Lugares geométricos: su rol en el aprendizaje de la demostración en geometría

Verónica Molfino Vigo y Javier Lezama

Resumen: Se presenta una investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje de la demostración en geometría. Se estudia, en particular, el papel que pueden desempeñar los problemas de determinación de lugares geométricos en el aula. Por un lado, se analizan los esquemas de demostración que presentan los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas, así como las funciones de la demostración que se explicitan en su abordaje. Para ello, se diseñó y aplicó una actividad concreta. Por otro lado, dicho estudio permite concluir acerca de la pertinencia de este tipo de problemas como una estrategia adecuada para propiciar la práctica de la demostración, favoreciendo el tránsito entre diferentes esquemas de demostración.

Palabras clave: demostración en geometría, lugares geométricos, prácticas argumentativas.

Geometrical places: Their role in learning of the geometry demonstration

Abstract: A research about geometry proof teaching and learning is presented. In particular, the rol played by proposing locus problems in such teaching is studied. On one side, we analyze the proof schemes that students exhibit when solving this type of problems, as well as the functions of proof that become explicit in their solving. A specific activity was designed and implemented for that purpose. On the other hand, such study allows concluding about the relevance of this type of problems as an appropriate strategy to develop proof practice and promote transition between different proof schemes.

Keywords: geometry proof, locus, argumentative practice.

Fecha de recepción: 8 de abril de 2010.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones que dan cuerpo a la matemática educativa como disciplina consideran que es necesario problematizar el discurso escolar dominante con vistas a mejorar la enseñanza de la matemática, reflexionando en particular sobre la práctica educativa. Para ello, se estructuran diversas concepciones de la matemática y su enseñanza, así como de los contextos en los que ella se produce. En esta investigación, los sistemas educativos se consideran como espacios socioculturales complejos, donde los humanos aprenden al ejercer prácticas (en este caso, entenderemos prácticas como actividad, la práctica escolar de demostrar). La institución escolar es el espacio donde se fomentan y ejercen dichas prácticas, y lo que interesa investigar en el presente trabajo.

Dentro de ese escenario, se entiende el aprendizaje como construcción de saberes matemáticos. Para ello, es preciso reflexionar sobre la manera en que se presentan tradicionalmente los conocimientos y, a partir de ello, encontrar una manera de modificar su estatus de productos acabados, centrando la atención en la construcción de otras prácticas de aprendizaje que propicien la consideración de nuevos significados. La problematización del conocimiento propone identificar, entre otras cosas, las características que lo definen: su génesis en ámbitos científicos, cómo y por qué se integró en el ámbito escolar (procesos de institucionalización), su desarrollo a lo largo de la historia de la humanidad, sus posibles transformaciones –particularmente en la manera de difundirse–, las rupturas y la pérdida de significados.

Un estudio que llevó a cabo la Administración Nacional de Educación Pública describe la perspectiva que domina el discurso escolar actual en la enseñanza de la matemática en Uruguay y esboza sus posibles causas: "La irrupción de la matemática moderna en las décadas de 1960 y 1970 reforzaron en la enseñanza media el desarrollo de una matemática que se presentaba como acabada en sí misma, modelo atemporal, lógico y abstracto. Se favoreció una enseñanza impuesta a los alumnos en su presentación teórica y práctica" (Administración Nacional de Educación Pública, 1997, p. 4).

Esta realidad conduce al interés por problematizar dicha práctica dominante por medio de la investigación. En particular, en este trabajo se decidió explorar el concepto de "lugar geométrico" y su vínculo con la enseñanza y aprendizaje de una práctica propia del quehacer matemático denominada *demostración*. Para ello, se diseñó y puso en práctica una actividad que permitiera dar respuesta a los cuestionamientos planteados a partir del análisis de las producciones de los estudiantes.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

En el escenario específico en el que se desarrolló nuestra investigación, la mayoría de los estudiantes del curso Geometría Métrica Euclidiana (perteneciente al plan 1976 para la opción "Científico" en el segundo año de Educación Media Superior (EMS) en Uruguay, con alumnos de 16-17 años) se enfrenta por primera vez a la práctica de demostrar: deben construir las demostraciones ellos mismos. Es frecuente que los estudiantes se sientan "bloqueados" y sin herramientas para proponer siquiera un camino posible para generar la demostración pedida, o bien, que las demostraciones producidas sean incompletas, no ajustadas a lo que se espera para validar las afirmaciones.

En particular, en la resolución de problemas de lugares geométricos (LG),[1] que son los que se analizaron en este trabajo, se constató la dificultad de los estudiantes a la hora de justificar la determinación del LG: intentan detectar cuál es la figura a partir del estudio de casos particulares, pero no saben cómo deducir, a partir de la observación de la situación y de propiedades aceptadas como válidas, que la figura hallada es en efecto el lugar geométrico. Esto es lo que despertó nuestro interés por describir y analizar las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a este tipo de problemas.

Los estudiantes están expuestos a una práctica escolar que no contempla su desarrollo: a partir del segundo año de EMS, año en el que realizamos esta investigación, se espera de ellos que tengan desarrollado un razonamiento deductivo y sean capaces de generar demostraciones elaboradas de manera autónoma, mientras que, en la formación precedente, se ha estimulado poco la construcción de justificaciones propias en el aula de Matemática y el desarrollo de la argumentación.

Varias investigaciones atestiguan que uno de los problemas que se presentan en la enseñanza de la demostración es que los alumnos concentran sus esfuerzos en imitar demostraciones mostradas por sus profesores o extraídas de libros de texto, en lugar de buscar caminos a través de los cuales puedan generar argumentaciones y demostraciones propias, lo que otorgaría significado a dicha actividad (Balacheff, 1982; Balacheff y Laborde, 1988; De Villiers, 1993; Galbraith, 1979, citado por Balacheff y Laborde, 1988). Esta práctica corresponde a una concepción

[1] Estos problemas consisten en relacionar biunívocamente un conjunto de puntos que cumplen una propiedad dada con una figura que debe ser determinada por quien resuelve el problema.

de la matemática como un conjunto de productos acabados, ajenos al sujeto que aprende.

Los profesores, por su formación e intereses, reconocen la necesidad de presentar demostraciones y enseñar a sus alumnos a justificar sus razonamientos (esto está sujeto al punto de vista de cada profesor). Por otro lado, la mayoría de los estudiantes no tienen la necesidad de demostrar las propiedades, especialmente cuando éstas resultan evidentes y se pueden descubrir o establecer intuitivamente (Sowder y Harel, 1998; De Villiers, 2003). Es común que el estudiante considere la demostración como una actividad incomprensible que debe aprender de memoria para repetirla cuando el docente se lo pida.

