Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado

Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria

Cristina Ochoviet y Asuman Oktaç

Resumen: En este trabajo, presentamos algunos resultados de investigación en torno a la producción de ecuaciones con base en condiciones dadas y la comprensión del concepto de variable en un contexto de resolución de ecuaciones por parte de estudiantes uruguayos del nivel secundario. Los resultados muestran algunas de las dificultades que presentan para formular ejemplos de ecuaciones conociendo sus raíces, las estrategias que ponen en juego para determinar si ciertos números dados son o no raíces de una ecuación y el problema de comprender que una ecuación de segundo grado con una incógnita puede tener dos raíces diferentes, aspectos que ponen de manifiesto ciertas facetas del largo proceso de adquisición del concepto de variable.

Palabras clave: ecuación de segundo grado, raíz, variable, propiedad del producto nulo.

Some aspects of the development of algebraic thinking: the concept of variable root and second-degree polynomial equations

Abstract: We present research results in relation with equation producing given certain conditions, and understanding of the concept of variable in the context of equation solving, by secondary level Uruguayan students. Our results demonstrate some of the difficulties that students have with formulating examples of equations given their roots, the strategies that they use in order to determine if certain given numbers are roots of an equation, and the problem of understanding that a second degree equation with one unknown can have two different roots; aspects that illustrate some facets of the long process of the acquisition of the variable concept.

Keywords: second degree equation, root, variable, null product property.

Fecha de recepción: 9 de junio de 2009

INTRODUCCIÓN

Diversos trabajos de investigación informan las dificultades de los estudiantes con el concepto de variable (Küchemann, 1981; Booth, 1984; Wagner, 1983; Arcavi, 1994; Kieran, 1984; Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Ursini y Trigueros, 2006). Estos estudios proporcionan evidencia acerca de las diferentes maneras en que los estudiantes interpretan la variable en los distintos contextos y niveles educativos. En este trabajo nos ubicamos específicamente en torno a la producción de ecuaciones con base en condiciones dadas y la comprensión del concepto de variable en un contexto de resolución de ecuaciones por parte de estudiantes uruguayos del nivel secundario.

Los resultados que presentamos en este trabajo forman parte de una investigación más amplia que abarcó diversos aspectos del pensamiento algebraico en torno a la propiedad del producto nulo.[1] La investigación fue realizada en Uruguay con estudiantes del nivel secundario y del nivel terciario. Parte de los resultados obtenidos se informa en Ochoviet y Oktaç (2009), donde se discuten tres fenómenos relacionados con el uso de dicha propiedad:

1. Las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver ecuaciones de la forma $(ax + b)(cx + d) = 0$,[2] poniendo particularmente la atención en los estudiantes que, pese a conocer la propiedad del producto nulo, no reconocen en estas ecuaciones su aplicabilidad.
2. Un error que cometen los estudiantes cuando verifican las raíces de una ecuación de la forma antes descrita. Este error consiste en la sustitución simultánea de la incógnita por dos valores distintos,[3] cuestión que irremediablemente conduce al estudiante al éxito, ya que obtiene una proposición de la forma $0 \cdot 0 = 0$, que es verdadera.
3) La generalización de la propiedad del producto nulo de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hubiesen recibido instrucción específica al respecto.

El análisis de la problemática abordada se realizó desde una perspectiva

[1] Si el producto de dos números reales es cero, entonces uno u otro número real es igual a cero.

[2] Trabajamos con ecuaciones de segundo grado dadas en forma factorizada y con dos raíces reales y distintas.

[3] Por ejemplo, si el estudiante encontró las raíces 3 y 9 de la ecuación $(2x - 6)(18 - 2x) = 0$ por algún procedimiento, al momento de verificar, observamos que varios estudiantes realizaban la siguiente sustitución: $(2 \cdot 3 - 6)(18 - 2 \cdot 9) = 0$.

amplia, tomando elementos del *Modelo 3 UV* (Trigueros y Ursini, 2003), de la *Teoría de la Intuición* (Fischbein, 1987) y de la noción de *compartimentalización* (Vinner, 1990).

Algunos de los resultados obtenidos en relación con el primer fenómeno indican que, cuando los estudiantes de $14 - 15$ años enfrentan una ecuación de la forma $(ax + b)(cx + d) = 0$, optan por aplicar la propiedad distributiva y obtienen una ecuación que no pueden resolver porque no conocen aún la fórmula que resuelve la ecuación de segundo grado. En algunos casos los estudiantes no reconocen en la ecuación el producto de dos números reales que es igual a cero y, por ello, no aplican la propiedad del producto nulo, y en otros, los estudiantes confían en que un proceso algorítmico (hacer "cuentas") los conducirá a la solución del problema. Los estudiantes de 17-18 años prefieren desarrollar la expresión polinómica y aplicar la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado, que a esta edad sí está disponible. Estos estudiantes no reconocen en la aplicación de la propiedad del producto nulo un procedimiento más simple. Los estudiantes del nivel terciario, estudiantes de profesorado de matemática, optaron sin dificultad por la aplicación de la propiedad del producto nulo para resolver la ecuación propuesta.

Algunos de los resultados relativos al segundo fenómeno muestran que el proceso de verificación de una ecuación no es sencillo para los estudiantes de enseñanza secundaria. Muchos creen que, para verificar las raíces de una ecuación de segundo grado que está dada en forma factorizada, deben sustituir cada una de las raíces en uno de los factores, logrando así que ambos factores valgan cero. Si bien muchos estudiantes reconocen que alcanza con que un factor sea cero para que el producto valga cero, se sienten más seguros de que han hallado las raíces de la ecuación si obtienen una expresión de la forma $0 \cdot 0 = 0$.

