

Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia

Elia Trejo Trejo y Patricia Camarena Gallardo

Resumen: En este artículo se informa una investigación en la que se realiza un análisis cognitivo a un grupo de enfoque, donde los estudiantes de una carrera técnica universitaria abordan los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto del balance de materia en situaciones problema de mezclas químicas.

El análisis cognitivo del grupo de enfoque se fundamenta en las teorías de los Campos Conceptuales y en la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Para el análisis se atienden, en particular, las representaciones que construyen los alumnos sobre las invariantes en el esquema de entendimiento y en el esquema de solución cuando enfrentan un problema de matemáticas contextualizadas. Durante el análisis del actuar de los estudiantes, surgen diferentes tipos de representaciones propias del contexto en el que se desarrolla la investigación, con lo cual se establece una propuesta de clasificación para estos tipos de representación.

Palabras clave: campos conceptuales, representaciones, matemática en contexto, matemáticas, química.

Cognitive analysis of problem situations with systems of algebraic equations in the context of the material balance

Abstract: In this article, a research that carries out the cognitive analysis of a focus group is reported, where students from a technical university career approach the systems of linear algebraic equations in the context of matter balance in problem situations of chemical mixtures.

The cognitive analysis of the focus group is based on the theories of Conceptual Fields and on the Mathematics in the Sciences Context. In order to do the analysis, special attention is placed in the representations built by students on the invariants in the understanding scheme and in the solution scheme, when facing a problem of contextualized mathematics. While analyzing students' acting, different types of own representations of the context arise during the development

Fecha de recepción: 25 de septiembre de 2010.

of the research, and consequently a proposal of classification for those types of representation settles down.

Keywords: conceptual fields, representations, mathematics in context, mathematics, chemistry.

INTRODUCCIÓN

Abordar eventos de las ciencias como un sistema químico, físico o un fenómeno natural, en el que se deben aplicar las matemáticas para su resolución, es tarea compleja, porque es necesario, por un lado, integrar los conocimientos y, por el otro, realizar un trabajo cognitivo en el que están implícitas actividades de análisis, donde las representaciones desempeñan un papel importante en los esquemas que se puedan formular sobre los eventos por enfrentar y, a través de ellas, se favorece la comprensión y el aprendizaje. En este sentido, Moreira (2002, p. 37) menciona que no aprehendemos del mundo directamente, sino que lo hacemos a partir de las representaciones que de ese mundo construimos en nuestras mentes.

Desde esta perspectiva, los alumnos no son recipientes pasivos de información sino constructores activos de su conocimiento, de tal manera que aprender matemáticas implica que sean capaces de utilizarlas para resolver eventos específicos de su área de formación profesional y laboral. Por consiguiente, como profesores, se identifican dos tareas por realizar en la práctica docente (Camarena, 1990, p. 36): *a)* fomentar la integración de conocimientos matemáticos en las ciencias específicas de la formación de los futuros profesionistas; *b)* conocer desde el punto de vista cognitivo lo que ocurre con los estudiantes cuando trabajan una matemática contextualizada.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Hay muchas acciones que favorecen la construcción del conocimiento en los estudiantes. Una de ellas está constituida por las actividades de aprendizaje y de enseñanza con una matemática contextualizada. Las investigaciones que se hagan respecto al proceso cognitivo de los estudiantes dan pauta para el diseño y rediseño de estas actividades didácticas en estudiantes de nivel superior y de carreras técnicas. Por otro lado, hay teorías específicas que abordan los procesos

cognitivos, como la teoría de Piaget (1991), la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1993), los campos conceptuales de Vergnaud (1991), las funciones cognitivas de Feuerstein (1980), entre muchas otras. El análisis que se realice con cada uno de los puntos de vista de cada teoría da un panorama enriquecedor de la actividad cognitiva de los estudiantes ante una matemática contextualizada. En este trabajo se informa la investigación que hace uso de los campos conceptuales de Vergnaud.

Así, el problema de investigación que se va a abordar trata la problemática de indagar cómo se lleva a cabo el proceso cognitivo de los estudiantes cuando enfrentan problemas contextualizados desde la perspectiva de los campos conceptuales de Vergnaud. Específicamente, interesan las representaciones que construyen los estudiantes de las invariantes operatorias utilizadas para abordar una situación problema. Es necesario señalar que, en esta investigación, se está entendiendo por invariantes operatorias las proposiciones que el sujeto sostiene como verdaderas en un cierto rango de situaciones y las categorías que posibilitan contar con elementos para obtener información adecuada al problema, tal como lo sugiere Vergnaud (1990). Para poder llevar a cabo el análisis, es necesario tomar conceptos y/o temas específicos tanto de la matemática como del contexto que se elija, de ahí la importancia de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, ya que permite vincular las matemáticas con diversas áreas del conocimiento. Por ser del interés de las autoras, se han seleccionado los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales como concepto matemático y, del contexto, se toma el balance de materia, específicamente la mezcla de soluciones químicas, inserto en la carrera de Técnico Superior Universitario en Tecnología de Alimentos. Así, la contextualización se establece entre la matemática y la química, y el análisis del actuar del estudiante se lleva a cabo teniendo en cuenta la vinculación entre estas dos ciencias, pues se trata de una investigación de corte cognitivo. Para el desarrollo de la investigación, se toman como fundamentos de la contextualización y del análisis, la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias de Camarena (1984) y los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990), respectivamente. Durante el análisis cognitivo de los estudiantes, se consideran las características de los esquemas y sus componentes (propósitos, reglas de acción e operatorias) que constituyen la representación de la situación problema realizada por un grupo de enfoque, por lo que se tiene la necesidad de recurrir a una propuesta de esquemas de representación y entendimiento, así como a formas de simbolización como las que realiza Flores (2003) en el marco de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud.

Luego, el objetivo de la investigación es describir el proceso cognitivo de un grupo de enfoque a través de analizar las representaciones que elaboran de las invariantes en los esquemas de entendimiento y solución de las situaciones problema que abordan los estudiantes en las que se vinculan los sistemas de ecuaciones algebraicas con el balance de materia.

MARCOS TEÓRICOS

Los marcos teóricos en los que se fundamenta la investigación, así como algunos aspectos generales del fenómeno por contextualizar se describen en seguida.