Los objetivos propuestos en la investigación de la cual deriva el presente artículo fueron los siguientes:

- analizar y describir las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular (lg), los esquemas de demostración y procesos que se hacen presentes, así como las funciones de demostración que se manifiestan en la resolución.
- analizar si el abordaje de este tipo de problemas (lg) permite el fortalecimiento en los estudiantes de la práctica de la demostración en matemática y en geometría, en particular.

En este artículo desarrollamos algunos de los casos analizados, referidos a estos objetivos, que consideramos más significativos e ilustrativos de las conclusiones a las que se llega.

JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En las prácticas educativas de profesores de nivel medio, es común que la demostración se introduzca como medio para verificar resultados que ya fueron aceptados por el grupo clase, sea por una actividad previa de exploración o sea porque el profesor lo dijo. Sin embargo, eso no corresponde a la actividad matemática "real", ya que, entre matemáticos, son otros los medios para convencerse o persuadir y la demostración mayormente se hace presente cuando ya se está convencido de un resultado (Hanna, 2001). Esto cobra especial relevancia en un medio como el del sistema educativo uruguayo, en el que está fuertemente arraigada una tradición formalista en los cursos de bachillerato, según la cual los docentes invierten gran parte del tiempo de clase en la exposición de demostraciones.

De Villiers (1993 y 2003) considera otras funciones de la demostración en la actividad matemática científica, como el descubrimiento de nuevos resultados, la comunicación, la explicación y la sistematización. Asimismo, sugiere diseñar secuencias de enseñanza que contemplen la demostración desde estas diferentes funciones. Para ello, es necesario proponer actividades que promuevan la formulación de conjeturas que requieran argumentaciones por parte de los estudiantes para ser refutadas o aceptadas y que, al consensuarse en el grupo clase, se conviertan en demostraciones.

Por otro lado, creemos que es importante diseñar actividades en las que la búsqueda de justificaciones surja como una necesidad intrínseca, que sea el estudiante quien sienta la necesidad de brindar explicaciones, más allá de la necesidad de cumplir con el contrato de responder al profesor. En este contexto, la determinación de LG se hace presente como una actividad matemática en la cual se ve reflejada la necesidad de la búsqueda de argumentos: la demostración se va construyendo en la búsqueda del resultado, en la explicación de éste, en su validación y su comunicación a los compañeros. Permite a los estudiantes apreciar que la demostración no sólo es legitimar resultados que ya se asumen como válidos, sino que también implica un procedimiento de descubrimiento, autoconvencimiento y convencimiento del compañero.

En suma, se valora la pertinencia de la investigación llevada a cabo en el contexto sociocultural actual de la educación matemática en Uruguay, en primer lugar, porque creemos que la geometría euclidiana representa una rama propicia para desarrollar prácticas propias de la matemática, como la práctica argumentativa que conduce a la demostración. Esto está respaldado en este contexto específico por el hecho de que ésta se haya mantenido como parte del plan de formación de profesores de matemática.

En segundo lugar, consideramos otro tipo de supuestos que revela la complejidad del concepto de LG y su potencial didáctico para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración:

- Por la manera en que son planteados (en lugar de “demostrar que el lg de tal punto es...” se pide “hallar el lg de...”), la resolución de problemas de lugares geométricos es una ocasión en la que se espera que el alumno descubra por cuenta propia el resultado al que debe llegar, y que lo motiva a buscar argumentos –por razones de necesidad de convencer(se)–. Es una instancia en la que los estudiantes conjeturan, formulan, refutan y demuestran en la búsqueda de la solución del problema, sin que se les pida explícitamente.

- Es una oportunidad en la que los estudiantes se enfrentan a un problema que involucra elementos estáticos y dinámicos, y en parte, su resolución depende precisamente de identificar la relación entre ellos, encontrar las invariancias de una situación que es dinámica: determinar cuáles medidas o relaciones permanecen constantes, mientras otras no y justificarlo. Esto favorece nuevos tipos de razonamientos respecto a los problemas en los que sólo intervienen elementos estáticos.
- En la resolución de este tipo de problemas, la demostración no aparece solamente como verificación de resultados, sino que se hace presente cumpliendo diferentes papeles: descubrimiento, explicación, sistematización y comunicación (De Villiers, 1993).
- Resolver problemas de lugares geométricos o de construcción sistematiza y sintetiza conceptos previamente trabajados, vinculando propiedades de diferentes figuras. Crea condiciones para la discusión acerca de la necesidad de precisión en el lenguaje, el lenguaje simbólico entre ellos.

Estos supuestos fueron cotejados en la experiencia llevada a cabo, según se puede apreciar en el análisis de las producciones de los estudiantes.

ELEMENTOS TEÓRICOS

En el presente trabajo se concibe la matemática como una ciencia en desarrollo, construcción social y cultural del hombre y, desde esa perspectiva, interpretamos la naturaleza del saber escolar y la construcción de significados. Para ello, exploramos la posibilidad de un rediseño del discurso matemático escolar y la resignificación de los conceptos matemáticos, lo que implica indagar sobre las prácticas que posibiliten nuevos tratamientos didácticos de las ideas matemáticas en el salón de clase.

El *discurso matemático escolar* "es aquel que atiende a la formación de consensos en la noósfera en torno de un saber escolar y a aspectos relativos a su tratamiento y características, incluidos aspectos de profundidad temática y profundidad expositiva" (Castañeda, 2006, p. 255). Se denomina *noósfera* al entorno del sistema de enseñanza conformado por los representantes del sistema didáctico (docentes) y los representantes de la sociedad (padres, especialistas de la disciplina, autoridades políticas). Allí se produce todo conflicto entre sistema y entorno y allí encuentra la transposición didáctica su lugar privilegiado de expresión (Chevallard, 1991). Tanto los libros de texto en los que se apoya la enseñanza como el tipo de explicaciones que usa el docente en clase son elementos que definen el discurso matemático escolar (Buendía, 2004).

De esta manera, en el marco de este trabajo, se entiende la *demostración* –en un contexto educativo– como una práctica mediante la cual una persona establece la coherencia de los elementos que componen un hecho matemático y, por medio de ella, fortalece la certidumbre de una propiedad, la comprende, argumenta por qué es así, la integra dentro de un sistema de conceptos y relaciones que tienen un significado determinado para ella y puede comunicarla a otras personas. Balacheff y Laborde (1988) subrayan la dimensión social de la demostración: si bien el proceso de demostrar puede ser individual, es fundamental su carácter dialógico, ya que el valor de verdad de un razonamiento es acordado por un determinado colectivo, en un momento determinado (que puede ser, por ejemplo, el grupo de clase en un día determinado). Esta explicación puede ser reconocida por un colectivo y no por otro o en un determinado momento y no en otro.

