Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio

Santiago Inzunsa Cazares y Martha Catalina Guzmán Reyes

Resumen: En el presente trabajo se presentan resultados de una investigación sobre los conocimientos y comprensión de la probabilidad que muestran profesores de secundaria mexicanos. En el estudio participaron 80 profesores de secundarias técnicas (con orientación tecnológica) a los que se les aplicó un cuestionario de 17 preguntas sobre los conceptos de probabilidad establecidos en el programa de matemáticas de secundaria. Los resultados señalan que la probabilidad es un área complicada para los profesores de secundaria; entre los conceptos de mayor dificultad sobresale la aplicación de la regla del producto de probabilidades en contexto de reemplazo, la regla de la suma de probabilidades en eventos no mutuamente excluyentes y la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial. Se observó, además, un razonamiento combinatorio muy endeble en la mayoría de los profesores y poca utilización de representaciones como diagramas de árbol y diagramas de Venn.

Palabras clave: probabilidad, formación de profesores, didáctica de la probabilidad, concepciones probabilísticas, paradigma de heurísticas y sesgos.

Understanding that high school teachers show on the concepts of probability: An exploratory study

Abstract: In this paper we present results of a research about knowledge and understanding of the probability that show Mexican secondary teachers. In the study participated 80 teachers of technical secondary department (technology-oriented) responding a questionnaire of 17 questions about probability concepts established in the secondary mathematics program. The results show that the probability is a complicated area for secondary teachers; among the most difficult concepts are the product of probabilities rule in context of replacement, the sum of probabilities rule to no mutually exclusive events and the interpretation of probabilities from a frequency approach. It was also observed a very weak com-

Fecha de recepción: 21 de abril de 2010.

binatorial reasoning in the majority of teachers and low use of representations as tree diagrams and Venn's diagrams.

Keywords: probability, teachers' education, pedagogy of probability, probability beliefs, heuristics and bias.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La sociedad actual requiere individuos que sean capaces de desarrollar competencias tales como analizar, comprender e interpretar información de diversos hechos que suceden a su alrededor, los cuales, con gran frecuencia, involucran alguna componente de incertidumbre. Por ejemplo, situaciones como los resultados de una encuesta para una elección, predicción del clima, juegos de azar, diagnósticos médicos, compra de una póliza de seguro o efectuar una inversión económica –por mencionar algunos casos– son situaciones inciertas que observamos diariamente y que, en general, involucran la toma de una decisión. Es decir, se requieren individuos matemáticamente competentes que aborden la incertidumbre desde una perspectiva matemática y científica y no meramente sobre la base de creencias y conjeturas; en el sentido de la OCDE (2004), "que sean capaces de identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo que los rodea, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos".

En relación con lo anterior, Batanero (2006, p. 1) subraya la importancia de un razonamiento correcto sobre el azar y la incertidumbre, así como las dificultades que implica desde el punto de vista de la enseñanza, y señala: "el azar es inherente a nuestras vidas y aparece en múltiples situaciones cotidianas o de la vida profesional, pero las intuiciones en probabilidad nos engañan con frecuencia y una enseñanza formal es insuficiente para superar los sesgos de razonamiento que pueden llevar a decisiones incorrectas". Sánchez (2009), por su parte, destaca que el aprendizaje de la probabilidad es esencial para ayudar a preparar a los estudiantes para la vida, ya que los fenómenos de azar y los eventos aleatorios están en los ámbitos que vivimos y permean nuestra vida privada y profesional.

Los sistemas educativos han sido receptivos a la importancia de la probabilidad para la formación de los estudiantes y, desde la última década del siglo pasado, se han realizado reformas a los currículos de matemáticas en diversos países (por ejemplo: NCTM, 1989, 2000; AEC, 1990) para incorporar contenidos de estadística y probabilidad desde los niveles de educación básica hasta el nivel universitario. En el caso de México, a partir de 1975 se reconoce la necesidad de brindar formación sobre probabilidad y estadística en la educación básica obligatoria (Ojeda, 2006) y aparece por primera vez en los programas de estudio bajo el título "Registros estadísticos y probabilidad". Desde entonces a la fecha, ha habido cambios en los contenidos, enfoques de enseñanza y propósitos de la probabilidad en secundaria. Por ejemplo, en el programa de 1975 se proponía: "que los alumnos apliquen las fórmulas de probabilidad clásica y se apoyen en la lógica y conjuntos para realizar los ejercicios y la resolución de problemas, comprobándolos mediante experimentos" (SEP, 1974, p. 125); mientras que en el programa de 2006 se establece: "que los alumnos anticipen resultados, realicen actividades de simulación y exploración de fenómenos aleatorios y expresen propiedades, como la independencia, la equiprobabilidad, la complementariedad..." (SEP, 2006, p. 9). El último propósito está acorde con propuestas que en los últimos años se han venido haciendo para la enseñanza de la probabilidad por diversas organizaciones e investigadores (por ejemplo: NCTM, 2000; Godino *et al.*, 1996; Inzunsa, 2001, 2005). En términos generales, los cambios más importantes en los contenidos de probabilidad del programa de matemáticas en secundaria de 1974 a 2006 tienen que ver con un cambio de ubicación de los temas del final de cada grado escolar a los bloques intermedios en que se divide el programa y con un cambio del enfoque centrado en una visión formalista de la probabilidad, apoyada en la teoría de conjuntos, por un enfoque más centrado en la resolución de problemas con exploración de fenómenos aleatorios.

Como puede verse, la probabilidad tiene más de 30 años en el currículo escolar de la escuela secundaria de México; sin embargo, como consecuencia en buena medida a la insuficiente formación de los docentes de educación básica en probabilidad, es frecuente que los profesores de matemáticas de este nivel se refieran a la probabilidad como el área que mayor dificultad les representa para impartirla, llegando muchas veces incluso a relegar su estudio. Lo anterior se refleja en los bajos resultados de las evaluaciones nacionales de sus alumnos, como es el caso del Examen ENLACE (Examen Nacional de logro Académico en Centros Escolares) y el Examen EXCALE (Examen de Calidad y Logro Educativo) que se aplican desde hace algunos años en el sistema mexicano de educación básica.

Un análisis del contenido de los exámenes ENLACE y EXCALE aplicados a los alumnos de tercero de secundaria en 2006, 2007 y 2008 nos permite observar que su contenido se enfoca principalmente en los ejes temáticos *forma, espacio y medida* y *sentido numérico y pensamiento algebraico,* mientras que los contenidos de probabilidad y estadística, que son parte del eje temático *manejo de la información,* son relegados en dichas evaluaciones. Por ejemplo, de 74 reactivos del examen ENLACE del año 2008, sólo 9 corresponden a conocimientos estocásticos (5 de probabilidad y 4 de estadística), mientras que, en el examen EXCALE del mismo año, sólo 8 reactivos de un total de 128 evalúan dichos conocimientos (5 de probabilidad y 3 de estadística). De lo cual se deduce que los contenidos de probabilidad y estadística son subestimados y relegados en las evaluaciones oficiales, aun cuando en el programa de estudios se declara como un eje de suma importancia en la formación de los estudiantes de secundaria.

Por otra parte, en cuanto a la distribución de los contenidos a lo largo de la educación secundaria, de un total de 540 sesiones de matemáticas, sólo 25 corresponden al tema de probabilidad. Además, como señala Sánchez (2009, p. 54), al analizar el programa de matemáticas de 2006, observamos que algunos conceptos importantes de probabilidad no aparecen explícitamente en el programa ni se sugieren actividades para ellos, tal es el caso de la noción frecuencial de la probabilidad, aleatoriedad, simetría, modelo de urna y probabilidad condicional.

En resumen, podemos advertir que hay múltiples factores que han incidido hasta ahora en la enseñanza de la probabilidad en secundaria para que los resultados obtenidos tanto por profesores como por estudiantes en las evaluaciones no sean satisfactorios. Entre dichos factores se pueden destacar los siguientes:

1. Los programas han sufrido un cambio radical en cuanto al enfoque de enseñanza de la probabilidad de 1975 a 2006 y los profesores no los han asimilado totalmente.
2. La formación de los profesores en probabilidad no es muy sólida y, por ello, tradicionalmente la han evadido o la imparten de una manera muy superficial.
3. Los programas de matemáticas tienen una orientación determinista y privilegian otras ramas de las matemáticas, lo que trae como consecuencia que se otorgue menos importancia a la probabilidad, tanto en el nivel de contenidos como en las evaluaciones nacionales.