LA MATEMÁTICA EN CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

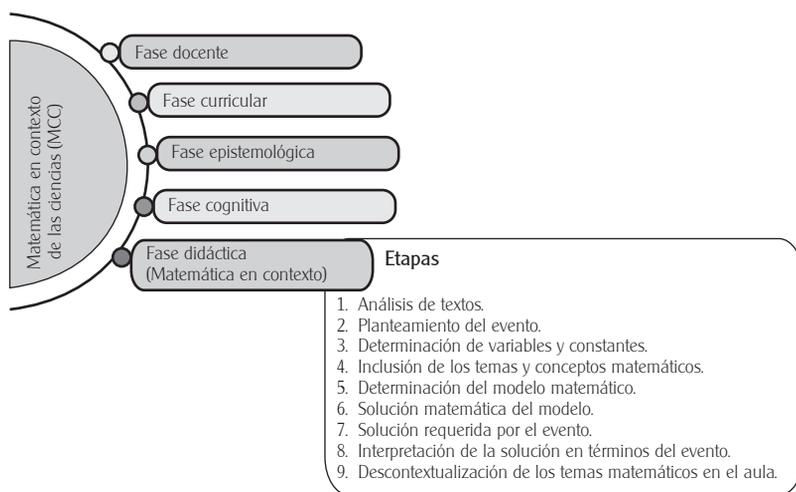
Usar y trabajar con matemáticas en una variedad de eventos y contextos es un aspecto importante de la competencia matemática (Camarena, 2000). Se reconoce que trabajar con cuestiones que llevan por sí mismas a un tratamiento matemático requiere la elección de métodos matemáticos y la organización de los contenidos por medio de representaciones y esto depende, con frecuencia, del tipo de actividades que se demandan en los eventos contextualizados. Al respecto, Camarena (1984, 1995) propone que, para apoyar la construcción del conocimiento matemático y en particular de conceptos matemáticos en el nivel superior, se necesita presentar un concepto a los estudiantes en diversos contextos del área de conocimiento de la carrera profesional, de situaciones de la vida cotidiana y de actividades de la vida laboral y profesional.

La matemática en el contexto de las ciencias (MCC) es una teoría que mira el proceso de enseñanza y aprendizaje como un sistema en el que intervienen el currículo, la cognición del estudiante, la epistemología de los temas y conceptos, los elementos relacionados con los docentes y la propia didáctica, que constituyen así las cinco fases de la teoría (figura 1): curricular, cognitiva, didáctica, docente y epistemológica (Camarena, 2000, p. 28).

La fase didáctica cobra especial interés, pues incluye una estrategia didáctica denominada matemática en contexto, que incorpora nueve etapas (figura 1). Las etapas 2, 3, 5, 6, 7 y 8 de la matemática en contexto son las acciones que lleva a cabo el estudiante para resolver el evento contextualizado, a fin de construir el modelo matemático y encontrar su solución. Por otro lado, a través del modelo

matemático se vincula la matemática con las demás ciencias de las carreras profesionales y técnicas en tratamiento. Se debe rescatar que, en la matemática en contexto, se posibilita el desarrollo de la teoría matemática de acuerdo con las necesidades y ritmo que dictan los cursos de las ciencias y disciplinas que apoya, pues una de sus principales funciones es trabajar con conocimientos integrados a través de eventos contextualizados en otras áreas del conocimiento del estudiante. Con este entendido, la matemática en contexto permite vincular el conocimiento matemático con otras ciencias, en particular, los sistemas de ecuaciones algebraicas con el balance de materia, principalmente en eventos de mezclado de soluciones químicas. Cabe mencionar que el análisis cognitivo de los estudiantes que se realiza en el presente artículo incide de manera directa en la fase cognitiva de la teoría.

Figura 1. Fases de la teoría MCC y etapas de la fase didáctica



LOS CAMPOS CONCEPTUALES

Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos lleva a considerar el aprendizaje de un concepto como el conjunto de situaciones problema que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y el conjunto de esquemas puestos en práctica por los sujetos en esas situaciones problema (Vergnaud, 1996, p. 145). El sentido del concepto matemático se

adquiere a través de los esquemas evocados por el sujeto individual para resolver una situación problema.

Con la idea anterior, un concepto matemático contextualizado adquirirá sentido mediante las actividades propias del contexto. Es necesario considerar que los conceptos no están aislados, están constituidos en una red y mantienen relaciones entre sí. Por esa razón, Vergnaud (1991, p. 147) define los campos conceptuales como “un conjunto de situaciones problema, conceptos, invariantes, esquemas y operaciones de pensamiento que se encuentran relacionadas entre sí para un área específica de conocimiento”. La teoría de los campos conceptuales (CC) permite el análisis cognitivo en las situaciones problema propuestas a los estudiantes mediante el análisis de las dificultades conceptuales, el repertorio de procedimientos disponibles y las formas de representación posibles.

Bajo la óptica de la teoría de campos conceptuales, el entendimiento de la acción del estudiante respecto a los conceptos involucrados y la estructura de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto de un fenómeno de balance de materia se centran en estudiar algunos aspectos de los esquemas mediante las representaciones de las invariantes que inciden directa o indirectamente en el conocimiento acerca de esta estructura matemática en situaciones problema en las que tiene lugar la vinculación de dos contextos: matemáticas y química. Cabe hacer mención de que las situaciones problemas consideradas por Vergnaud corresponden a los eventos contextualizados y a las actividades didácticas de la matemática en el contexto de las ciencias.

Para las representaciones, Vergnaud menciona que el estudiante transforma una acción sobre el objeto matemático, estableciendo control sobre sí mismo mediante las relaciones y clasificaciones en su realidad, de tal modo que se van presentando invariantes en el desarrollo del conocimiento; de esta manera, las representaciones para Vergnaud son todas aquellas herramientas, cualquier notación, signo o conjunto de símbolos que representa alguna cosa que constituye típicamente algún aspecto del mundo exterior o del mundo interior del individuo (incluida la imaginación), que es la misma concepción que han adoptado Moreira (2002) y Rico (2009).

Según Flores (2003), la explicación de Vergnaud sobre el esquema lleva al entendimiento de la relación entre el problema y el individuo que le da sentido y actúa en consecuencia. El esclarecimiento de cómo se coordinan y articulan los esquemas está dado por la representación que forma parte del proceso de dar significado y solucionar un problema.

Mediante reglas de acción e inferencias, se identifica el problema de que se trata y cuáles son las variables conocidas y desconocidas, dando origen al esquema

de entendimiento a partir del cual se llega al esquema de solución que, a su vez, conduce a la solución del problema. Con esta idea, el concepto de esquema de Vergnaud se analiza teniendo en cuenta los esquemas de entendimiento y solución que propone Flores (2002). De esta manera, en la presente investigación se muestra la descripción de la acción del estudiante en términos del estudio de sus representaciones, las cuales están categorizadas por estas dos clases de esquemas; ambas se caracterizan por invariantes operacionales específicas.

Con lo descrito, la investigación se apoya en la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias para vincular las matemáticas con otra área de conocimiento; se retoman elementos, como esquemas, de la teoría de campos conceptuales de Vergnaud y tipos de esquemas de entendimiento y solución propuestos por Flores para analizar el proceso cognitivo de los estudiantes (figura 2).

A continuación, se establece la clasificación de los esquemas de entendimiento y solución, así como las categorías de las representaciones otorgadas por Flores.