A continuación, se presenta un panorama de caracterizaciones sobre la enseñanza de la demostración, nos apoyamos en ellas para analizar las producciones que los estudiantes realizaron al resolver la actividad propuesta.

Sowder y Harel (1998) presentan la noción de "Proof Scheme" (que traduciremos como *esquemas de demostración*). Plantean que probar o justificar un enunciado implica dos aspectos: el convencimiento propio y la persuasión (convencimiento de otros). El esquema de demostración de un individuo consiste en los procesos y actividades mentales que componen el convencimiento propio y el aparato de persuasión que construye ese individuo en un momento determinado de su vida cuando se enfrenta a una situación determinada. La clasificación que presentan surge de considerar la demostración en un sentido amplio: justificación desde el punto de vista psicológico, más que desde la posición rigurosa de la demostración matemática.

Los autores distinguen tres categorías de *esquemas de demostración*, según el nivel de profundidad en el desarrollo cognitivo: *externos*, si tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante ofrece para persuadir a otros tiene una procedencia externa a él. Ejemplos de ellos son los esquemas de demostración autoritarios, rituales o simbólicos. Son *empíricos* si se basan exclusivamente en experiencias concretas para justificar resultados. Pueden ser esquemas de demostración perceptivos (basados en figuras, en ocasiones casos particulares de la situación presentada) o inductivos (basados en ejemplos). Y denominan *analíticos* a aquellos que los profesores e investigadores de matemática a menudo consideran válidos: deducción, utilizando reglas lógicas bien definidas. Se reconocen dos tipos: los esquemas de demostración de transformación y los axiomáticos.

Harel y Sowder (1998) proponen estos esquemas a partir de experiencias con estudiantes preuniversitarios y explicitan que sus resultados no son definitivos, sino que deben ser cotejados y validados con otras investigaciones. En este sentido, algunas investigaciones han validado la pertinencia y adecuación de estos esquemas para explicar las maneras en que los estudiantes elaboran para convencerse y persuadir (Dalcín, 2004; Flores Peñafiel, 2005; Harel, 2001; Harel y Sowder, 2005).

Otras investigaciones han extendido esta tipología en algún sentido: Ibañes (2001 y 2002) sugiere que la tipología de Sowder y Harel (1998) considera únicamente la verificación como función de la demostración (De Villiers, 1993 y 2003; véase más adelante), y propone presentar el concepto de esquema de demostración teniendo en cuenta otras funciones. Puesto que el esquema de demostración depende de la tarea propuesta y de que en una misma persona pueden coexistir varios esquemas, el autor define diversas *modalidades de esquema de prueba*: utilizado, aceptado, adherido, declarado, entre otros.

Los propios autores han profundizado en este marco en un estudio sobre el pensamiento matemático avanzado (Harel y Sowder, 2005). Afirman que las formas de pensamiento de una persona involucran por lo menos tres categorías interrelacionadas: *creencias* (*beliefs,* en el original) sobre lo que es la matemática, las estrategias de resolución de problemas (*problema-solving approaches,* en el original) y los esquemas de demostración. Sin embargo, utilizan la misma tipología de esquemas de demostración, ratificando la presentada en 1998.

Por último, como consecuencia de un estudio llevado a cabo con profesores, Flores (2007) amplía también el marco presentado por Sowder y Harel (1998) con un nuevo esquema de demostración *fáctico*: "el profesor hace un recuento de lo que hizo o repite los hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado. A menudo, el profesor expone una serie de pasos como si fueran un algoritmo" (Flores, 2007, p. 71). Atribuye esta diferencia con el marco teórico original al hecho de que su estudio se llevó a cabo con profesores de bachillerato y no con estudiantes, además de que las actividades propuestas eran específicas de geometría, a diferencia de las de Sowder y Harel (1998) que eran de diversas ramas de la matemática.

Por su parte, De Villiers (1993 y 2003) propone un análisis de las diferentes funciones de la demostración, con el propósito de utilizarlas en el aula para resignificar la actividad de demostrar. Distingue cinco funciones de la demostración en matemática: *verificación*, demostrar para validar resultados; *explicación*, herramienta que otorga entendimiento; *sistematización*, sistematiza diferentes resultados en una teoría matemática, vincula diferentes conceptos; *descubrimiento*, como un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva; y *comunicación*, constituye un espacio para interacción social y negociación de contenidos matemáticos al hacerlos explícitos en aras de una argumentación aceptable.

Para el cumplimiento del primer objetivo (análisis de las producciones de los estudiantes), se identificaron los esquemas de demostración de los estudiantes y las funciones de la demostración evocadas en cada actividad por cada estudiante o grupo de estudiantes.

El modelo de Van Hiele estructura el aprendizaje de la geometría en niveles cognitivos, los conocimientos de cada nivel se suponen conocidos en el nivel siguiente, donde se explicitan relaciones que antes estaban implícitas y se profundizan conocimientos adquiridos previamente.

Según explican Alsina, Burgués y Fortuny (1997), la teoría de Van Hiele estructura el aprendizaje de la geometría en cinco niveles: *nivel 1:* reconocimiento de figuras y de sus propiedades; *nivel 2:* análisis de éstas; *nivel 3:* ordenamiento y búsqueda de relaciones; *nivel 4:* deducción y, por último, *nivel 5:* abstracción formal. El nivel en el que se encuentra una persona y la transición de un nivel a otro no depende de su edad, y los estudiantes que se encuentran cursando un mismo grado no tienen por qué estar en el mismo nivel. Por otra parte, dos personas que están razonando en diferentes niveles difícilmente pueden comprenderse entre sí, lo que explica el fracaso cuando se abordan las prácticas de demostración introduciéndo excesivas herramientas teóricas y simbología de manera prematura: existe una diferencia entre el nivel en que es presentado el conocimiento y el nivel en el que los estudiantes están operando.

El nivel 3 (ordenamiento y búsqueda de relaciones) representa una bisagra entre la geometría básica de descripción de figuras y una geometría más abstracta y formal, en la que se reconocen las figuras por sus propiedades y se explicitan relaciones entre las diferentes propiedades de las figuras. Parece ser que en la transición entre ese nivel y el siguiente es cuando resulta significativa la presentación de problemas de LG. Así, este modelo se utiliza en la investigación sólo para enmarcar las actividades propuestas, pero no se intentó una caracterización del nivel de pensamiento en el que se encuentran los estudiantes, asumiendo que se encontraban precisamente en esta transición. Vale destacar que uno de las autoras había sido docente de los estudiantes durante 7 meses en el momento de realizar el experimento, por lo que tenía un conocimiento importante del grupo.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA Y MÉTODO DE TRABAJO

Se diseñó una actividad con tres problemas, la cual se propuso en tres instancias:

- La primera a estudiantes de un centro de formación docente. Esta experiencia sirvió como prueba piloto para ajustar detalles.
- Las otras dos a dos grupos de estudiantes de segundo año de educación media superior de un instituto de educación secundaria (16-17 años), proponiendo parte de la actividad a un grupo y la otra parte al otro grupo.