Existe muy poca investigación en torno a los factores anteriores con profesores de secundaria mexicanos, razón por la cual en el presente trabajo nos hemos propuesto abordar una problemática relacionada con la naturaleza y conocimientos sobre probabilidad que tienen los profesores de secundaria acerca de los principales contenidos de probabilidad establecidos en el programa de matemáticas, con el propósito de identificar sus principales dificultades y desafíos para enfrentarse a los nuevos retos establecidos en la última reforma de los planes de estudio para la educación secundaria. La pregunta que nos hemos planteado y alrededor de la cual gira la presente investigación es *¿cuál es el nivel de comprensión y las principales dificultades que tienen los profesores sobre los contenidos de probabilidad del programa de estudios de matemáticas en secundaria?*

ANTECEDENTES

En los años recientes, la investigación en educación matemática ha prestado cada vez mayor atención a la formación de los profesores de matemáticas, sus prácticas en el aula, sus conocimientos, creencias y concepciones acerca de lo que significa enseñar matemáticas. Esto porque se ha identificado que son factores que tienen una influencia importante en las matemáticas que enseñan y, por ende, en las matemáticas que los alumnos aprenden. Al respecto, Even y Ball (2009, p. 2) señalan tres razones importantes que motivan un estudio sobre la formación profesional y conocimientos de los profesores de matemáticas:

1. Los profesores ocupan un papel central en el aprendizaje matemático de los estudiantes.
2. La formación profesional de los profesores es un elemento crucial en el esfuerzo para construir un sistema efectivo de educación matemática.
3. La formación de profesores es una empresa de grandes desafíos.

De acuerdo con Liljedahl (2009, p. 25) los estudios sobre conocimientos de los profesores a menudo ubican tres líneas de interés: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico y conocimiento didáctico. En el contexto de la educación matemática, el conocimiento de contenido contempla conceptos matemáticos, uso de técnicas matemáticas, razonamiento matemático, demostraciones, entre otros; el conocimiento pedagógico contempla principios generales de educación tales como teorías de aprendizaje y aspectos éticos de la educación; mientras que el conocimiento didáctico es el conocimiento relacionado con las condiciones y las maneras de enseñar y aprender matemáticas. En este mismo sentido, Novotná (2009, p. 13) señala: “aprender a enseñar matemáticas requiere un balance entre el conocimiento teórico y práctico de los profesores y habilidades que incluyen conocimientos de matemáticas, conocimientos de enseñanza de las matemáticas y conocimientos de psicología y pedagogía”.

En el caso particular de la probabilidad, un área que en los últimos años ha incrementado su presencia de manera importante en el currículo de matemáticas, sobre todo en el nivel preuniversitario, la investigación ha informado que la mayoría de los profesores tienen poca experiencia en el área (Godino, *et. al.*, 2008) y la consideran como uno de los tópicos más difíciles de enseñar, ya que el estudio de la probabilidad tiene características distintas que los profesores y estudiantes no encuentran en otras áreas de las matemáticas, lo cual incrementa los retos de su enseñanza y aprendizaje. Adicionalmente, muchos estudios han mostrado la existencia de diversas concepciones erróneas y sesgos probabilísticos por parte de personas adultas y estudiantes universitarios, de tal modo que, sin una preparación adecuada, los futuros profesores y profesores en servicio pueden depender de sus creencias e intuiciones y mostrar razonamientos y sesgos similares a los informados en estos estudios (Konold, 1991; Lecoutre, 1992; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982).

Al respecto, Jones (2005) identifica algunos desafíos que representan la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad que es necesario tener en cuenta:

1. La demanda cognitiva de tratar con la aleatoriedad en contraste con el pensamiento determinista de las otras ramas de las matemáticas.
2. El desafío de trabajar con múltiples concepciones de la probabilidad (clásica, frecuencial, subjetiva).
3. La tarea de identificar el conocimiento en probabilidad y disposiciones que podrían ser útiles para los estudiantes de varios niveles.
4. La tarea de interpretar la literatura de investigación en enseñanza y aprendizaje de la probabilidad de manera que proporcione orientaciones al profesor para el desarrollo de sus planes de clase.

Aunque diversos trabajos han contribuido a clarificar el conocimiento que requieren los profesores para la enseñanza de la probabilidad, la investigación sobre conocimientos pedagógicos y sobre dominio de contenidos de probabilidad de los profesores, así como sobre el conocimiento del aprendizaje de sus estudiantes, es todavía limitada; lo cual puede deberse al hecho de que la introducción de la probabilidad, especialmente en los niveles básicos, es relativamente nueva (Jones *et al.*, 2007). Sin embargo, dicha situación se ha empezado a revertir en los años recientes ante el reconocimiento de la importancia que representa una formación y actualización adecuadas de profesores de probabilidad y estadística en el mejoramiento de la educación estadística.

Es así como dos importantes organismos internacionales, que promueven la educación matemática y estadística, como son la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI, por sus siglas en inglés) y la Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE, por sus siglas en inglés) realizan un encuentro conjunto en 2008 en Monterrey, México, con el tema "educación estadística en la matemática escolar: desafíos para la enseñanza y la formación de profesores". En dicho evento se abordaron importantes tópicos, como la situación actual de la enseñanza de la estadística, creencias, actitudes y conocimientos de los profesores sobre la educación estadística, análisis de prácticas de enseñanza y cómo apoyar a los profesores para la enseñanza de la estadística, entre otros.

Diversos trabajos sobre formación de profesores subrayan el papel central que desempeña el profesor, sus creencias, actitudes y conocimientos en la enseñanza de una disciplina. En el caso particular de la estadística, Da Ponte (2008) señala que, para enseñar estadística, los profesores necesitan saber pensar estadísticamente, pero además necesitan saber sobre educación estadística, su lugar en el currículo, su relación con otras ciencias, además de su didáctica (materiales adecuados, tecnología, representaciones, métodos). Sedlmeier y Wassner (2008), por su parte, señalan que, dentro de las medidas necesarias para mejorar la educación estadística, es absolutamente necesario determinar el *statu quo* de la visión de los profesores sobre la estadística y las posibilidades que ellos ven para el mejoramiento de la educación estadística: "La educación estadística únicamente puede ser mejorada si los profesores son motivados a usar nuevos métodos y herramientas sugeridos por los investigadores". Una reflexión de Stohl (2005) parece muy indicada para complementar lo anterior:

> el éxito de cualquier currículo de probabilidad para desarrollar el pensamiento probabilístico de los estudiantes depende, en gran medida, de la comprensión de los profesores acerca de la probabilidad, además de una mayor comprensión de aspectos tales como las concepciones erróneas de los estudiantes y el uso de representaciones y herramientas (p. 351).

Stohl (2005), en una revisión de la literatura, identifica que hay mucha menos investigación sobre comprensión de la probabilidad por parte de profesores que por parte de estudiantes e identifica cuatro grandes categorías que, a su vez, nos servirán de marco para analizar algunas investigaciones que involucran a profesores de probabilidad de diferentes niveles:

1. Creencias de profesores y conocimiento sobre el contenido de probabilidad.
2. Comprensión de los profesores acerca de la comprensión de los estudiantes sobre probabilidad.
3. Implementación de actividades de probabilidad por parte de los profesores.
4. Uso de herramientas de simulación por parte de los profesores para su aprendizaje y enseñanza.

Creencias de profesores y conocimiento sobre el contenido de probabilidad

En un estudio sobre eventos independientes realizado por Sánchez (2000) con profesores de matemáticas mexicanos de preparatoria, se encontró que los profesores exhibieron diversas ideas confusas cuando se enfrentaron a tareas que involucran la independencia de eventos. Entre las principales dificultades encontradas se encuentra la falta de una distinción clara entre experiencias independientes y eventos independientes, creer que eventos independientes es sinónimo de eventos mutuamente excluyentes y la creencia de que sólo se puede aplicar el concepto de eventos independientes a sucesiones de experiencias. De acuerdo con Sánchez (2000), hay una desproporción entre la aparente sencillez del concepto de independencia (expresado por la regla del producto o por la fórmula de probabilidad condicional) y las dificultades para su aplicación correcta en diferentes contextos. En cierto modo, los profesores saben cuál es la definición operativa de los eventos independientes, pero no comprenden su significado.