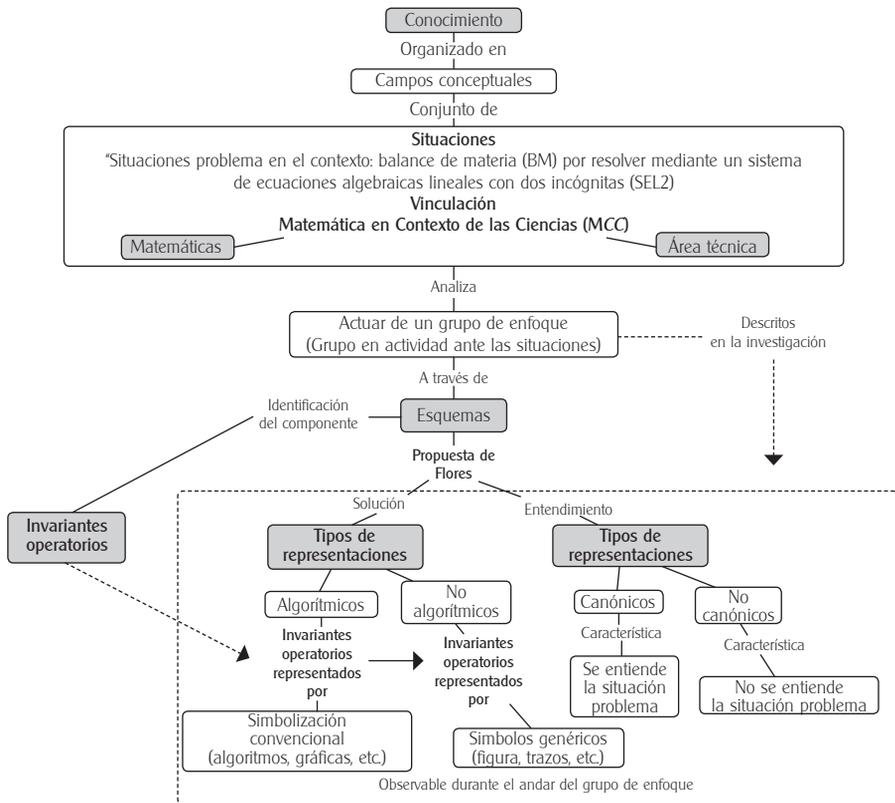
En el esquema de entendimiento se identifican: • Esquema canónico, donde los propósitos, las reglas de acción, las inferencias y las representaciones de las invariantes corresponden a una comprensión de la situación problema. • Esquema no canónico significa que los propósitos, las reglas de acción, las inferencias y las representaciones de las invariantes corresponden a una comprensión deficiente o inapropiada de la situación problema que están abordando.

Mientras que en el esquema de solución están: • Esquema algorítmico, donde se identifica la simbolización y el procedimiento convencional del mecanismo que se va a seguir para dar solución a la situación problema. • Esquema no algorítmico, donde se identifica el empleo de la simbolización espontánea para dar solución al problema.

La categorización de las representaciones de las invariantes en la construcción del conocimiento son:

- Categoría de representación no canónica no algorítmica. En el esquema de entendimiento el estudiante aplica el conocimiento de una clase de situaciones problema que no corresponde a la que se plantea. En el esquema de solución la simbolización es congruente con el significado no canónico atribuido, por lo que no llega a la solución correcta.
- Categoría de representación canónica no algorítmica. En el esquema de entendimiento se tiene un significado claro y congruente con el significado de la situación problema. En el esquema de solución se trata de encontrar una solución congruente con un entendimiento canónico, pero

Figura 2. Elementos considerados en la investigación



no se puede llegar a la solución correcta. En general, emplean simbolización espontánea para dar solución a la situación problema y esto los lleva a un mal camino de solución.

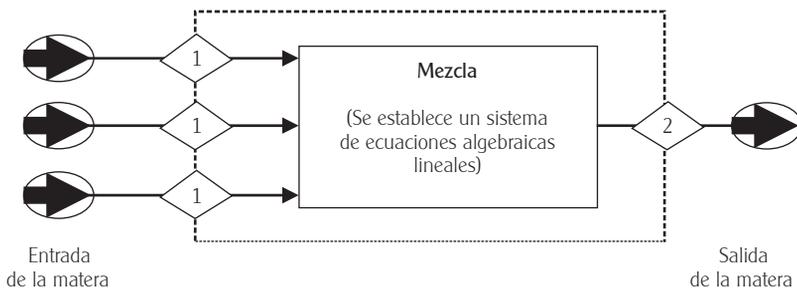
- Categoría de representación canónica algorítmica. En el esquema de entendimiento se tiene un significado claro y congruente con el significado de la situación problema, constituye un puente hacia la representación formal de la situación problema. En el esquema de solución, el estudiante puede utilizar las herramientas de la matemática formal para solucionar la situación problema, puede seleccionar procesos algorítmicos de solución correctos. Los estudiantes se aproximan a las invariantes mediante una simbolización convencional, teniendo un conocimiento sólido de éstas.

EL FENÓMENO DE ESTUDIO

El fenómeno de balance de materia se presenta en diversas actividades tanto del campo profesional como durante la formación del técnico superior universitario en tecnología de alimentos. Algunas de las actividades se localizan en la elaboración de productos como la estandarización de jugos, leche, mermeladas, néctares, por citar algunos. En estas actividades se tiene la misma base teórica, la ley de la conservación de la materia (Marique, 2005; Valiente, 2001), que señala que la masa es constante y, por tanto, la masa entrante en un proceso debe ser igual a la masa saliente, a menos que haya acumulación dentro del proceso. Dichos balances son una contabilidad de entradas y salidas de materiales de un proceso o de una parte de éste. Estos balances son importantes porque pueden utilizarse para el diseño del tamaño de los aparatos que se emplean y para calcular costos. Si la planta de producción trabaja, los balances proporcionan información suficiente sobre la eficiencia de los procesos.

Entre los procesos más comunes en que se debe realizar un balance de materia se encuentra la operación de mezclado, utilizada para preparar una combinación uniforme de dos o más sustancias que pueden ser sólidas, líquidas o gaseosas, o una combinación de éstas, con la que se pueden obtener productos que pueden ser finales o servir de punto de partida en la elaboración de alimentos (figura 3).

Figura 3. Balance de materia para un mezclado de sustancias



En esta investigación se trabaja, en particular, con una operación de mezclado de sustancias químicas azucaradas con una concentración porcentual, la cual puede modelarse mediante sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, estableciéndose así una vinculación entre dos áreas del conocimiento, matemáticas y química, para analizar el actuar de los estudiantes ante la situación planteada.

MÉTODO

El método utilizado para llevar a cabo el análisis del conocimiento de los estudiantes en torno al contenido conceptual de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto del balance de materia conlleva los siguientes bloques: 1) Contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el balance de materia, utilizando las etapas de contextualización de la matemática en contexto. 2) Determinación de las situaciones problema que se van a aplicar al grupo de enfoque. 3) Análisis del actuar de los estudiantes a través de sus representaciones de las invariantes de los esquemas de entendimiento y solución.