En las tres instancias se armaron espontáneamente subgrupos de trabajo de dos o tres integrantes cada uno, si bien hubo estudiantes que prefirieron trabajar de manera individual. La actividad fue desarrollada en salones de clase en los que había computadoras con un programa de geometría dinámica (GD) instalado (*The Geometer's Sketchpad* o *Cabri-Géomètre*), se indicó que se podía trabajar tanto con lápiz y papel como con la computadora e incluso integrando ambas estrategias. El uso de geometría dinámica no es una variable de análisis, el interés se centra en las prácticas argumentativas, independientemente del medio en el que desarrollaron sus producciones.

Se utilizaron diversas estrategias para recolectar datos: grabación de diálogos entre la docente y los diferentes subgrupos de trabajo y el diálogo entre los miembros de cada subgrupo; registro escrito de figuras, apuntes, intentos de justificación de resultados obtenidos; archivos de los programas de computadora utilizados con producciones de los estudiantes, tanto figuras de análisis como presentación de soluciones, observación general de las situaciones, y apuntes personales de la docente en el momento de la puesta en práctica de la actividad, registrando tanto éxitos como fracasos.

Exponemos a continuación la actividad propuesta:

Te agradecería que, al resolver los problemas, escribieras todas las estrategias que pensaste para abordarlos, tanto aquellas que crees que son válidas como aquellas que crees incorrectas o que descartaste por alguna razón.

Problema 1:

a) Construye una circunferencia C_O de centro O y radio r y una recta t. Construye ahora en el mismo plano una circunferencia C′ de centro O′ y radio 3 que sea tangente a C_O y a t. Discute la cantidad de soluciones según la posición de C_O y t.

b) Se consideran dos circunferencias C_A y C_B de igual radio y la circunferencia C_O en el mismo plano que las anteriores y tangente a ambas. Halla el lugar geométrico de O en las siguientes situaciones:

i) C_A y C_B son exteriores.
ii) C_A y C_B son tangentes.
iii) C_A y C_B son secantes.
iv) C_A y C_B son coincidentes.

Problema 2:

Se considera un triángulo ΔADE, B es el punto medio del segmento AD y C es un punto variable en el segmento AE. Las bisectrices de $A\hat{C}B$ y $A\hat{B}C$ se cortan en I, y las bisectrices de $A\hat{E}D$ y $A\hat{D}E$ se cortan en J. Halla el lugar geométrico de O, circuncentro del triángulo ΔAIJ.

Problema 3:

Se considera una circunferencia C de centro O y radio r y P un punto de ella. B es un punto de C tal que $\overline{BP} = r$ y ΔPOB es horario. Se traza una recta t variable por P, $t \cap C = \{P, A\}$.

Halla el lugar geométrico de H, intersección de la bisectriz de $B\hat{A}P$ con la circunferencia C.

Te agradecería ahora que escribieras cuál es tu opinión con respecto a los problemas planteados, cómo te sentiste al resolverlos y qué piensas de tu desempeño.

Muchas gracias.

Es importante señalar que, si bien en las actividades propuestas no aparece la consigna "demostrar" o "justificar", ésta está implícita en el tipo de actividad y creemos que eso es un potencial de ella. Ambos tipos de actividades ("construir" y "hallar el LG de...") habían sido previamente propuestos a los estudiantes en clases anteriores y se les había explicado lo que dichas consignas implicaban. En la parte *a* del problema 1, se pide "construir". En el contexto del curso de Geometría Métrica en este nivel, esto implica realizar una figura de análisis con los datos que brinda el problema, diseñar un algoritmo de construcción, ejecutarlo con regla y compás (ya sea en papel o en un programa de GD) y justificar por qué la construcción realizada es válida y conduce a lo pedido en el problema. Por su parte, "hallar el LG de un punto que cumple una determinada propiedad" implica realizar una figura de análisis, descubrir cuál es la figura en la que varía el punto (directo), justificar la conjetura, analizar si efectivamente todos los puntos de esa figura son puntos del LG (recíproco), justificar esa nueva conjetura y finalmente concluir cuál es el LG pedido.

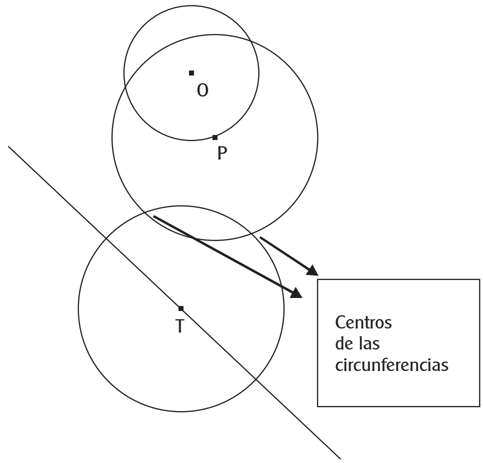
ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA

Se presentan las producciones de algunos de los estudiantes, seleccionados por su representatividad: sus respuestas recorren una amplia gama de los esquemas y funciones de demostración que se esperaba detectar *a priori* en el análisis. El análisis completo se puede encontrar en (Molfino, 2006).

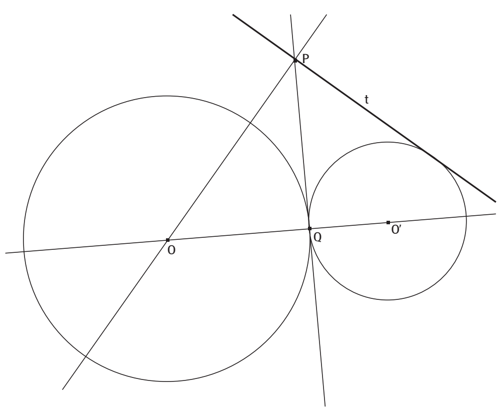
CASO 1. EP: EL OBSTÁCULO DE LA CONCENTRACIÓN EN FIGURAS PARTICULARES

EP, que prefirió trabajar de manera individual, es uno de los estudiantes del grupo al que se le propuso solamente el problema de construcción (problema 1*a*). Trabajando solamente con lápiz y papel, propuso una construcción sin un análisis previo de las condiciones, por lo que no se enfrentó a la necesidad de aplicar la noción de lugar geométrico. Eligió un punto cualquiera P de la circunferencia C_O y trazó una circunferencia con centro en él y radio 3 cm. La intersecó con otra circunferencia de igual radio y centro en un punto T, elegido arbitrariamente de la recta *t*. EP considera uno de los puntos de intersección de ambas circunferencias como el centro de la circunferencia solución.