También con profesores de preparatoria mexicanos, Inzunsa y Juárez (2007) realizaron un estudio sobre razonamiento estadístico, el cual involucraba diversas ideas de probabilidad en relación con los datos. Los resultados muestran un bajo nivel de razonamiento y diversos sesgos probabilísticos, a pesar de que, entre ellos, había profesores con experiencia en la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Mientras tanto, Begg y Edward (1999), al realizar una investigación con profesores en servicio y en formación, encontraron que los profesores mostraron una comprensión muy débil de la probabilidad. Estos mismos profesores mostraron un bajo nivel de confianza en su habilidad para enseñar probabilidad en comparación con la construcción de gráficas y cálculos estadísticos. Sobre estos mismos conceptos, Zaslavsky, Zaslavsky y Moore (2001) examinaron a 33 profesores sobre su conocimiento de independencia y eventos mutuamente excluyentes. De las nueve tareas que les fueron proporcionadas, 70% no pudo explicar cuáles ítems correspondían a eventos mutuamente excluyentes y casi la mitad no pudo proporcionar ejemplos de este concepto. Además, cerca de 70% de los profesores no pudo explicar cuándo eran independientes los eventos.

Comprensión de los profesores acerca de la comprensión de los estudiantes sobre probabilidad

En un amplio estudio realizado por Watson (2001) con profesores australianos de primaria y secundaria sobre conocimiento de contenido y didáctica de la probabilidad, se encontró que los profesores de secundaria tuvieron una confianza significativa mayor que los profesores de primaria para enseñar eventos igualmente probables, mediciones básicas de probabilidad y muestreo. Por su parte, Greer y Ritson (1994) realizaron un estudio con profesores de primaria y secundaria en Irlanda del Norte, la mayoría de los profesores consideró que la probabilidad era relativamente poco importante comparada con otros tópicos de matemáticas, además, más de 50% de los profesores señaló que rara vez utilizaban experimentos en su clase de probabilidad.

Un amplio conocimiento estadístico, aun cuando es esencial, no es suficiente para que los profesores puedan enseñar probabilidad. En esta idea, Batanero, Godino y Roa (2004) analizan las razones por las cuales la probabilidad resulta un tópico difícil de enseñar para los profesores de matemáticas y los contenidos necesarios en la preparación didáctica de los profesores para enseñar probabilidad. Basados en diversa literatura en educación matemática, identifican el “conocimiento didáctico” que requieren los profesores, el cual contempla los siguientes aspectos:

1. Reflexión epistemológica de los diferentes significados de la probabilidad.
2. Experiencia en adaptar el conocimiento a los diferentes niveles de enseñanza y a los diversos niveles de comprensión de los estudiantes.
3. Capacidad crítica para analizar libros de texto y documentos curriculares.
4. Predecir las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, errores, obstáculos y estrategias de resolución de problemas.
5. Capacidad para desarrollar y analizar diferentes tipos e instrumentos de evaluación e interpretar las respuestas de los estudiantes.
6. Experiencia con buenos ejemplos de situaciones de enseñanza, herramientas didácticas y materiales.

En su trabajo de investigación, Batanero, Godino y Roa (2004) utilizaron como sujetos de estudio a profesores de primaria y secundaria de España, con los cuales trabajaron dos actividades didácticas, una sobre percepción de la aleatoriedad y otra sobre estrategias para ganar un juego de probabilidad. Una importante conclusión es que el entrenamiento didáctico de los profesores debe mostrarles cómo realizar análisis didácticos similares a los que les fueron presentados. Este tipo de análisis debe ser el componente principal de los cursos de entrenamiento de profesores desde el punto de vista estocástico y didáctico.

Implementación de actividades de probabilidad por parte de los profesores

Haller (1997) observó las clases de probabilidad de cuatro profesores de secundaria en un programa que incluía experiencias con contenido probabilístico, concepciones erróneas y aspectos pedagógicos ligados a la enseñanza de la probabilidad. Las observaciones de Haller indican que los profesores que se encontraban en el espectro bajo de conocimientos de probabilidad mostraban errores y concepciones erróneas, dependían en gran medida de libros de texto y dejaban de lado oportunidades para fomentar las relaciones con fracciones, decimales y porcentajes en los cálculos de probabilidades. En contraste, los profesores que se encontraban en el espectro alto de conocimientos de probabilidad no cometían errores de contenido, ampliaban las lecciones de los libros de texto y explotaban las oportunidades para hacer conexiones entre probabilidad, decimales, fracciones y porcentajes. Haller observó que la experiencia de enseñanza no parece haber tenido un gran impacto en la enseñanza de los profesores.

Por su parte, Watson (2001), en un estudio que realizó, examinó la cognición de sus estudiantes (profesores de primaria y secundaria) y las dificultades que podrían experimentar con los datos y el azar. En su documentación sobre las dificultades, comenta que sólo 2 de 15 profesores de primaria mencionaron aspectos procedimentales como "encontrar probabilidades", mientras que 13 de 28 profesores de secundaria se refirieron a calcular probabilidades, permutaciones y diagramas de árbol. Se observó, así, que las respuestas, particularmente de los profesores de secundaria, sugieren que los enfoques procedimentales en la enseñanza tienden a dominar. Watson señala, además, que hubo pocas pruebas de que los profesores de secundaria usaran enfoques basados en actividades de simulación y muestreo para reforzar la teoría.

De acuerdo con los estudios analizados, los profesores tienen, en general, serias deficiencias en cuanto al dominio de contenido probabilístico, ya que, en la mayoría de los casos, no tomaron cursos de probabilidad durante su formación como profesores, o bien, como señala Da Ponte (2008), la formación de los profesores consistió en cursos y talleres que los llevan a un conocimiento más o menos estructurado de los conceptos estadísticos –una situación similar existe en México–. En cuanto al dominio didáctico, se requiere desarrollar maneras innovadoras de fomentar este aspecto en los profesores, ya que el conocimiento estadístico no basta, el trabajo de Batanero, Godino y Roa (2004) se ubica en esta dirección.

Uso que hacen los profesores de herramientas de simulación para su aprendizaje y enseñanza

El uso de simulación y experimentación, en complemento con otros enfoques de la probabilidad, se recomienda ampliamente en la enseñanza de la probabilidad (por ejemplo: Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Garuti, Orlandoni y Ricci, 2008). Sin embargo, no abundan los trabajos donde se informen resultados de enseñanza con estas herramientas. Además, el uso de simulaciones no está exento de dificultades y se requiere una planeación adecuada de actividades didácticas para aprovechar su potencial, tal como lo señalan Chaput, Girard y Henry (2008).

En esta dirección se encuentra el trabajo de Sánchez (2002), quien realiza un estudio con profesores mexicanos de preparatoria para conocer el potencial de un ambiente de simulación con el software Fathom. Después de diversas sesiones de trabajo, los profesores respondieron un cuestionario que recogía sus opiniones sobre diversos aspectos relacionados con la simulación como herramienta de enseñanza, tales como el papel de la simulación en la enseñanza, las etapas de una simulación, la complejidad de usar simulaciones y los conceptos más importantes que se podrían abordar con actividades de simulación. Los resultados señalan que los profesores son conscientes de ciertos aspectos del potencial, pero rechazan o subestiman otros que son muy importantes.

En la dirección de desarrollar materiales para la enseñanza de la probabilidad, Lee y Mojica (2008) desarrollan un proyecto para enseñar matemáticas con tecnología en el que se incluye un módulo para probabilidad y estadística. En una puesta a prueba de los materiales con profesores de secundaria, encuentran que, a pesar de que los profesores se comprometieron con las investigaciones estadísticas mediante simulaciones y experimentos de probabilidad, éstos dejaron de lado oportunidades para profundizar en su razonamiento y los esfuerzos de los profesores para utilizar probabilidad empírica no fomentaron una concepción de probabilidad como el límite de las frecuencias estabilizadas después de muchos ensayos. Las autoras concluyen que es necesario mucho más trabajo para que los profesores desarrollen conexiones entre la probabilidad y la estadística y prácticas útiles para el salón de clases. La formación de los profesores necesita incluir experiencias con auténticas actividades estadísticas, uso de herramientas de simulación y modelado.

