremo de una función. Se pudo constatar que las dificultades en el aprendizaje del concepto de extremo derivan del conocimiento que se tiene sobre el concepto de función, hasta el punto de que la propia definición de función constituye una dificultad en el aprendizaje de extremo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1990), "Épistémologie et didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, núms. 2/3, pp. 241-286.

——— (1995), "La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos", en M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 97-140.

Azcárate, C. (1992), "Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta", *Epsilon*, vol. 24, pp. 9-22.

——— (1995), "Sistemas de representación", *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 4, pp. 53-61.

——— (1997), "Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?", *Suma*, vol. 25, pp. 23-30.

Cuesta, A. (2007), *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía: análisis de una innovación educativa*, Tesis de doctorado, Bellaterra, Universidad Autónoma de Barcelona.

Dreyfus, T. (1991), "Advanced mathematical thinking processes", en D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 25-41.

Dreyfus, T. y T. Eisenberg (1982), "Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 13, núm. 5, pp. 360-380.

Fabra, M. y J. Deulofeu (2000), "Construcción de gráficos de funciones: continuidad y prototipos", *RELIME*, vol. 3, núm. 2, pp. 207-230.

Janvier, C. (1978), "The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations", Tesis doctoral inédita, University of Nottingham.

——— (1987), "Representation and understanding: The notion of function as an example", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Hillsdale, N. J, Lawrence Erlbaum, pp. 67-72.

Leinhardt, G., O. Zaslavsky y M. Stein (1990), "Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching", *Review of Educational Research*, vol. 60, núm. 1, pp. 1-64.

Secretaría de Educación Pública (SEP), *Fundamentación del programa de estudio de matemáticas IV de la Subsecretaría de Educación Media Superior*, obtenido el 18 de marzo de 2009 desde http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_4osem/Matematicas-IV.pdf.

Tall, D. (1985), "Understanding the calculus", *Mathematics Teaching*, vol. 110, pp. 49-53.

——— (1989), "New cognitive obstacles in a technological paradigm", en S. Wagner y C. Kieran (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Reston, Va., National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum, pp. 87-92.

——— (1991), *Advanced Mathematical Thinking*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y S. Vinner (1981), "Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 12, pp. 151-169.

DATOS DE LOS AUTORES

Abraham Cuesta Borges
Universidad Veracruzana, Facultad de Economía,
Xalapa, Veracruz, México
acuesta@uv.mx

Jordi Deulofeu Piquet
Departamento de Didáctica de las Matemáticas,
Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad Autónoma de Barcelona,
Campus de Bellaterra, Barcelona, España
jordi.Deulofeu@vab.cat

Marco Antonio Méndez Salazar
Universidad Veracruzana, Facultad de Economía,
Xalapa, Veracruz, México
marcomendez@uv.mx