Como se puede observar, esta solución sólo cumple las condiciones exigidas



para *algunos* puntos *particulares* de la recta *t* y la circunferencia de centro O y no para “cualquiera”, como afirma EP (él elije arbitrariamente el punto T en *t* y el punto P en C_O). Se suscitó un problema en la resolución: al efectuar la construcción con regla y compás, EP consideró como centros de las circunferencias puntos que casualmente brindaron una solución que en apariencia parecía correcta. La figura particular construida precisamente –con regla y compás– no le permitió al estudiante percatarse del error que estaba cometiendo, por lo que la docente intervino, preguntando qué ocurriría si se tomaran otros puntos como centros. EP se dio cuenta de su error, y corrigió la solución por la que se da a continuación:



1. Trazar perpendicular a t que pase por O (al punto de intersección lo llama P).
2. Trazar una recta que pase por P y sea tangente a la circunferencia de centro O (al punto de tangencia lo llama Q).
3. Trazar una recta s que pase por O y por Q.
4. *Trazar una circunferencia de centro Q y radio 3 cm, el punto que corta a* s *exterior a la circunferencia de centro O. [No lo dice, pero se supone que se refiere a que ese punto es O′].*
5. *Trazar circunferencia de centro O′ y radio 3 cm.* (t *tiene que estar a menos de 6 cm de la circunferencia de centro O).*

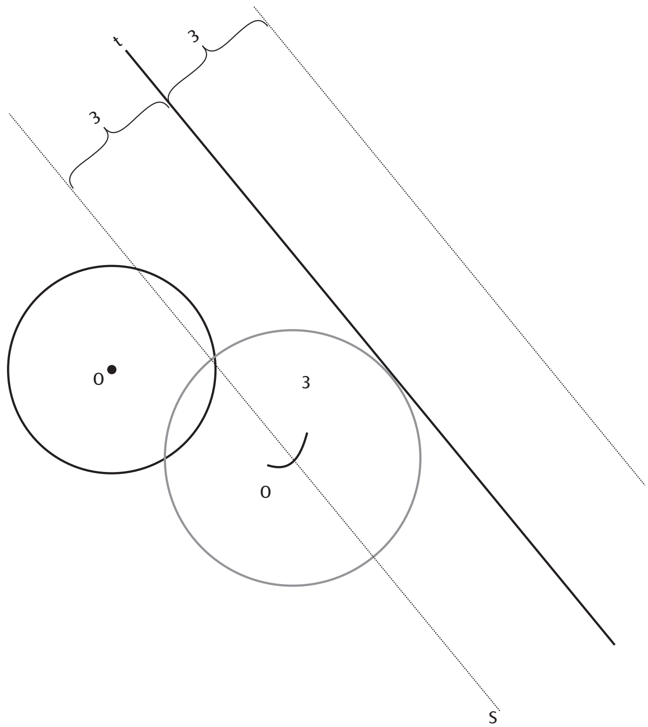
Al igual que la anterior, esta solución es construida sin un análisis previo de las condiciones exigidas y sin utilizar la noción de lugar geométrico. Considera la condición de tangencia a la circunferencia y la medida del radio pero no la condición de tangencia a la recta. Efectúa la construcción con regla y compás y obtiene una circunferencia que casualmente es tangente a la recta, lo que no le permite identificar de manera autónoma su error. EP estaba convencido de que su solución era correcta.

A EP no se le presenta en ningún momento la necesidad de justificar los pasos que va haciendo ni las decisiones que va tomando, a pesar de que se había consensuado que "construir" en geometría y en el contexto del curso implica precisamente una justificación de la construcción, además del algoritmo que sí presenta. Algo importante de rescatar de la experiencia es que en el segundo intento *descubre* la necesidad de que los dos centros estén alineados con el punto de tangencia. Sin embargo, el descubrimiento no se hace presente como una función propia de métodos deductivos, sino como el papel desempeñado por métodos empíricos en la resolución del problema.

Según la clasificación de Sowder y Harel (1998), en esta situación el estudiante presenta un esquema de demostración *empírico perceptivo*: en las dos soluciones que presenta se convence de la validez de su algoritmo de construcción por la figura que construye (que además cuida que sea precisa, efectuada con regla y compás). El haber trabajado sólo con lápiz y papel y sin un software de GD refuerza esta situación. Para que el estudiante descartara sus soluciones, fue necesario un cuestionamiento externo por parte de la docente.

Observamos también la presencia de un esquema de recuento *fáctico,* en el sentido en que lo presenta Flores (2007): el estudiante elabora un algoritmo detallado de la construcción realizada, aparentemente a modo de justificación.

Caso 2. ar y jo: el poder de la intuición



AR y JO, estudiantes del mismo grupo, trabajaron integrando ambos métodos: lápiz y papel y software de GD. En un primer intento, trazaron el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a 3 cm de la recta t (unión de dos rectas paralelas a la recta a esa distancia: s y s') y explicaron por qué el centro de la circunferencia solución debía pertenecer a una de esas rectas. Hasta aquí podría afirmarse que los estudiantes están siguiendo un esquema de demostración analítico, ya que utilizan deducciones lógicas para validar su conjetura acerca de la ubicación del centro de la circunferencia. En particular, se trata de un esquema analítico de transformación, ya que interviene la anticipación de la transformación del objeto.

Los estudiantes afirmaron, además, que debía estar a 3 cm del punto de intersección de s o s' con la circunferencia dada originalmente. Constataron que esta solución era parcialmente incorrecta, para lo que fue necesario la ejecución de la construcción con regla y compás, lo que les permitió darse cuenta de que respetaba la condición de tangencia a la recta pero no a la circunferencia e, incluso, que su construcción era impracticable en el caso de que la circunferencia dada originalmente no cortara ni a s ni a s'. Fueron capaces de descubrir lo incompleto de la solución presentada, a diferencia de EP, quien no presentó en el momento herramientas cognitivas para descartar una solución errónea.