A partir de la contextualización del primer bloque metodológico, se derivan las situaciones problema que se van a determinar en el segundo bloque, las cuales se aplican a un grupo de enfoque para llevar a cabo el tercer bloque, el análisis cognitivo del actuar de los estudiantes (Trejo y Camarena, 2009).

LA MUESTRA

Se trabaja con un grupo de enfoque de dos estudiantes del primer cuatrimestre de la carrera de Técnico Superior en Tecnología de Alimentos, los cuales se encuentran cursando una asignatura de matemáticas que incluye el tema de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, así como un curso de química en el que se aborda el tema de balance de materia mediante el mezclado de soluciones químicas; ambos cursos están desvinculados curricularmente. El evento contextualizado que van a enfrentar es un fenómeno que se encuentra de manera recurrente en operaciones específicas del área de formación profesional y laboral del técnico en alimentos.

INSTRUMENTOS DE OBSERVACIÓN

La obtención de los datos para el análisis cognitivo se hace mediante la obtención de sus hojas de trabajo y filmaciones que ayudan a refutar o confirmar el análisis que se efectúa con la información escrita. El análisis es cualitativo y atiende las diferentes representaciones que hacen los estudiantes de las invariantes en los esquemas de entendimiento y resolución que construyen en su actuar ante situaciones problema.

IMPLEMENTACIÓN DE LAS SITUACIONES PROBLEMA

Las situaciones problema son llevadas a cabo por los estudiantes en el laboratorio de química en diferentes sesiones que cubren un total de doce horas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la presente sección se describen cada uno de los tres bloques que conforman el proceso de la metodología que se sigue en la investigación.

CONTEXTUALIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES EN EL BALANCE DE MATERIA

Las etapas de contextualización descritas en el apartado del marco teórico, que se encuentran inmersas en la estrategia didáctica de la matemática en contexto, constituyen el proceso metodológico que se utiliza para la contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales (SEL) en el balance de materia (BM) en eventos contextualizados (situaciones problema) de mezclas de soluciones.

En la fase didáctica de la matemática en el contexto de las ciencias, la contextualización es establecida por el docente antes de implementar la estrategia didáctica de la matemática en contexto, ya que esta contextualización lo dota de elementos para diseñar las actividades de aprendizaje de las etapas 4 y 9 de la estrategia, así como para tomar tiempos, ver necesidades de la infraestructura cognitiva y considerar posibles trayectorias de resolución.

Planteamiento del evento

El evento se construye en torno al fenómeno de balance de materia, seleccionando el mezclado de soluciones químicas de concentración porcentual, para lo cual es necesario realizar la mezcla de soluciones de concentración conocida para la obtención de una nueva solución en una concentración requerida. El evento contextualizado: se cuenta con 100 ml de solución azucarada al 60% y 100 ml de solución azucarada al 35%. A partir de estas soluciones, es preciso realizar una mezcla de ellas para obtener 100 ml de una solución azucarada al 50%.

Determinación de las variables y constantes del evento

Para una mejor comprensión del evento y poder establecer las variables y constantes, se elabora un diagrama de balance de materia donde se muestran las entradas y salidas del evento (figura 4).

Figura 4. Balance de materia para la mezcla de soluciones



En el evento, es necesario realizar una mezcla con dos sustancias cuyas concentraciones están dadas en porcentajes, la mezcla de ambas (salida) es una nueva sustancia con una concentración diferente de la de las sustancias de entrada. Una vez esclarecido el evento desde el punto de vista del contexto, se procede a determinar las variables y constantes de éste (cuadro 1); se observa que las variables están definidas por los mililitros de cada una de las soluciones que se van a mezclar; por otro lado, las constantes son las concentraciones con las que se inicia el evento y la concentración y volumen de la solución requerida.

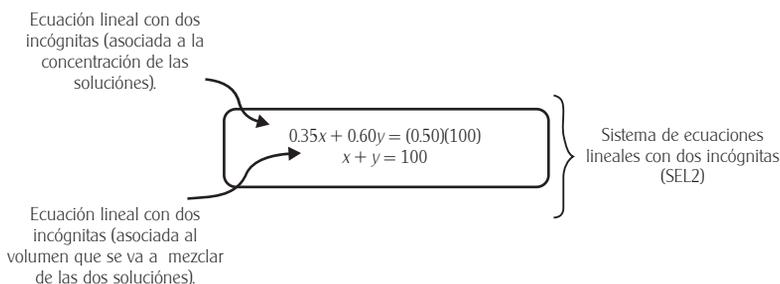
Cuadro 1. Variables y constantes del evento contextualizado

Variables	Constantes
x ml de solución al 35%	Concentración de solución azucarada al 35%
y ml de solución al 60%	Concentración de solución azucarada al 60%
	Volumen final = 100 ml
	Concentración final = 50%

Esta etapa permite una primera aproximación al entendimiento del problema en sí, cuyo propósito es procurarle un significado. El estudiante deberá utilizar reglas de acción e inferencias para identificar de qué problema se trata y decidir cuáles son las variables conocidas y desconocidas; se espera que este esquema permita la solución de la situación problema. Entonces, la descripción del actuar del estudiante en relación con lo que da significado al problema y posibilita llegar a

una solución será el estudio de sus representaciones, categorizadas como esquemas de solución y entendimiento, caracterizados por invariantes operacionales específicos.

Figura 5. Modelo matemático del fenómeno de balance de materia de soluciones azucaradas



Determinación del modelo matemático

Derivado de la comprensión del fenómeno de interés, con la determinación de variables y constantes se está en condiciones de establecer el modelo matemático que rige el fenómeno de balance de materia en la situación de mezcla de soluciones porcentuales. La salida consiste en 100 ml de solución azucarada al 50%, es decir, hay dos relaciones que involucran a las variables y constantes del evento. Una ecuación está relacionada con el volumen y la otra con la concentración, tal como se manifiesta en la figura 5, lo que da origen a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con dos incógnitas.

Solución matemática del problema

Por ser un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, hay diversos métodos de resolución, tanto de tipo algebraico como gráfico. A continuación se muestra un proceso de resolución algebraico. La selección del método de resolución del sistema se deriva de una investigación previa en la que se identificó que los profesores del área técnica señalan que utilizan con mayor frecuencia este método (Trejo y Camarena, 2009).

$$\begin{cases} 0.35x + 0.60y = 50 \\ (-0.35)x + (-0.35)y = 100(-0.35) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.35x + 0.60y = (0.50)(100) \\ x + y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.35x + 0.60y = 50 \\ -0.35x - 0.35y = -35 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 0.35x + 0.60y = 50 \\ + -0.35x - 0.35y = -35 \\ \hline 0 + 0.25y = 15 \end{array}$$

$$y = \frac{15}{0.25} = 60 \quad x = 100 - y = 40$$

Determinación de la solución requerida por el evento

En este caso particular, la solución matemática del sistema de ecuaciones lineales es única, lo que lleva a que sea la solución requerida por el evento, x = 40, y = 60.