El presente trabajo de investigación se ubica en la primera categoría definida por Stohl (2005), el cual corresponde a creencias de profesores y conocimientos sobre el contenido de probabilidad.

MARCO CONCEPTUAL

La naturaleza y complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad

La literatura en educación estadística registra diversos estudios que muestran la complejidad que representa el aprendizaje de la probabilidad en todos los niveles, lo cual ha motivado diversos llamados y esfuerzos para investigar y conocer mejor la problemática de su enseñanza y aprendizaje. Una de las razones que se ofrecen es que la probabilidad tiene una naturaleza contra la intuición que complica el razonamiento probabilístico, otra razón tiene que ver con la preparación inadecuada de los profesores en el tema.

Entre las recomendaciones y sugerencias que se proponen está iniciar el estudio de la probabilidad desde etapas tempranas como una medida para familiarizar a los niños con el azar y la incertidumbre (Langrall y Mooney, 2005; Watson, 2005); otras propuestas consisten en que la enseñanza de la probabilidad haga explícitas las conexiones entre las nociones teóricas y experimentales mediante el uso de los diversos enfoques de la probabilidad (Fischbein y Gazit, 1984), usar tecnología para construir modelos y explorar situaciones aleatorias (Pratt, 2005; Franklin, *et al.*, 2005), y preparar mejor a los profesores para el conocimiento de la pedagogía y el contenido de la probabilidad (Da Ponte, 2008; Kvantinsky y Even, 2002).

Respecto del último aspecto, muchos profesores, como consecuencia de su formación profesional y por la influencia de diversos libros de texto, tienen una orientación a enseñar la probabilidad en los niveles preuniversitarios enfocada en cálculos y fórmulas, asumiendo con ello que la probabilidad consiste en usar procedimientos para determinar probabilidades teóricas, en lugar de considerar aplicaciones del mundo real y la comprensión de conceptos, y fomentar el razonamiento probabilístico.

Diversos educadores estadísticos sugieren que la enseñanza de la probabilidad debe contemplar los diversos enfoques de la probabilidad como una medida para ayudar a los estudiantes a comprender mejor sus diversas aplicaciones, desarrollar intuiciones adecuadas y mejorar el razonamiento probabilístico. Sin embargo, muchos profesores tienen preferencia por el enfoque clásico de la probabilidad, en cuanto que está más ligado a la visión determinista de las matemáticas, y desconfían de los resultados aproximados que se obtienen al realizar o simular una serie de ensayos de un experimento aleatorio. Esto último como consecuencia de una inadecuada comprensión de la ley de los grandes números, que establece que la diferencia entre la probabilidad empírica y la teórica tiende a cero conforme se incrementan los ensayos de un experimento aleatorio. Sin embargo, debido a las fluctuaciones de las frecuencias, puede ocurrir –aunque es poco probable– que se obtenga una probabilidad empírica sustancialmente distinta de una probabilidad teórica, aun después de una larga secuencia de ensayos; de esta manera, profesores que no comprenden esta ley pueden conducir a sus estudiantes a esperar una convergencia total en la probabilidad empírica en una serie larga de ensayos e, incluso en algunos casos, esperan que esta convergencia debe darse en pocos ensayos.

El enfoque clásico requiere el cumplimiento de equiprobabilidad en los eventos y un espacio muestral finito, lo que obliga a que el profesor reduzca el campo de aplicaciones a problemas de juegos de azar y otros que no están muy apegados a situaciones de la vida real; además, requiere el domino de técnicas combinatorias que dificultan a los estudiantes ir más allá de problemas simples; de esta manera, un profesor que centra su enseñanza en este enfoque crea a los estudiantes una visión parcial de las aplicaciones de la probabilidad.

Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico

Investigaciones realizadas por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) han puesto de manifiesto diversas dificultades que presentan las personas cuando razonan acerca de situaciones donde interviene la incertidumbre. La explicación de estos autores es que las personas con poco o ningún conocimiento de probabilidad estiman la probabilidad de un evento mediante ciertos juicios heurísticos. La aplicación de heurísticas consiste en simplificar el problema pasando por alto información que puede ser relevante para su solución, razón por la cual a menudo conducen a sesgos o errores. De esta manera, las heurísticas son procesos mentales que reducen la complejidad de un problema y los hacen accesible a quien resuelve el problema y, aunque conducen a una solución inmediata, no garantizan que la solución sea correcta.

Kahneman, Slovic y Tversky (1982) han identificado tres tipos principales de heurísticas, entre la cuales destaca la *heurística de representatividad,* por la diversidad de sesgos que se generan a partir de ella. Esta heurística consiste en evaluar la probabilidad de un evento sobre la base de la representatividad de éste respecto de la población de la cual proviene. Las personas que hacen uso de este tipo de razonamiento consideran que la muestra debe reflejar las propiedades de la población; si bien esto debe ser cierto para una muestra de tamaño grande, no necesariamente lo será para una muestra de tamaño pequeño. Se crea así un sesgo conocido como *insensibilidad al tamaño de muestra* que consiste en tener una excesiva confianza en muestras pequeñas. Otro sesgo que se introduce en el uso de esta heurística tiene que ver con la representación que los estudiantes tienen sobre secuencias aleatorias. Es común que el estudiante crea que, después de una racha de un mismo resultado, digamos águilas al lanzar una moneda, debe seguir otra racha de soles para compensar y lograr la simetría. Este tipo de sesgo ha sido llamado *recencia negativa o falacia del jugador,* y consiste en esperar intuitivamente que en una serie de juegos aumente la probabilidad del resultado contrario. Personas con este razonamiento pasan por alto la independencia de los ensayos.

Otro sesgo importante registrado en la literatura y que es frecuente en los alumnos es el *sesgo de equiprobabilidad.* Lecoutre (1992), en un estudio sobre razonamiento probabilístico, encontró que los estudiantes aplicaban el principio de equiprobabilidad en situaciones donde no era factible su uso. En la enseñanza, este sesgo traería como consecuencia un uso abusivo de la regla de Laplace y dificultad para poder identificar las situaciones en las que no es aplicable el principio de equiprobabilidad.

Konold (1991), por su parte, en un estudio con estudiantes universitarios sobre la manera como interpretaban un enunciado probabilístico expresado en forma frecuencial, encontró que, ante una pregunta en la que se pedía la probabilidad de un evento, ésta era interpretada como tener que predecir si el evento en cuestión ocurriría en el siguiente experimento. Los estudiantes buscaban explicaciones causales en lugar de aleatorias a la ocurrencia de resultados inesperados, ignorando la información de tipo frecuencial proporcionada. Estos alumnos presentan un sesgo conocido como *enfoque en el resultado aislado* y consideran que cada una de las repeticiones de un experimento aleatorio no tiene por qué guardar relación con las anteriores o posteriores, es decir, no ven los resultados como una secuencia.

En resumen, profesores que no tienen una sólida comprensión de los conceptos probabilísticos ni una visión completa de lo que representa el campo de la probabilidad difícilmente podrán enseñar probabilidad de manera adecuada.

El conocimiento de probabilidad necesario para la enseñanza

Even y Kvatinsky (2010) proponen un conjunto de cinco aspectos relacionados con los conocimientos que los profesores deben tener sobre probabilidad para una enseñanza adecuada, los cuales nos servirán de marco para el análisis e interpretación de los conocimientos de los profesores:

1. *Las características esenciales y la fortaleza de la probabilidad.*
   Es necesario que los profesores conozcan las características esenciales de la probabilidad como campo no determinístico que lo hace diferente de otros campos de las matemáticas, además de que se comprenda que el estudio de la probabilidad puede ser abordado desde distintos enfoques. Los profesores deben reconocer la importancia que tiene la probabilidad para resolver problemas de incertidumbre y azar que pueden ocurrir en cualquier campo de la actividad humana.
2. *Diferentes representaciones y modelos*
   El trabajo en probabilidad requiere el uso de diferentes representaciones y modelos, tales como diagramas de Venn, diagramas de árbol, tablas y fórmulas para calcular e interpretar probabilidades. La familiaridad y el manejo adecuado de las diferentes representaciones y modelos, así como la habilidad para pasar de una representación, son una herramienta poderosa para el profesor y lo ayudan a comprender mejor la probabilidad.
3. *Uso de enfoques alternativos de la probabilidad*
   Los profesores deben estar familiarizados con los principales enfoques de la probabilidad (clásico, frecuencial y subjetivo), sus usos y elecciones adecuadas para determinados problemas.