Después de un proceso de búsqueda con métodos empíricos e inductivos primero, y deductivos después, presentaron un segundo intento de solución (en un principio intentaron diferentes posiciones del centro O sobre la recta s aleatoriamente, hasta que detuvieron esos intentos para razonar sobre las condiciones que debía cumplir el centro O y su relación con las propiedades de la figura). En esta parte del análisis, pudo detectarse una transición entre el esquema de demostración empírico inductivo hacia un esquema analítico de transformación. En esta nueva construcción impusieron al centro de la circunferencia buscada una condición extra: además de estar en alguna de las rectas paralelas a t a 3 cm de distancia, debía estar en una circunferencia concéntrica con la original y de radio 3 unidades mayor que ella. Este tipo de actividad es un ejemplo característico del tipo de razonamiento "bisagra" entre los niveles 3 y 4 de la teoría de Van Hiele.

Observando este ambiente de resolución de problemas desde la perspectiva teórica de De Villiers (1993), podemos afirmar que en los razonamientos de AR y JO se pueden detectar varias funciones de la demostración, algunas más explícitas que otras:

- el descubrimiento de una solución, que es, en definitiva, un resultado geométrico generalizable y a la cual se llegó a partir de la deducción de las figuras en las que se debía encontrar el centro de la circunferencia buscada;
- la explicación de por qué la solución encontrada es una solución válida (especialmente en la pertenencia de O′ a la recta paralela a t), y
- la sistematización de resultados, que se hace más explícita en la discusión de la cantidad de soluciones.

Puede encontrarse en los razonamientos de esta pareja una combinación del esquema de demostración:

- analítico por transformación (en la búsqueda del cumplimiento de la condición de tangencia a la recta) con el

- empírico inductivo (en la búsqueda del cumplimiento de la otra condición), según el marco teórico introducido por Sowder y Harel (1998).

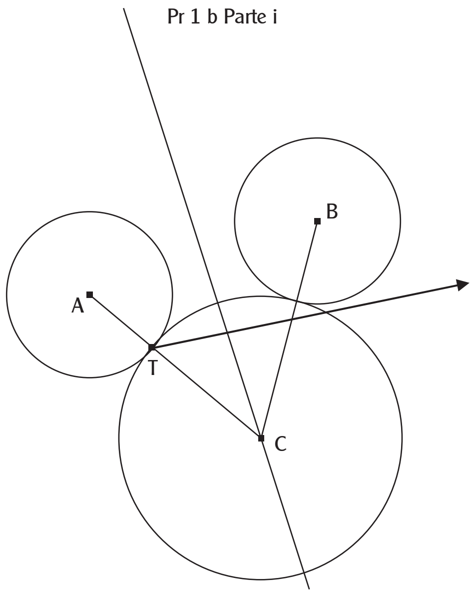
En el primer caso se puede apreciar una intención explícita de anticipar el resultado: "El punto O' va a estar en...". En la búsqueda de la segunda condición, se aprecia un razonamiento de tipo inductivo: analizan varias figuras, planifican diferentes estrategias y las llevan a cabo para verificar su validez por medio de la construcción. Pero sólo encuentran la solución cuando retoman el análisis deductivo a partir del análisis de las condiciones exigidas y de la noción de LG.

Caso 3. RS y SA: el poder de la predicción

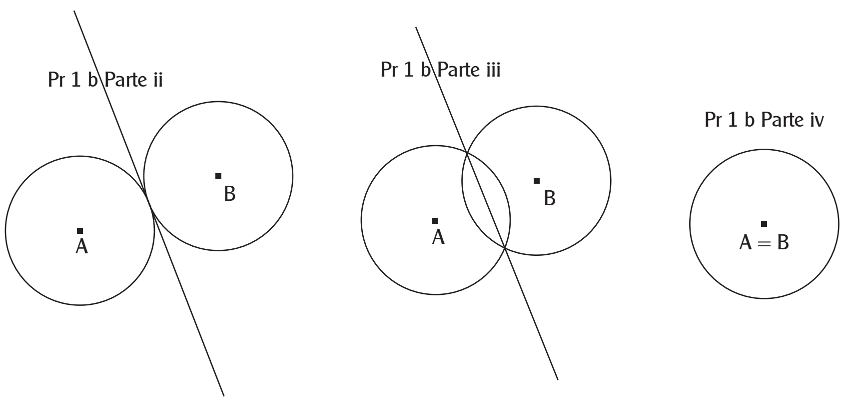
RS y SA, que trabajaron juntos, son dos integrantes del grupo al que se le propuso los problemas de lugares geométricos (problemas 1*b*, 2 y 3). En su producción, realizada solamente con lápiz y papel, se puede apreciar cómo la predicción desempeñó un papel importante en la resolución de los ejercicios. En su diálogo aparecen frases que lo atestiguan, como: "...el lugar geométrico del centro de la circunferencia va a ser la mediatriz del segmento AB, porque el centro O va a equidistar de los puntos de tangencia con las circunferencias de centros A y B ..." –en el problema 1*b*–; o "...las bisectrices de [los ángulos de vértices] B, C y A se van a cortar en el punto I, porque las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, entonces si dos de ellas se cortan en éste, entonces la tercera también se va a cortar acá" –en el problema 2–.

Los estudiantes llegaron a las soluciones esperadas en todos los problemas –aunque sea parcialmente–, discutiendo primero oralmente y escribiendo después las justificaciones de éstas. En el primer problema, dedujeron que el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB para los tres primeros casos y todo el plano, excepto el punto A, para el cuarto caso (consideraron en todos los casos sólo la posibilidad de que la circunferencia buscada sea tangente exteriormente a las circunferencias dadas, por eso no encontraron otras soluciones). Se pudo observar cómo la resolución del problema condujo al descubrimiento de una propiedad (la alineación del punto de tangencia de dos circunferencias con sus centros) y a la necesidad de encontrar justificaciones para ello.

En el segundo problema intuyeron que el circuncentro no existe a partir del análisis de varias figuras (A, I y J quedan alineados independientemente de la posición de C). En el tercer problema, bastó una figura de análisis para que RS

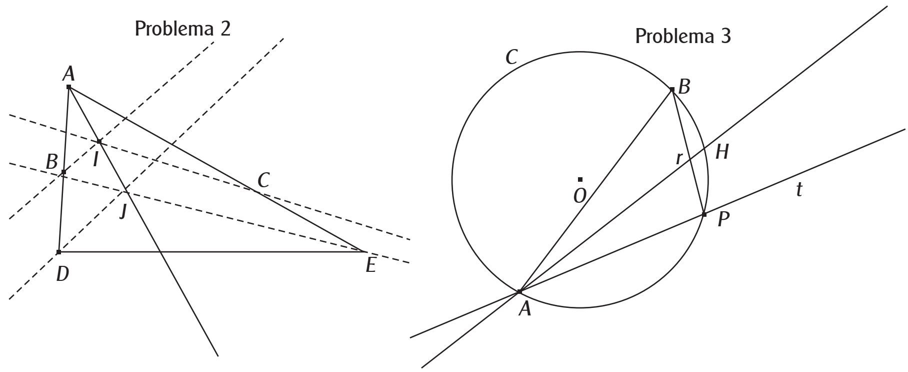


El centro de la circunferencia buscada debe estar alineado con el centro de cada una de las circunferencias (A o B) y el correspondiente punto de tangencia entre las circunferencias (T en el esquema). Y, por consiguiente, C debe equidistar de A y B (la distancia es la suma de un radio de las circunferencias dadas originalmente y el radio de la circunferencia solución).



se diera cuenta de que H queda fijo, por lo que el LG es un conjunto unitario. En ambos problemas se apreció cómo el hecho de que SA exigiera explicaciones ayudaba a RS a precisar sus razonamientos y justificar sus deducciones.