Interpretación de la solución en términos del evento

Para la preparación de 100 ml de solución azucarada con una concentración de 50% a partir de una mezcla de soluciones al 35% y 60%, sólo existe una combinación que permite la mezcla. Se deben mezclar 40 ml de la solución al 35% y 60 ml de la solución al 60%.

El proceso de contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el balance de materia permite establecer la relación entre conceptos que pertenecen a dos áreas de conocimiento distintas y observar la estrecha relación que existe entre ambas. Asimismo, permite identificar las representaciones que puede generar la situación problema y proporciona a los estudiantes un conjunto de elementos que constituyen las siguientes invariantes operacionales presentes en la situación problema.

- a) Un sistema de ecuaciones lineales algebraicas con dos incógnitas determina la relación que existen entre dos variables, el volumen de agua (x) puede determinar la concentración (y) de una solución química.
- b) El balance de materia se muestra como un sistema de ecuaciones lineales algebraicas que debe mantener iguales la cantidad de producto que entra y la que sale, asociándolo con el sentido de igualdad.

De igual modo, durante la contextualización se identifican los conceptos matemáticos y contextuales que entran en juego, tales como ecuación algebraica, ecuación algebraica lineal, sistemas de ecuaciones, métodos de solución, balance de materia, concentraciones y mezclas de sustancias químicas.

DETERMINACIÓN DE LAS SITUACIONES PROBLEMA

La contextualización anterior da evidencia de los conceptos matemáticos y químicos involucrados en el evento contextualizado (situación problema), así como de las invariantes de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales (SEL2) en el contexto de un balance de materia (BM). Las invariantes del concepto de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto del balance de materia son los elementos teóricos y cognitivos clave que permiten al estudiante establecer las relaciones de conocimientos entre su estructura cognitiva y la realidad, se identifican a través de las representaciones que hacen de éstas. Las representaciones de las invariantes median la acción sobre la realidad, al igual que las formas de organización y estructuración de los diferentes conceptos de interés y los criterios de adquisición de sus significados.

Las situaciones problema, que corresponden al segundo bloque del proceso metodológico de la investigación, se construyen a partir del evento contextualizado y tienen por objeto que el estudiante analice el comportamiento lineal mediante la obtención de combinaciones de concentraciones y volúmenes, cada uno por separado, para posteriormente confrontarlo con la idea de manejar las dos variables de manera simultánea, así como la búsqueda del modelo matemático que representa el evento contextualizado (cuadro 2).

Es menester señalar que estas situaciones buscan reconocer el vínculo entre un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y la concentración de soluciones químicas.

Con lo anterior, se puede establecer el campo conceptual de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto de balance de materia. Como ya se

Cuadro 2. Situaciones problema y sus actividades

Evento contextualizado	
Se cuenta con 100 ml de solución azucarada al 60% y 100 ml de solución azucarada al 35%. A partir de estas soluciones, se desea obtener 100 ml de una solución azucarada al 50%.	
Situación 1. Mezcla de soluciones químicas desde el volumen.	Actividad. Mezclar las dos soluciones químicas para obtener como resultado 100 ml de solución (no considerar la concentración de la solución sólo el volumen).
Situación 2. Mezcla de soluciones químicas desde la concentración.	Actividad. Mezclar las dos soluciones químicas para obtener como resultado una solución con una concentración de azúcar al 50% (no considerar el volumen de la solución sólo la concentración).
Situación 3. Mezcla de soluciones, considerando volumen y concentración.	Actividad. Con las soluciones dadas, 100 ml al 35% y 100 ml al 60%, realizar una mezcla para obtener 100 ml de una nueva solución con una concentración al 50%.

mencionó en la sección del marco teórico, el campo conceptual está constituido por las situaciones problema, los conceptos, las invariantes y los esquemas.

ANÁLISIS DEL ACTUAR DE LOS ESTUDIANTES A TRAVÉS DE SUS REPRESENTACIONES

Las situaciones problema determinadas en el bloque anterior se implementan en el grupo de enfoque de estudiantes del Programa Educativo de Técnico Universitario en Tecnología de Alimentos, para dar paso al tercer bloque del análisis cognitivo.

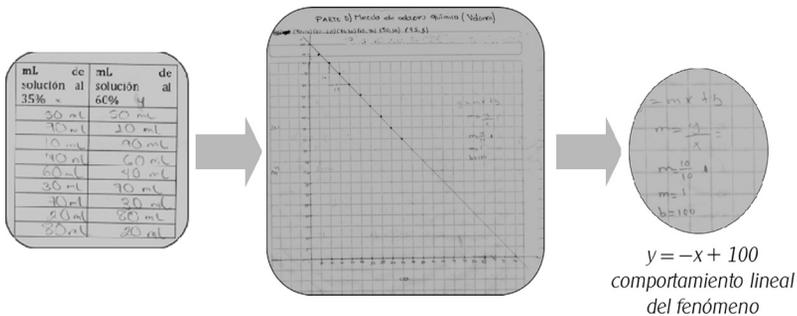
Como se ha venido señalando, el actuar de los estudiantes se analiza a través de las representaciones que hacen de las invariantes en los esquemas que construyen, en particular, el esquema de entendimiento y el esquema de solución, según lo que propone Flores (2002).

En seguida se describen los resultados obtenidos después de analizar los documentos escritos y las filmaciones del actuar del grupo de enfoque.

Para las situaciones problema 1 y 2, el grupo de enfoque determina la gráfica del fenómeno de estudio y obtiene la ecuación que representa dicha gráfica. Se detecta que el esquema de entendimiento es canónico, es decir, se entiende

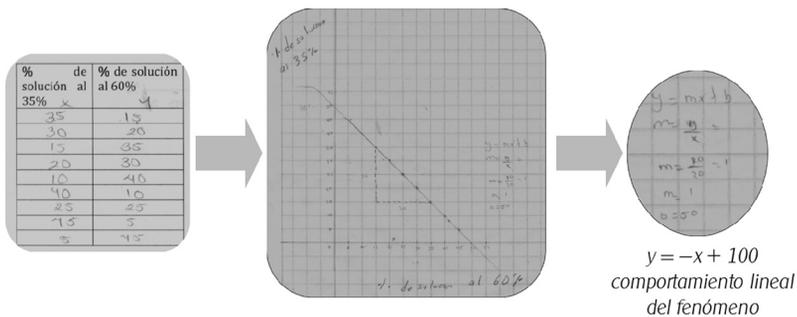
la situación problema en el contexto en que se presenta, tal como se observa en las evidencias de las figuras 6 y 7, donde se muestran las representaciones que realizan los estudiantes. El esquema de solución es algorítmico, es decir, se obtiene la solución, lo que se puede observar en las mismas figuras 6 y 7. Con lo anterior, se tiene una categoría de representación canónica algorítmica.