4. *Repertorio básico de ejemplos*
   Como parte del conocimiento de probabilidad que el profesor debe tener está contar con un repertorio de ejemplos importantes de fácil acceso que le permitan ilustrar ideas, conceptos, teoremas y propiedades importantes.
5. *La naturaleza de la teoría de la probabilidad*
   Los profesores deben saber que el conocimiento matemático está interrelacionado con el conocimiento de la probabilidad y que el primero apoya al segundo (por ejemplo, axiomas y teoremas de probabilidad tales como probabilidades de un espacio muestral, la ley de los grandes números como el límite de una probabilidad).

Adicionalmente, Heitele (1975) sugiere un conjunto de ideas estocásticas que son fundamentales en el currículo de probabilidad y que deben ser abordados en diferentes niveles de formalización en los diversos niveles educativos, iniciando desde la educación básica. Dichos conceptos deben ser parte del bagaje de conocimientos que los profesores de secundaria deben tener y la mayor parte de ellos se han tenido en cuenta para nuestro análisis del conocimiento de los profesores: experimentos aleatorios, eventos y espacio muestral, regla de la adición de probabilidades, independencia y probabilidad condicional, equidistribución de la probabilidad, combinatoria, variables aleatorias, ley de los grandes números, muestreo, modelado y simulación.

METODOLOGÍA

Sujetos de estudio y contexto de la investigación

El presente estudio se llevó a cabo con 80 profesores mexicanos en ejercicio en el sistema de secundarias técnicas del estado de Sinaloa, de los cuales, 85% tenía estudios relacionados con docencia de las matemáticas (licenciatura y normal superior) y el otro 15% contaba con una carrera universitaria en áreas como administración de empresas, ingeniería civil, ingeniería electrónica, contador público e ingeniería química. Los profesores se encontraban participando en un curso sobre uso de un software de geometría dinámica que era impartido por uno de los autores y en el cual se les pidió su colaboración para participar en la investigación. El promedio de experiencia docente de los profesores era de 18 años con rango de 2 a 37 años.

Cuadro I Contenidos de probabilidad contemplados en el eje de Manejo de la información del programa de matemáticas (SEP, 2006)

SECUNDARIA		
1º	2º	3º
Espacio muestral. Estimación de probabilidades. Probabilidad clásica. Comparación de probabilidades. Juegos equitativos o no equitativos.	Cálculo de la probabilidad de eventos independientes. Cálculo de eventos mutuamente excluyentes.	Simulación: urnas de Bernoulli.

Criterios para el diseño del cuestionario

Con el propósito de que el cuestionario para evaluar los conocimientos de los profesores tuviera validez de contenido, consideramos el contenido de probabilidad del programa de matemáticas y los objetivos en términos de conocimientos y habilidades que el estudiante debe desarrollar a lo largo del curso (véanse los cuadros I y II); con ello buscamos identificar, además, los desafíos que el nuevo programa representa para los profesores. El cuestionario contemplaba 11 preguntas de opción múltiple y 6 preguntas de respuesta abierta, una de las cuales tenía, a su vez, cuatro incisos (véase anexo). La mayoría de las preguntas fueron tomadas de la literatura y algunas fueron diseñadas por los autores para la investigación.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Se analizaron las respuestas de los profesores a los diferentes ítems y se elaboró el cuadro III con el porcentaje de respuestas correctas para cada uno de ellos, teniendo en cuenta, además, la clasificación temática del cuadro II. El cuadro III permitió identificar y clasificar los ítems por nivel de dificultad en tres categorías (baja, media y alta). Adicionalmente, se consideraron algunos aspectos del conocimiento de probabilidad para la enseñanza definidos por Even y Kvatinsky (2010) para el análisis e interpretación de los resultados.

Cuadro II Relación entre ítems de cuestionario y contenidos de probabilidad

Tema	Número de ítem	Propósito
Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades.	1, 12	Identificar propiedades de secuencias aleatorias y heurística de representatividad.
Regla del producto de probabilidades.	2, 5, 6, 11, 13	Identificar variables de tarea y estrategias de resolución.
Regla de la adición de probabilidades.	10, 14	Identificar intersección de eventos y exclusión, y estrategias de resolución.
Interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial.	3, 7, 9	Identificar variabilidad y estabilidad de las frecuencias de resultados de un experimento aleatorio.
Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades.	4, 13, 16, 17	Identificar razonamiento combinatorio y uso de representaciones gráficas.
Simulación mediante urnas de Bernoulli.	8	Identificar parámetros para simulación.
Juegos equitativos y no equitativos	13	Identificar condiciones de un juego equitativo y equiprobabilidad.
Introducción a la probabilidad condicional.	15	Identificar razonamiento con eventos condicionantes y condicionados.

Clasificación de los ítems por grado de dificultad

Sobre la base de los resultados anteriores y apoyándonos en el cuadro II, podemos definir tres niveles en el grado de dificultad que exhibieron los profesores al responder los ítems del cuestionario:

- Nivel alto de dificultad (menos de 40% de respuestas correctas)
  En esta categoría se ubican los ítems 6, 7 y 11, los cuales corresponden a la regla del producto de probabilidades (una sola urna con reemplazo

Cuadro III Porcentajes de respuestas correctas de los ítems del cuestionario por categoría temática

Núm. de ítem	Categoría temática	Resultados	
		Respuestas correctas	Porcentaje
1	Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedade.s	42	52%
2	Regla del producto de probabilidades.	46	58%
3	Enfoque frecuencial de la probabilidad.	57	71%
4	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades.	42	53%
5	Regla del producto de probabilidades.	41	51%
6	Regla del producto de probabilidades.	24	30%
7	Enfoque frecuencial de la probabilidad.	19	24%
8	Simulación mediante urnas de Bernoulli.	39	49%
9	Enfoque frecuencial de la probabilidad.	41	51%
10a	Cálculo de probabilidades.	38	48%
10b	Regla de la adición de probabilidades.	14	18%
10c	La probabilidad de un evento complementario.	56	70%
10d	Regla de la adición de probabilidades.	51	64%
11	Regla del producto de probabilidades.	27	34%
12	Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades.	15	15%
13	Juegos equitativos, razonamiento combinatorio, regla del producto de probabilidades.	25	31%
14	Regla de la adición de probabilidades.	24	30%
15	Introducción a la probabilidad condicional.	50	63%
16	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades.	18	23%
17	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades.	36	45%

en contexto de poblaciones con porcentajes como probabilidades) e interpretación de probabilidades mediante frecuencias representadas en gráficas. Por su parte, los ítems de respuesta abierta, 10b, 11, 12, 13, 14 y 16, los cuales corresponden a la regla de la suma de probabilidades con intersección, identificación de propiedades de secuencias aleatorias y razonamiento combinatorio también resultaron difíciles para la mayoría de los profesores.

- Nivel medio de dificultad (entre 40% y 60% de respuestas correctas)
  En esta categoría se ubican los ítems 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10a y 17, los cuales corresponden a propiedades de secuencias aleatorias, regla del producto de probabilidades en contexto de urnas separadas, simulación con modelo de urnas, razonamiento combinatorio y enfoque frecuencial de la probabilidad.
- Nivel bajo de dificultad (más de 60% de respuestas correctas)
  En esta categoría se ubica únicamente el ítem 3, el cual corresponde a la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial en un contexto no gráfico. En los ítems de respuesta abierta 10c, 10d y 15, los cuales corresponden a la probabilidad de un evento complementario, regla de la suma de las probabilidades (sin intersección), introducción a la probabilidad condicional.