El estudio de las producciones de estos estudiantes reveló que, para tener éxito en el descubrimiento de nuevos resultados y en su justificación, es impor-



tante fijarse en las invariancias de la situación. En general, los estudiantes que son capaces de diferenciar entre los elementos variables y los fijos presentan más posibilidades de llegar a una solución y lograr convencerse a sí mismos y a sus compañeros de ella. Esto se evidenció cuando, en el problema 3, por ejemplo, RS afirma que "como A *varía* en una *misma* circunferencia y el arco [BP] es siempre el *mismo*, el ángulo es siempre *igual* y además la bisectriz va a cortar al arco siempre en el *mismo* punto".

En sus razonamientos, se pudieron detectar con claridad diferentes funciones, las que, si bien de manera inconsciente e implícita por parte de los estudiantes, se le asignaron a la demostración: *verificación, explicación, sistematización, comunicación* y *descubrimiento*. El proceso de confrontación de ideas, formulación de conjeturas y cuestionamientos les permitió transitar de esquemas de demostración *empírico inductivos*, al principio, a esquemas de demostración *analítico axiomáticos*, al final, ya que los estudiantes utilizaron de manera consciente los axiomas y propiedades manejadas en el curso, esbozando incluso una demostración de la propiedad relativa a la alineación de los centros de dos circunferencias tangentes con el punto de tangencia.

REFLEXIONES FINALES

En relación con los esquemas y modalidades de uso (funciones) de la demostración en su enseñanza

Uno de los objetivos propuestos fue el de analizar y describir las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular –de lugares geométricos y de construcción– en lo que se refiere a los esquemas de demostración que se hacen presentes, así como a las funciones que la demostración adopta en la resolución. La puesta en práctica de la actividad permitió observar que plantear este tipo de problemas generó en el aula un ambiente propicio para que los estudiantes desarrollaran distintas modalidades de trabajo en su práctica demostrativa, por lo que se pudieron distinguir en sus producciones las diferentes funciones que cumple dicha práctica en el marco de De Villiers (1993), así como los esquemas de demostración que transitaron, considerando el marco de Sowder y Harel (1998). En este sentido, destacamos una de las potencialidades de los problemas que involucran la determinación de un LG: al permitir identificar los esquemas de demostración que presentan los estudiantes, el profesor obtendría herramientas para saber cómo intervenir a fin lograr esquemas de demostración más elaborados.

Estas consideraciones nos aportan, además, información para el segundo objetivo planteado: en relación a si el abordaje de este tipo de problemas (LG) fortalece o no en los estudiantes la práctica de la demostración en matemática y en geometría, en particular. Los casos analizados, especialmente el 2 y el 3, dan indicios para sugerir que este tipo de actividades favorecerían en los estudiantes el desarrollo de razonamientos de tipo axiomático deductivo. Lo interesante de la propuesta es que ese tipo de razonamiento surge como necesidad intrínseca de la resolución del problema y no como una consigna que el docente tenga que realizar explícitamente (como sería el caso de las actividades en las que se pide "demuestre que ...").

Atendiendo a lo producido en el caso 1 por EP, se detectó que presentaba un esquema de demostración *empírico perceptivo*, según el modelo propuesto por Sowder y Harel (1998), y que su razonamiento estaba "estancado". Esto se debe a que, como vimos, EP se convencía de la validez de su razonamiento basándose exclusivamente en la percepción de la figura que había construido. El hecho de que la figura construida pareciera, a simple vista, una solución al problema no le permitió detectar su error, por lo que no pudo avanzar en su práctica demostrativa. Se pudo apreciar, entonces, que ese tipo de esquema –*empírico perceptivo*– representa un obstáculo difícil de sortear a la hora de transitar hacia un esquema de demostración más elaborado y que incluya razonamientos de tipo deductivo.

Por otro lado, se constató que otros alumnos presentan esquemas de demostración *empírico inductivos* (Sowder y Harel, 1998) y producen después demostraciones de tipo *analítico axiomáticas* (que involucran razonamientos de tipo deductivos). Éste fue el caso 2 de AR y JO descrito en este artículo. Para concluir que el centro de la circunferencia buscada debía pertenecer a una circunferencia concéntrica con la dada y de radio 3 cm mayor, debieron atravesar por una serie de ensayos y, a partir de varias figuras de análisis y manipulaciones sobre ellas, descubrieron lo que precisaban. Al justificar el resultado obtenido, lo hicieron mediante un esquema de demostración *analítico axiomático*.

Resulta interesante esta observación, ya que, en la práctica tradicional, al resolver este tipo de problemas, se exige a los estudiantes que lleguen a la solución razonando deductivamente sobre una única figura de análisis y se desestiman aquellas producciones en las que realizan varias figuras de análisis a partir de distintas posiciones para el punto variable. Sin embargo, esta experiencia sugiere que a estos estudiantes les fue útil ese procedimiento y no significó un obstáculo para producir demostraciones deductivas, sino que, por el contrario, representó una vía para alcanzar ese tipo de demostración. Los estudiantes comenzaron vivenciando la demostración en su papel de *descubrimiento* por medio de la inducción y profundizaron después ese proceso, haciéndose presentes los papeles de *explicación* de por qué el resultado es esa figura y no otra, y de *verificación* y *comunicación* de éste.

Observamos que, en la mayoría de los casos en los que se presentan esquemas de tipo analítico axiomáticos, ocurre que los estudiantes habían pasado previamente por un proceso de exploración, en el que se detecta un esquema de demostración de tipo empírico inductivo. A su vez, ésas son también las situaciones en los que la demostración se hace presente en una mayor variedad de funciones, como se puede comprobar en las producciones de AR y JO (caso 2) o en las de RS y SA (caso 3). Se podría entonces deducir que, a diferencia de lo que tradicionalmente se piensa –que el hecho de que el estudiante repita la figura en diferentes posiciones puede representar un obstáculo para producciones más elaboradas–, este tipo de esquema constituye un antecedente para una demostración de tipo axiomático deductiva.