Figura 6. Situación 1, categoría de representación canónica algorítmica



Para la situación problema 3, cuyo grado de dificultad es mayor que la de las anteriores, se observan tres intentos de solución por parte de los estudiantes.

Figura 7. Situación 2, categoría de representación canónica algorítmica



En el primer intento, se identifica un menor dominio de la situación problema, pues el grupo de enfoque utiliza un esquema de entendimiento no canónico con una estrategia de “ensayo y error”, es decir, prueban diferentes combinaciones de las dos soluciones para obtener la solución pedida, para lo cual van verificando dicha concentración con el refractómetro, instrumento utilizado en el labo-

ratorio para determinar el porcentaje de azúcar en la solución (figura 8). A pesar de contar con el instrumento de medición, se percatan de que es difícil encontrar la combinación correcta y que esto representa, además, una inversión de tiempo, lo que implica que tienen un esquema de solución no algorítmico. Sin embargo, la falta de conceptualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto dificulta la solución de una actividad que, a simple vista, parece sencilla. Así, en el primer intento tienen una categoría de representación no canónica no algorítmica.

Figura 8. Representación no canónica no algorítmica



Obtención de la mezcla por
"Ensayo y error"

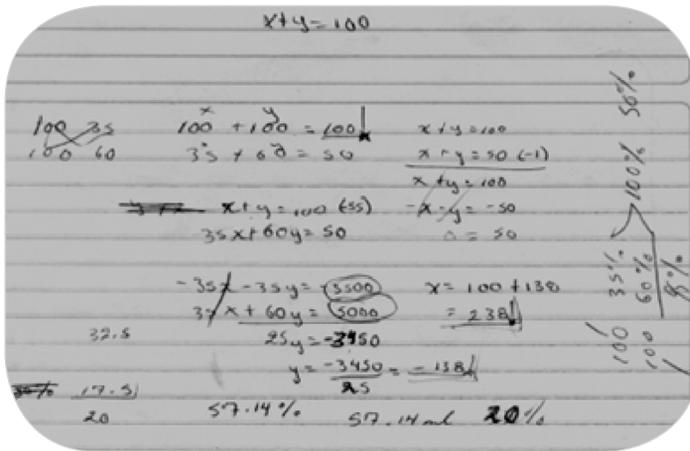


Comprobación de la mezcla
con el refractómetro

En el segundo intento, el grupo de enfoque tiene necesidad de recurrir a sus conocimientos previos y tratar de formular una expresión matemática que los ayude, lo que los lleva a establecer un esquema de entendimiento en apariencia canónico. Sin embargo, al tratar de establecer el sistema de ecuaciones algebraicas lineales con dos incógnitas, no formulan las ecuaciones que lo integran de manera adecuada, lo que los lleva a resultados con valores negativos y mayores que los volúmenes requeridos (figura 9). Luego hacen un planteamiento y solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales incorrecto, así, continúan con un esquema de solución no algorítmico. Esto posibilita la reflexión sobre la interpretación en el contexto de ese tipo de resultados. Por tanto, continúan con una categoría de representación no canónica no algorítmica.

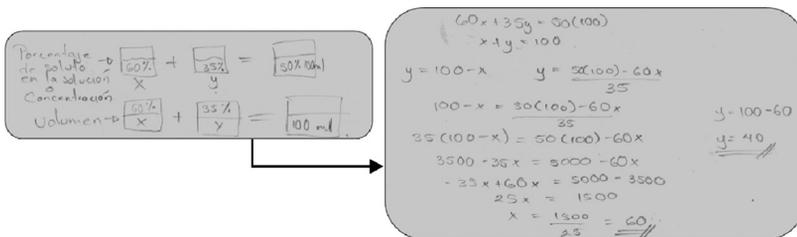
Después, en el tercer intento, se ven en la necesidad de ajustar nuevamente sus conocimientos; el grupo de enfoque detecta que el uso de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales resulta más útil y económico en tiempo que el de ensayo y error; por lo cual, muestran interés en el planteamiento y uso de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales como herramienta para resolver la situación problema (figura 10). De esta manera, pasan a un esquema de entendimiento

Figura 9. Categoría de representación no canónica no algorítmica



canónico y a un esquema de solución algorítmico, es decir, en este tercer intento llegan a una categoría de representación canónica algorítmica.

Figura 10. Categoría de representación canónica algorítmica



Es menester señalar que, durante las actividades en las situaciones problemas que surgen de la contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales con el balance de materia, se detectó en el actuar de los estudiantes el uso recurrente de diferentes tipos de representaciones que se consideran específicas y propias de la vinculación de dos áreas del conocimiento, es decir, que pueden o no surgir en otras vinculaciones.

Por consiguiente, además de las categorías de representación analizadas con la clasificación de Flores, y por la importancia que tuvieron las representaciones

encontradas para la construcción del conocimiento de dos ciencias vinculadas, fue necesario definir una clasificación de los tipos de representaciones encontrados, la cual se expresa a continuación.

Representación de tipo proposicional (P): se considera como la descripción que el estudiante hace del evento, en primera instancia, en su propio lenguaje (lenguaje natural), desde el punto de vista cognitivo le es de utilidad al estudiante para entender la actividad que va a realizar. Puede utilizar algunos conceptos aislados de la matemática, la ciencia química u otras disciplinas, sin lograr articularlos. El propósito general es comunicarse y tratar de entender el evento por resolver.

Representaciones figurativas no operativas (FNO): es cuando el estudiante percibe la información del evento, pero si se le pide que represente por escrito la situación, hace dibujos, tratando de ver la vinculación entre las dos áreas del conocimiento, sin embargo, esto no le permite un procedimiento de resolución. Para el evento particular que se ha abordado en esta investigación, una vez que el grupo de enfoque entiende las actividades en su lenguaje, procede a realizar algunos dibujos (o figuras) del área del contexto, en los que se percibe que existe comprensión sobre qué es lo que se pide. Sin embargo, no logran pasar de estas figuras a una expresión escrita que posibilite la solución del evento dado, es decir, aún no logran la vinculación entre las dos áreas del conocimiento.

Representaciones figurativas operativas (FO): el estudiante continúa realizando dibujos, pero ya tiene en cuenta la información numérica. Por tanto, el dibujo puede servir como soporte para la resolución del evento sin algoritmos. Nuevamente, en el experimento que se presenta en este documento, el grupo de enfoque realiza de manera recurrente esquemas (figuras) que representan el balance de materia de las actividades planteadas; éstos les permiten, por un lado, entender las variables y constantes involucradas y, por el otro, les sirven para dar paso a la representación simbólica que permite la resolución del evento. Así, en este momento se inicia la comprensión de la vinculación entre las dos áreas del conocimiento.