Representaciones y modelos

Las representaciones y modelos, son de suma importancia en el estudio de la probabilidad, al igual que en cualquier otra rama de las matemáticas, por lo que el profesor requiere un manejo adecuado y variado de representaciones que ayuden a identificar espacios muestrales y patrones en los resultados de un fenómeno aleatorio. Los modelos permiten expresar axiomas, propiedades y teoremas importantes de la probabilidad con los cuales es posible calcular probabilidades de eventos o variables aleatorias. Sin embargo, los resultados muestran que los profesores utilizaron pocas representaciones, como diagramas de árbol, diagramas de Venn, tablas y fórmulas en el cálculo de probabilidades, y en algunos de los casos en los que sí se utilizaron, se observaron inconsistencias en su construcción, lo cual les hubiera permitido visualizar espacios muestrales, eventos favorables y frecuencias de resultados y, con ello, depender menos de estrategias heurísticas y creencias intuitivas.

Por mencionar un ejemplo, en el ítem 1, si los profesores hubieran aplicado el modelo del producto de probabilidades para eventos independientes o usado representaciones como un diagrama de árbol para identificar los posibles resultados, se habría determinado que la probabilidad de cada secuencia era de $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; en cambio, utilizaron la heurística de representatividad y juzgaron la probabilidad de una muestra por la similitud con la población de la que cual proviene, lo cual es cierto para muestras grandes, pero no necesariamente para muestras pequeñas como las que se presentaron en los incisos del ítem. Asimismo, en ítems que requerían la aplicación de la regla de la adición de probabilidades, el uso de diagramas de Venn hubiera sido una representación muy valiosa para identificar la intersección y así evitar errores como el de no restar las probabilidades de la intersección en el momento de aplicar la regla de la adición.

Enfoques alternativos de la probabilidad

El conocimiento sobre el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad se exploró a través de diversos ítems del cuestionario. En el caso del enfoque frecuencial, a excepción del ítem 3 que resultó sencillo dado el contexto en que se presentó, los resultados muestran que los profesores tuvieron dificultades para interpretar probabilidades por medio de frecuencias y el efecto que tiene sobre ellas el tamaño de la muestra o número de repeticiones; incluso, muchos profesores no respondieron algunos ítems, lo que evidencia el desconocimiento sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad; en general, se puede ver que no se aprecia correctamente la variabilidad a la que se encuentran sujetas las frecuencias cuando se tienen pocas observaciones y se incurre en el sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra.

En el caso de enfoque clásico, la principal dificultad que se tuvo para calcular probabilidades tiene que ver con el poco dominio de técnicas combinatorias y la falta de representaciones para identificar espacios muestrales y eventos favorables. Se observó, además, una aplicación errónea de la fórmula clásica en problemas de eventos independientes que implicaban el uso de la regla del producto al no hacer distinción de los eventos y considerarlos como uno solo. Con ello, se pasó por alto que los eventos en cuestión tenían diferentes probabilidades, ya que provenían de diferentes urnas con distinto contenido. El enfoque subjetivo no fue explorado en el cuestionario que se aplicó a los sujetos de estudio.

Cuadro IV Estrategias utilizadas en los ítems de la regla del producto de probabilidades

Ítem	Estrategia multiplicativa	Estrategia aditiva	Fórmula clásica
2	58%	21%	19%
5	51%	31%	13%
6	30%	34%	29%
11	34%	29%	16%

La naturaleza de la teoría de la probabilidad

El conocimiento matemático de los profesores que apoya su conocimiento sobre probabilidad presenta diversas limitaciones según los resultados del cuestionario. El razonamiento combinatorio necesario para calcular probabilidades desde el enfoque clásico mostró ser muy superficial al incurrir en diversos errores de identificación del espacio muestral y la falta de uso de representaciones adecuadas. Un ejemplo de ello es el ítem 13, que a simple vista parece un juego justo, ya que en ambos casos existe la misma probabilidad de que la aguja caiga en el área sombreada; sin embargo, la enumeración del espacio muestral permite ver que el juego tiene cuatro posibles resultados, de los cuales sólo uno es favorable; este mismo ítem pudo ser resuelto con la regla del producto de probabilidades.

A su vez, se observa un simbolismo limitado para diversos conceptos de probabilidad y un uso de estrategias equivocadas para resolver problemas, como la regla del producto para eventos independientes, como es el caso de una estrategia aditiva donde se suman probabilidades en lugar de multiplicarlas y la aplicación de la fórmula clásica de la probabilidad de manera incorrecta. El uso de estas estrategias se muestra en el cuadro IV.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio señalan que la probabilidad es un área complicada para los profesores de secundaria, ya que únicamente en cuatro ítems tuvieron porcentajes de respuestas correctas superiores a 60%. Entre los conceptos de mayor dificultad sobresale la aplicación de la regla del producto de probabilidades en contexto de reemplazo, la regla de la suma de probabilidades en eventos no mutuamente excluyentes y la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial. En la mayoría de los profesores, se observó, además, un conocimiento matemático y un razonamiento combinatorio endeble para apoyar el conocimiento de probabilidad y poco uso y dominio de representaciones como diagramas de árbol y diagramas de Venn; lo cual condujo a los profesores a utilizar estrate-gias heurísticas y razonamientos intuitivos que derivaron en algunos sesgos, como la insensibilidad al tamaño de la muestra al interpretar resultados de secuencias aleatorias.

De acuerdo con lo anterior, la enseñanza de la probabilidad implica diversos retos que los profesores de secundaria deben enfrentar para ayudar a los alumnos a ser matemáticamente competentes en el estudio de la incertidumbre, pues como señala Stohl (2005), el éxito de cualquier currículo de probabilidad para desarrollar el pensamiento probabilístico de los estudiantes depende, en gran medida, de la comprensión que los profesores tienen de la probabilidad. De esta manera, un programa de formación o actualización de profesores de probabilidad debe atender diversos aspectos como los que señalan Even y Kvatinsky (2010): que los profesores tengan claridad en cuanto a las características esenciales que distinguen a la probabilidad de otros campos de las matemáticas; comprendan que la probabilidad puede ser vista desde distintos enfoques y conozcan sus fortalezas, limitaciones y espacios de aplicación, y adquieran un dominio profundo de la diversidad de representaciones, axiomas y propiedades que ayudan al cálculo y al razonamiento probabilístico. Adicionalmente, el uso de la tecnología puede contribuir a que los profesores desarrollen habilidades para construir modelos probabilísticos y explorar situaciones aleatorias que permitan conectar el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad, situación muy sugerida en la literatura de educación estadística.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AEC (1990), *A National Statement on Mathematics for Australian Schools*, Carlton Victoria, Australia, Australian Education Council, Curriculum Corporation.

Batanero, C. (2006), "Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo", en P. Flores y J Lupiañez (eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar*, Sociedad de Educación Matemática Thales. Disponible en http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm.

Batanero, C., J. Godino y R. Roa (2004), "Training teachers to teach probability", *Journal of Statistics Education*, vol. 12, núm. 1. Disponible en http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html.

Batanero, C., M. Henry y B. Parzysz (2005), "The nature of chance and probability", en G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*, Springer Science+Business Media, pp. 15-37.

Begg, A. y R. Edwards (1999), "Teacher's ideas about teaching statistics", ponencia presentada en la reunión anual conjunta de la Australian Association for Research in Education y la New Zealand Association for Research in Education, Melbourne, Australia.

Chaput, B., J. C. Girard y M. Henry (2008), "Modeling and simulations in statistics education", en C. Batanero, G. Burrill y Ch. Reading (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*, Joint ICMI/IASE Study, Monterrey, México.

Da Ponte, J. P. (2008), "Preparing teachers to meet the challenges of statistics education", en C. Batanero, G. Burrill y Ch. Reading (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*, Joint ICMI/IASE Study, Monterrey, México.

Even, R. y D. L. Ball (2009), "Setting the stage for the ICMI study on the professional education and development of teachers of mathematics", en R. Even y D. L. Ball (eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, Springer Science+Business Media, pp. 1-9.

Even, R. y T. Kvatinsky (2010), "What mathematics do teachers with contrasting teaching approaches address in probability lessons?", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 74, Springer, pp. 207-222.

Fischbein, E. y A. Gazit (1984), "Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 15, Springer, pp. 1-24.

Franklin, C., G. Kader, D. Mewborn, J. Moreno, R. Peck, M. Perry *et al.* (2005), *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework*, Alexandria, VA, American Statistical Association.