Como se puede observar en las producciones de AR y JO (caso 2), la GD constituye una herramienta ideal para desarrollar el tipo de razonamiento empírico inductivo, ya que les permitió construir infinidad de posiciones para una figura en un tiempo muy reducido. El riesgo que algunos investigadores y profesores consideran –que el estudiante no aprende a desarrollar razonamientos deductivos por utilizar en exceso dichos programas (Mason, 1991; citado en Hanna, 2001)– se vería entonces reducido si generamos situaciones de aprendizaje en la que los estudiantes sientan como necesaria profundizar en el problema e intentar explicar lo que descubren.

En suma, de los esquemas de demostración propuestos por Sowder y Harel (1998), pudimos identificar en las producciones de los estudiantes a los *empíricos* y a los *analíticos*. No encontramos indicios significativos de esquemas de demostración externos entre estos estudiantes y con estas actividades planteadas. Esto podría sugerir otra potencialidad de este tipo de problemas: el tipo de propuesta estaría invitando a los estudiantes a construir argumentos propios (propios de esquemas de demostración empíricos o analíticos), dejando fuera de consideración los esquemas de demostración externos. También pudimos constatar la presencia de un esquema *fáctico*, según el modelo presentado por Flores (2007), lo que permitiría fortalecer su hipótesis acerca de la existencia de tal esquema de demostración. En cuanto a las funciones de la demostración, constatamos que se hicieron presentes en la actividad las cinco funciones consideradas por De Villiers (1993 y 2003).

Quedan ahora preguntas pendientes: ¿qué tipo de trabajo previo es necesario para que los estudiantes logren ir más allá de las demostraciones externas y empírico perceptivas, que son las que representan obstáculos para razonamientos más elaborados? ¿Mediante qué procesos los estudiantes pueden atravesar esa barrera? ¿En qué etapa de la escolarización se debe abordar?

En relación con el empleo de los LG como estrategia didáctica

La experiencia nos ha proporcionado pruebas de la relevancia del tema "lugares geométricos" para la formación matemática de los estudiantes en el desarrollo de la práctica de la demostración. Ahora, ¿por qué se considera relevante el estudio del tema y la explicitación de reflexiones elaboradas en torno a él?

La descripción de los tres casos analizados nos permite sugerir que involucra a la demostración desde múltiples papeles y permite detectar qué esquemas de demostración –en el sentido de Sowder y Harel (1998) o incluyendo nuevos esquemas (Flores, 2007)– presenta un estudiante, a fin de favorecer que logre desarrollar esquemas de demostración más elaborados. Este tipo de problemas ofrece a los estudiantes la oportunidad para ejercer la práctica de la demostración a partir de la necesidad de justificar resultados que ellos mismos elaboran. Éste puede constituir un acercamiento significativo a la demostración en geometría, hecho que refuerza nuestra hipótesis sobre la importancia del tratamiento del tema "lugares geométricos" en los programas oficiales.

Entendemos que esta investigación puede tener múltiples alcances: por un lado, puede ser significativa para los docentes, al constituir una herramienta para reconocer la importancia de identificar los esquemas de demostración de sus estudiantes y resignificar la práctica de demostración en el aula, así como considerar otras funciones alternativas a la verificación, que es la tradicionalmente utilizada. Por otro lado, creemos que puede representar un aporte para la confección de los programas, tanto para los contenidos curriculares como para las sugerencias metodológicas. En el artículo se esbozan indicios acerca de la importancia de la consideración de problemas de determinación de LG para el desarrollo de la práctica de la demostración en estudiantes de nivel medio superior y formación docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., C. Burgués y J. Fortuny (1997), *Invitación a la didáctica de la geometría,* Madrid, Editorial Síntesis.

Administración Nacional de Educación Pública, Consejo Directivo Central (1997), *La reforma de la educación. El currículum experimental en el plan piloto del ciclo básico,* Documento VII, Montevideo, Uruguay.

Balacheff, N. (1982), "Preuve et démonstration en mathématiques au collage", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 3, núm. 3, pp. 261-304.

Balacheff, N. y C. Laborde (1988), "Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo", en G. Mugny y J. A. Pérez (eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo,* Barcelona, Editorial Anthropos, pp. 265-288.

Buendía, G. (2004), "Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio socioepistemológico)", Tesis de doctorado inédita, Cinvestav, IPN, México.

Castañeda, A. (2006), "Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y Maria G. Agnesi", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 9, núm. 2, pp. 253-265.
Chevallard, Y. (1991), *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado,* Buenos Aires, Aique.
Dalcín, M. (2004), *"El desarrollo de un pensamiento deductivo en el bachillerato diversificado en un ambiente de geometría dinámica", Tesis de maestría inédita,* Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.
De Villiers, M. (1993), "El papel y la función de la demostración en matemáticas", *Epsilon,* núm. 26, pp. 15-30.
——— (2003), *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad,* Emeryville, CA, Key Curriculum Press.
Flores Peñafiel, A. (2005), "¿Cómo saben los alumnos que lo que aprenden en matemáticas es cierto?", *Educación Matemática,* vol. 17, núm. 3, pp. 5-24.
Flores, A. H. (2007), "Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato", *Educación Matemática,* vol. 19, núm. 1, pp. 63-98.
Hanna, G. (2001), "Proof, explanation and exploration: An overview", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 44, pp. 5-23.
Harel, G. (2001), "The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction", en S. Campbell y R. Zazkis (eds.), *Learning and teaching number theory,* Westport, CT, Ablex, pp. 185-212.
Harel, G. y L. Sowder (1998), "Student's proof schemes: Results from exploratory studies", *CBMS Issues in Mathematics Education, American Mathematical Society,* núm. 7, pp. 234-283.
——— (2005), "Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development", *Mathematical Thinking and Learning,* núm. 7, pp. 27-50.
Ibañes, M. (2001), *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato,* Tesis de doctorado, Universidad de Valladolid, España.
——— (2002), *Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de trigonometría en el bachillerato.* Recuperado de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Ibanes02.pdf el 9 de diciembre de 2010.
Molfino, V. (2006), "Lugares geométricos: ¿cuál es su papel en la enseñanza de la demostración en geometría?", Tesis de maestría inédita, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Sowder, L. y G. Harel (1998), "Types of Students' Justifications", *The Mathematics Teacher*, vol. 91, núm. 8, pp. 670-675.

DATOS DE LOS AUTORES

Verónica Molfino Vigo
Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay
veromolfino@gmail.com

Javier Lezama
CICATA, Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., México
jlezamaipn@gmail.com