Representaciones analógicas (AN): el estudiante conserva la información pertinente para resolver el evento y simplifica la información utilizando símbolos, puntos, taches, uso de imágenes. Utiliza la experiencia en la resolución de eventos anteriores para resolver el nuevo, al menos parcialmente, con un procedimiento muy primitivo y de alcance muy local; es decir, se consideran los procedimientos de eventos similares para verificar si son de ayuda en la resolución del nuevo evento. Apoya al entendimiento para la solución del evento. La representación analógica puede ser utilizada después de la proposicional e, incluso, después de la figurativa no operativa, y es cuando el estudiante hace referencia a procesos

que le parecen similares al que se enfrenta y que le pueden ser de utilidad para la comprensión y resolución del evento. Su búsqueda por eventos similares le permite apoyar la comprensión incipiente de la representación anterior.

Representaciones simbólicas (S): se ha considerado que estas representaciones constituyen un medio para identificar con mayor claridad los objetos matemáticos para su conceptualización y la conceptualización del contexto. El estudiante traduce el enunciado de un evento a una representación matemática: aritmética, algebraica, analítica o gráfica. Esta representación se considera como experta y permite dar la respuesta solicitada. Se considera que se obtienen conocimientos que pueden utilizarse en diferentes contextos. El grupo de enfoque ha transitado por las representaciones anteriores, hace uso de una representación simbólica (puede ser gráfica, aritmética o algebraica) que le permite integrar los conocimientos tanto matemáticos como del contexto para dar una solución adecuada al evento planteado. Esta representación, para el caso de la investigación, ha sido considerada como la que permite el dominio de los conceptos de interés.

En términos generales, se observa que los diferentes tipos de representación de las invariantes desempeñan un papel importante en la resolución de las situaciones problema que se han planteado a los estudiantes. La resolución de las situaciones problema se caracterizó por pasar a través de diferentes tipos de representación hasta llegar a una representación simbólica y obtener un resultado satisfactorio de las situaciones problema. De igual manera, en el actuar de los estudiantes se detectó que, para que el grupo de enfoque resolviera las situaciones problema y construyera su conocimiento, tanto las categorías de representaciones, propuestas por Flores, como los tipos de representación, encontrados durante la investigación y considerados propios de la vinculación de dos ciencias, se fueron desarrollando de manera gradual conforme se iba logrando la conceptualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales del contexto del mezclado de sustancias químicas (figura 11). Adicionalmente, se posibilita en el alumno el desarrollo de habilidades para resolver nuevos eventos contextualizados que le sean planteados.

Como se ha mencionado, el grupo de enfoque transita por los diferentes tipos de representaciones hasta llegar al simbólico, con lo cual tienen la posibilidad de construir su propio conocimiento en torno al fenómeno de estudio que vincula conceptos matemáticos y de las ciencias. Por esta razón, la generación de la representación simbólica se analizó con mayor profundidad y se identificaron tres procesos relacionados, en los que están presentes los otros tipos de representación que permiten su construcción (figura 12).

Figura 11. Categorías de representaciones y tipos de representación

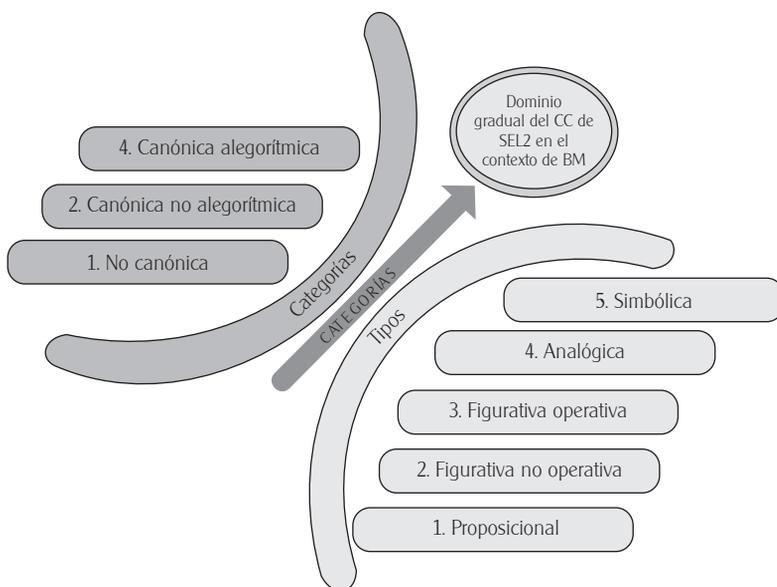
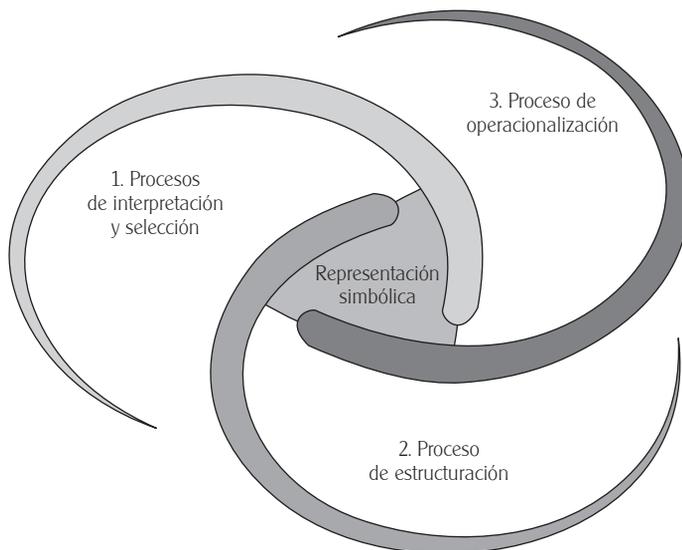


Figura 12. Procesos presentes en la construcción del conocimiento



Proceso de interpretación y selección: a partir de la situación problema (evento contextualizado), en donde se considera como parte fundamental el contexto, el grupo de enfoque realiza una selección de información que le parece pertinente, en ella se consideran los conocimientos anteriores disponibles y se traduce la información en algún tipo de representación, como por ejemplo la algebraica (sistemas de ecuaciones lineales), la aritmética (regla de tres simple), la tabular (tablas de datos) o la gráfica, incluso una representación figurativa operativa (figura 13).