Garfield, J. y D. Ben-Zvi (2008), "Creating Statistical Reasoning Environments", en J. B. Garfield y D. Ben-Zvi (eds.), "Developing Students' Statistical Reasoning", Springer Science+Business Media, pp. 91-114.

Garuti, R., A. Orlandoni y R. Ricci (2008), "Which probability we have to meet...? A case study about statistical and classical approach to probability in student's behavior", en C. Batanero, G. Burrill y Ch. Reading (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference,* Joint ICMI/IASE Study, Monterrey, México.

Godino, J., C. Batanero y M. Cañizares (1996), *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares,* Madrid, Editorial Síntesis.

Godino, J., C. Batanero, R. Roa y M. Wilhelmi (2008), "Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work", en C. Batanero, G. Burrill y Ch. Reading (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference,* Joint ICMI/IASE Study, Monterrey, México.

Green, D. R. (1983), "A survey of probability concepts in 3 000 pupils aged 11-16 years", en D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G. M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics,* University of Sheffield.

Greer, B. y R. Ritson (1994), "Readiness of teachers in Northern Ireland to teach data handling", ponencia presentada en la Fourth International Conference on Teaching Statistics, Marruecos.

Haller, S. K. (1997), "Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers", Tesis de doctorado inédita, University of Minessota.

Heitele, D. (1975), "An epistemological view on fundamental stochastic ideas", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 6, pp. 187-205.

Inzunsa, S. (2001), "Una propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad en el bachillerato basada en el enfoque frecuencial y simulación computacional", Tesis de Maestría inédita, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México

——— (2005), "Probabilidad experimental en el nivel medio superior", en *Memorias de la Primera Reunión de Análisis: la actividad experimental en el aprendizaje de las ciencias naturales y exactas,* Centro de Ciencias de Sinaloa, Culiacán, Sinaloa.

Inzunsa, S. y J. A. Juárez (2007), "Evaluación de cultura y razonamiento estadístico: un estudio con profesores de preparatoria", XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Querétaro, México.

Jones, G. A. (2005), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* Springer Science+Business Media.

Jones, G., C. W. Langrall y E. S. Mooney (2007), "Research in probability:

Responding to classroom realities", en F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Reston VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Kvatinsky, T. y R. Even (2002), "Framework for teacher knowledge and understanding about probability", en *Proceedings of Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*, Hawthorn, VIC, International Statistical Institute.

Kahneman, D., P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, Nueva York, Cambridge University Press.

Konold, C. (1991), "Understanding student's beliefs about probability", en E. V. Glasersfeld, (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer, pp. 139-156.

Langrall, C. y E. Mooney (2005), "Characteristics of elementary school student's probabilistic reasoning", en G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer Science+Business Media, pp. 95-119.

Lecoutre, M. P. (1992), "Cognitive models and problem spaces in 'purely random' situations", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 23, pp. 557-568.

Lee, H. S. y G. F. Mojica (2008), "Examining how teachers' practices support statistical investigations", en C. Batanero, G. Burrill y Ch. Reading (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*, Joint ICMI/IASE Study, Monterrey, México.

Liljedahl, P. (2009), "Components of Mathematics Teacher Training", en R. Even y D. L. Ball (eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, Springer Science+Business Media, pp. 25-33.

NCTM (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA.

——— (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA.

Novotná, J. (2009), "The Preparation of Teachers", en R. Even y D. L. Ball (eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, Springer Science+Business Media, pp. 13-14.

OCDE (2006), *Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Marco de la evaluación: conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*.

Ojeda, A. M. (2006), "Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos", en E. Filloy (ed.), *Matemática Educativa, 30 años. Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*.

Pratt, D. (2005), "How do teachers Foster student's understanding of probability", en G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer Science+Business Media, pp. 171-189.

Sánchez, E. (2000), "Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 20, núm. 3, pp. 305-330.

——— (2002), "Teachers' beliefs about usefulness of simulation with the educational software fathom for developing probability concepts in statistics classroom", en *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*.

——— (2009), "La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México", *Educación Matemática*, vol. 21, núm. 2, México, Santillana, pp. 39-77.

Sánchez, E. y R. Hérnandez (2003), "Variables de tarea en problemas asociados a la regla del producto en probabilidad", en E. Filloy (ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual*, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN y Fondo de Cultura Económica, pp. 295-313.

Shaughnessy, M. (2003), "Research on student's understanding of probability", en J. Kilpatrick, W. G. Martín y D. Schifter (eds.), en National Council of Teachers of Mathematics, *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Reston VA, NCTM, pp. 216-226.

Sedlmeier, P. y Ch. Wassner (2008), "German mathematics teachers' views on statistics education", en C. Batanero, G. Burrill y Ch. Reading (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*, Joint ICMI/IASE Study, Monterrey, México.

SEP (1974), *Planes y programas de estudio. Secundaria*, México, Secretaría de Educación Pública.

——— (2006), *Educación secundaria. Matemáticas*, México, Programas de Estudio, Secretaría de Educación Pública.

Stohl, H. (2005), "Probability and Teacher Education and Development", en G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for the teaching and learning*, Nueva York, NY, Springer Verlag, pp. 345-366.

Watson, J. M. (2001), "Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of the chance and data", *Journal of the Mathematics Teacher Education*, vol. 4, núm. 4, pp. 305-337.

Watson, J. (2005), "The probabilistic reasoning of middle school students", en G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer Science+Business Media, pp. 145-169.

Zaslavsky, T., O. Zaslavsky y M. Moore (2001), "Language influence on prospective mathematics teachers' understanding of probabilistic concepts", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, núm. 23, pp. 23-40.

ANEXOS

Cuestionario

1. ¿Cuál de las siguientes sucesiones consideras que es más probable que aparezca al lanzar una moneda equilibrada al aire 5 veces?
   a) AAASS.
   b) ASSAS.
   c) ASASA.
   c) SASSS.
   e) Las cuatro sucesiones son igual de probables.

Justifica tu respuesta.
(Adaptado de Kahneman, Slovic y Tversky, 1982)

2. Se tienen dos urnas: la urna A tiene dos bolas, una marcada con la letra *a* y otra con la letra *b*. La urna B tiene tres bolas, una marcada con el número *1*, otra con el número *2* y otra con el número *3*. Se extrae al azar una bola de la urna A y otra bola de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola con la letra *a* y la bola con el número *3*?

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) Otra

Justifica tu respuesta.
(Tomado de Sánchez y Hernández, 2003)

3. El siguiente mensaje está impreso en un frasco de prescripción médica. Advertencia: en aplicaciones en área de la piel, existe 15% de probabilidad de que se presente irritación. Si se presenta irritación, consulte a su médico. ¿Cuál de los siguientes enunciados consideras que es la mejor interpretación de la advertencia?
   a) No usar el medicamento en la piel, pues existe buena posibilidad de que se presente irritación.
   b) Para aplicación en la piel, aplicar solamente 15% de la dosis recomendada.
   c) Si se genera irritación, esto afectará probablemente sólo 15% de la piel.
   d) Aproximadamente a 15 de cada 100 personas que usan este medicamento se les irrita la piel.

   e) Hay una mínima posibilidad de que se irrite la piel usando este medicamento.

Justifica tu respuesta.
(Tomado de Garfield y Ben-Zvi, 2008)

4. Cuando se lanzan dos dados simultáneamente, ¿cuál de los siguientes eventos consideras que es más probable?:
   a) Obtener un 5 y un 6.
   b) Obtener 6 en los dos dados.

Justifica tu respuesta.
(Tomado de Green, 1983)

5. Se tienen dos urnas: la urna A contiene dos bolas negras y una blanca. La urna B contiene una bola negra y cuatro blancas. Se extrae al azar una bola de la urna A y otra bola de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras?

   a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{13}{15}$ c) $\frac{3}{8}$ d) Otra

Justifica tu respuesta.
(Tomado de Sánchez y Hernández, 2003)

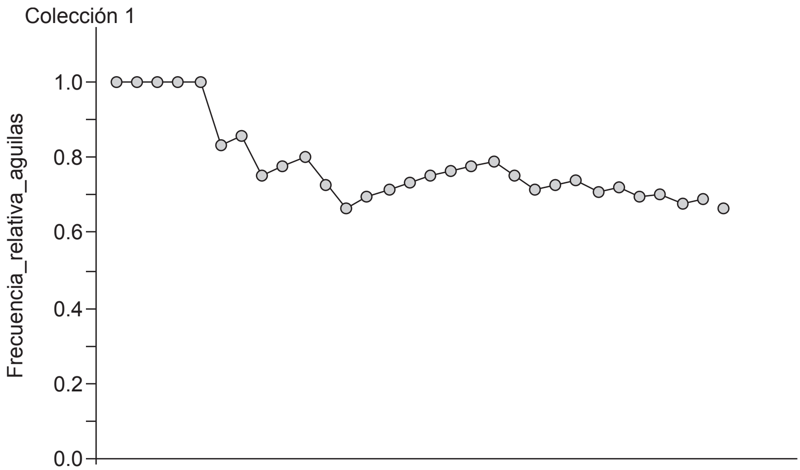
6. Se tiene una urna con tres bolas: una negra y dos blancas. Se extrae una bola al azar, se ve su color y se devuelve a la urna. Se mezclan las bolas y se vuelve extraer una bola al azar y se ve su color. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra las dos veces?

   a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) Otra

Justifica tu respuesta.
(Tomado de Sánchez y Hernández, 2003)

7. La siguiente gráfica representa las frecuencias relativas de águilas que se obtuvieron al lanzar una moneda al aire 30 veces seguidas. Con base en la gráfica, contesta lo siguiente:
   a) La moneda era legal (equilibrada).
   b) La moneda estaba sesgada (desequilibrada).

c) No es posible saber, con los datos de la gráfica, si la moneda estaba sesgada o no.

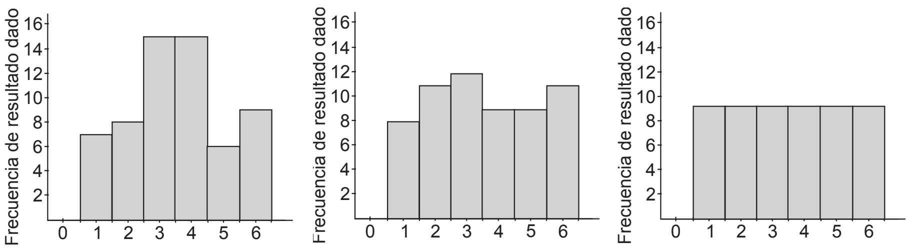


Justifica tu respuesta.
(Diseñado por los autores)

8. Un jugador de béisbol tiene un promedio de bateo en una temporada de 0.300. Es decir, 30% de las veces que se coloca en la caja de bateo pega un hit. Se desea hacer una simulación de la situación anterior con canicas rojas y azules colocadas en una urna, de tal modo que canica azul representa "pegar hit" y canica roja representa "no pegar hit". Selecciona la composición de la urna y las condiciones que representan la situación anterior.
   a) Una urna con 3 canicas azules y 7 rojas. La selección se realiza sin reemplazo.
   b) Una urna con 3 canicas azules y 7 rojas. La selección se realiza con reemplazo.
   c) Una urna con 3 canicas rojas y 7 azules. La selección se realiza con reemplazo.

Justifica tu respuesta.
(Diseñado por los autores)

9. Un dado equilibrado fue lanzando al aire 60 veces. ¿Cuál de las siguientes gráficas te parece más apropiada para representar los resultados obtenidos?



a) b) c)

Justifica tu respuesta.
(Diseñado por los autores)

10. En una bolsa negra se han colocado 10 canicas, de las cuales 5 son de color rojo y están numeradas del 1 al 5; 3 son de color verde y están numeradas del 6 al 8, y 2 canicas son azules y están numeradas con 9 y 10. Si se selecciona una canica al azar de la bolsa, determine la probabilidad de que:
   a) ¿Salga una canica verde y un número impar? Respuesta: $\frac{1}{10}$.
   b) ¿Salga una canica azul o un número par? Respuesta: $\frac{6}{10}$.
   c) ¿No salga un número par? Respuesta: Respuesta: $\frac{5}{10}$.
   d) ¿Salga azul o roja? Respuesta: $\frac{7}{10}$.

(Diseñado por los autores)

11. En un almacén, 90% de las manzanas son rojas y 10% son verdes. Si se toman al azar dos manzanas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas manzanas sean rojas?
   a) $\frac{81}{100}$ b) $\frac{18}{10}$ c) $\frac{18}{20}$ d) Otra

Justifica tu respuesta.
(Tomado de Sánchez y Hernández, 2003)

12. En una clase se pidió a los niños que lanzaran una moneda 40 veces. Algunos hicieron el experimento, pero otros hicieron trampa y sólo colocaron el resultado como si realmente lo hubieran hecho. Utilizaron A para águilas y S para soles. A continuación se muestran los resultados de Juan y Pedro.

Juan:

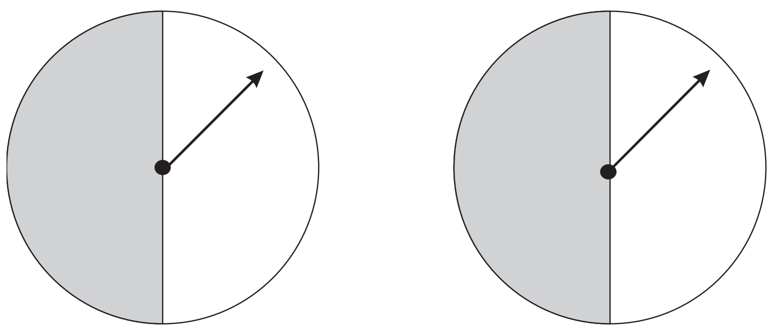
A S A S S A A S A S A A S S A S S A A S S A S A A S S A S A S A S A S A S S A S

Pedro:

A S S S A S S A S A S S S A S S S S A A S S S A S S A S S A S S S S A S S S A S

¿Consideras que tanto Juan como Pedro hicieron el experimento? O ¿quién sí lo hizo y quién no? Justifica tu respuesta.
(Tomado de Batanero, Godino y Roa, 2004)

13. Un juego de la feria consta de dos ruletas como las que se muestran en la figura. Un jugador gana un premio sólo si ambas flechas caen en el área sombreada cuando se hace girar una vez cada una de las flechas.



¿Consideras que el juego anterior es equitativo? Justifica tu respuesta.
Respuesta: No es equitativo.
(Tomado de Shaughnessy, 2003)

14. Consideren el experimento de lanzar un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par o menor que tres?

Respuesta: $\frac{2}{3}$.

(Diseñado por los autores)

15. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas rojas. Seleccionamos dos bolas al azar, una después de la otra y sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja, dado que la primera también fue roja?

Respuesta: $\frac{1}{3}$.

(Diseñado por los autores)

16. Santiago tiene una bolsa negra que contiene cuatro canicas, cada una de ellas está etiquetada con los siguientes dígitos: 4, 6, 8 y 1. Él pide a un compañero que seleccione una canica de la bolsa y anote el número y después regrese la canica a la bolsa. Este procedimiento se repite hasta completar 3 dígitos. ¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos se espera que puedan obtener el amigo de Santiago?

Respuesta: 64 dígitos.

(Diseñado por los autores)

17. Una bolsa obscura contiene únicamente dos fichas de igual tamaño. Una de ellas tiene sus dos caras rojas, la otra tiene una cara azul y la otra roja. Una persona saca una ficha y muestra sólo una de sus caras y resulta ser roja. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones consideras correcta?
    a) Es más probable que esta ficha tenga las dos caras rojas.
    b) Es igualmente probable que esta ficha sea la que tiene la otra cara azul.
    c) Es menos probable que esta ficha sea la que tiene las dos caras rojas que la que tiene una cara roja y una azul.

Justifica tu respuesta.

(Diseñado por los autores)

DATOS DE LOS AUTORES

Santiago Inzunsa Cazares
Universidad Autónoma de Sinaloa, Sinaloa, México
sinzunza@uas.uasnet.mx

Martha Catalina Guzmán Reyes
Secretaria de Educación Pública y Cultura de Sinaloa, Sinaloa, México
catalinaguzre@hotmail.com