Figura 13. Proceso de interpretación y selección

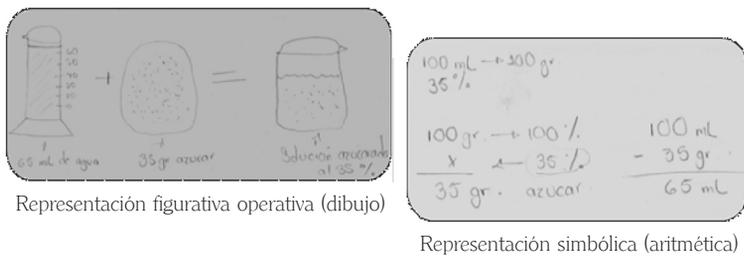
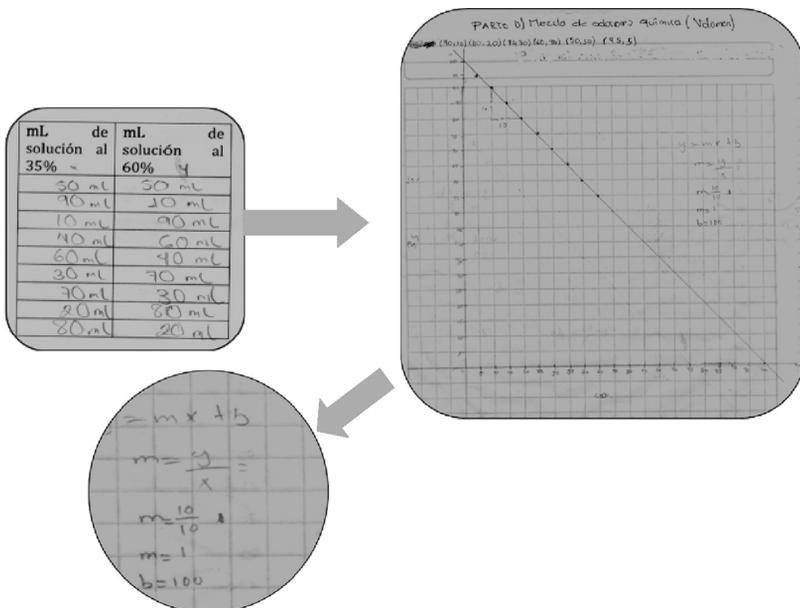


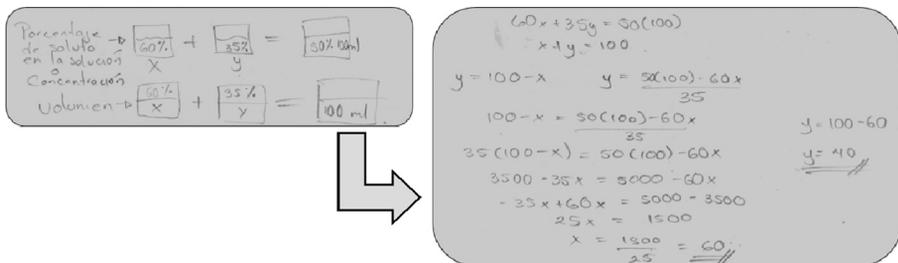
Figura 14. Proceso de estructuración



Proceso de estructuración: aquí otra vez intervienen los conocimientos previos, se recurre a las analogías con eventos previamente resueltos y que se asemejan al propuesto; al parecer, los eventos resueltos con anterioridad se almacenan en la memoria y forman parte de los conocimientos puestos en funcionamiento por el grupo de enfoque; asimismo, los procedimientos y las estrategias puestas en marcha sufren una reestructuración y avanzan progresivamente conforme van haciendo intentos de resolución (figura 14).

Proceso de operacionalización: es cuando se manipulan las representaciones y el grupo de enfoque logra la resolución del evento contextualizado planteado. Se identifica que, durante este proceso, el grupo de enfoque aplica los conocimientos operativos que provienen de su experiencia y, de esta manera, formula procedimientos o estrategias. En este proceso, los conocimientos previos del grupo de enfoque desempeñan un papel importante, pues permiten modelar el evento y trabajar con el modelo matemático mediante modos de representación simbólica más operacionales que el proposicional (figura 15).

Figura 15. Proceso de operacionalización



CONCLUSIONES

A partir de la investigación, se observa que se ha buscado contribuir al entendimiento de la construcción del conocimiento del estudiante ante un contenido conceptual derivado de la vinculación entre dos contextos diferentes: matemáticas y área técnica del campo de acción de un técnico superior en Tecnología de Alimentos. El análisis mostrado se ha abordado atendiendo la acción del estudiante frente a la resolución de eventos contextualizados y actividades de enseñanza con sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto del balance de materia,

las cuales constituyen un medio de análisis sobre el que se describe la construcción del conocimiento.

El estudio del actuar del grupo de enfoque se ha realizado mediante los esquemas mentales de entendimiento y solución; sin embargo, se considera necesario incidir e identificar otros esquemas establecidos por los estudiantes. Éste es un estudio de carácter cognitivo que utiliza como marco teórico de análisis los campos conceptuales de Vergnaud, desarrollados inicialmente para investigaciones en la educación básica y que ha sido retomado para explicar un fenómeno contextualizado en el nivel técnico superior universitario. Lo anterior posibilita la definición de criterios para la elaboración de diseños de enseñanza que faciliten la construcción del conocimiento de los conceptos de referencia.

Durante el desarrollo de las actividades realizadas por el grupo de enfoque, se identificaron las categorías de representación de Flores; sin embargo, éstas no fueron suficientes para describir el actuar de los estudiantes ante una matemática contextualizada; fue necesario definir tipos de representaciones, los cuales surgieron de manera espontánea durante el actuar de los estudiantes. Si bien al final de las sesiones los estudiantes disponen de esquemas apropiados para enfrentar eventos contextualizados que requieren sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, es necesario explorar más acerca de esto, sobre todo en contextos diferentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Camarena, G. P. (1984), "El currículo de las matemáticas en ingeniería", en *Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN*, México.
- (1990), *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*, México, ESIME-IPN.
- (1995), "La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería", ponencia presentada en el XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.
- (2000), Informe del proyecto de investigación titulado: "Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería", México, ESIME-IPN.
- Duval, R. (1993), "Semiosis y noesis", en E. Sánchez y G. Zubieta (eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa*, México, Sección de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, pp. 118-144.

- Feuerstein, R., Y. Rand, M. B. Hoffman y R. Miller (1980), *Instrumental Enrichment*, Baltimore, University Park Press.
- Flores, R. (2002), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación*, Tesis de Doctorado en Educación, Aguascalientes, Ags., México.
- Marriqué, V. J. A. (2005), *Termodinámica*, 3a. ed., México, Alfaomega.
- Moreira, M. A. (2002), "Mental models and conceptual models in the teaching and learning of science", *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, Porto Alegre, vol. 3, núm. 2, pp. 37-57.
- Piaget, J. (1991), *Introducción a la epistemología genética, el pensamiento matemático*, España, Paidós (Psicología Evolutiva).
- Rico, L. (2009), "Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática", *PNA*, vol. 4, núm. 1, pp. 1-14.
- Trejo, T. E. y G. P. Camarena (2009), "Problemas contextualizados: una estrategia didáctica para aprender matemáticas", en P. Lestón (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, México, Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, pp. 831-841.
- Valiente, A. (2001), *Problemas de balance de materia y energía en la industria alimentaria*, 2a. ed., México, Limusa.
- Verganud, G. (1991), *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México, Trillas.
- (1996), "The Theory of Conceptual Fields", en L. Stette, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (eds.), *Theories of Mathematical Learning*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 219-240.

DATOS DE LAS AUTORAS

Elia Trejo Trejo

Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital, México
elitret@hotmail.com

Patricia Camarena Gallardo

Instituto Politécnico Nacional, México
pcamarena@ipn.mx