En relación con el tercer fenómeno, los estudiantes de nivel terciario (mayores de 21 años con edades variadas) mostraron cierta tendencia a generalizar la propiedad del producto nulo a estructuras algebraicas donde no es válida, como por ejemplo el ámbito de las matrices. Esto podría deberse a que la reiterada aplicación de la propiedad del producto nulo en el contexto de los números reales favorecería la formación de un prototipo basado en las características externas de orden sintáctico sin tener en cuenta la semántica de los objetos matemáticos involucrados. Este prototipo actuaría como un modelo mental en la toma de decisiones de los estudiantes en situaciones que involucran expresiones del tipo $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = 0$.

ESTE TRABAJO

En el presente trabajo, nuestra intención es ofrecer algunas interpretaciones sobre los resultados obtenidos en diferentes ejercicios en los que se propone reflexionar sobre el concepto de raíz de una ecuación de segundo grado[4] a estudiantes del nivel secundario, y que no han sido aún informados. Nos concentramos particularmente en preguntas que piden construir una ecuación a partir de sus raíces, averiguar si los valores dados son raíces de una ecuación (completa o incompleta) dada y decidir qué valores pueden sustituirse en los números tapados en una ecuación factorizada de segundo grado. Creemos que las estrategias usadas arrojan información valiosa sobre el pensamiento de los estudiantes con los que trabajamos. Los datos que presentamos son los que reflejan el trabajo de 14 alumnos de 17-18 años y 14 de 14-15 años; niveles que guardan entre sí una diferencia de tres años de escolaridad. Esto nos permitió observar diferencias, similitudes, preferencias en las estrategias empleadas y, fundamentalmente, apreciar la evolución del pensamiento de los estudiantes en ese periodo de forma general. Vale aclarar que el estudio no fue realizado observando a los mismos estudiantes luego de un periodo de tres años, sino a dos grupos de estudiantes que guardaban esa diferencia de años en los niveles que cursaban. Los cuadros que aparecen más adelante se realizaron mostrando el número de estudiantes en cada categoría. No se creyó necesario usar porcentajes, ya que los dos grupos de estudiantes tienen igual número de elementos.

Los estudiantes de 14-15 años habían estudiado las ecuaciones de primer grado y las ecuaciones de segundo grado dadas en forma factorizada que podían resolver aplicando la propiedad del producto nulo. No habían estudiado la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado. También habían estudiado los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los estudiantes de 17-18 años habían estudiado las ecuaciones de primer grado y en forma completa las de segundo grado. Conocían la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado y estaban terminando, en el momento en que se les aplicó el cuestionario, un curso de análisis matemático, en el que abordaron el estudio de funciones reales, límites, continuidad y derivabilidad.

[4] Puede consultarse el cuestionario completo en el anexo.

METODOLOGÍA

El cuestionario que se presenta en el anexo fue aplicado a dos grupos de estudiantes con las características antes mencionadas. A fin de evitar que los estudiantes corrigieran lo que iban realizando, las preguntas se fueron entregando una por una: al devolver una pregunta contestada, se le entregaba al estudiante la siguiente. Las preguntas fueron contestadas por escrito de manera individual. Al finalizar esta instancia, se realizaron diez entrevistas que fueron audiograbadas con el propósito de profundizar en el pensamiento de los estudiantes.

En las preguntas del cuestionario se presentaron diversas situaciones. En algunos casos, el estudiante debía resolver una ecuación de segundo grado dada de manera factorizada. En otros casos, se le solicitaba producir una ecuación conociendo sus raíces. En otras, se le preguntaba si ciertos números reales dados eran raíces de una ecuación dada. En el caso en que se pedía resolver una ecuación de segundo grado presentada en forma factorizada, se utilizaron factores con diferente forma, como por ejemplo los del tipo $(x + c)$ o los del tipo $(ax + b)$ con a distinto de 1, para observar si una determinada estructura del binomio favorecía más que otra la aplicación de la propiedad del producto nulo.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Para explicar el hecho de que un estudiante que conoce la propiedad del producto nulo no la aplique a la resolución de ecuaciones, no sólo cuando es la herramienta más adecuada, sino también cuando es la única herramienta disponible, utilizamos el concepto de *compartimentalización* que presenta Vinner (1990).

> Por "compartimentalización", me refiero a situaciones en las que dos piezas de conocimiento (o información) que son conocidas por un individuo y que deberían ser conectadas en el pensamiento de la persona permanecen, no obstante, sin relacionarse (Vinner, 1990).

Desde el punto de vista psicológico, la *compartimentalización* está más cerca del concepto de olvido que cualquier otro fenómeno. Sin embargo –aclara Vinner (1990)–, no es lo mismo que el olvido. No es como olvidar un número de teléfono o una dirección. Se habla de *compartimentalización* cuando esperamos que cierto detalle específico sea evocado en la mente de cierta persona, porque ese detalle es relevante en lo que la persona está pensando, pero resulta que éste no es evocado. Este autor habla de que la mente no actuó de manera eficiente, pues de haberlo hecho, todas las cuestiones relevantes que guardan relación con lo que la persona está pensando deberían haber sido evocadas en el mismo momento que la idea principal. Si la mente del individuo es eficiente, entonces todas las asociaciones relevantes a ese estímulo deberían hacerse. Cuando el cerebro no realiza la asociación esperada, podríamos estar ante el fenómeno de *compartimentalización*. Este fenómeno puede dar lugar a un comportamiento ineficiente. Es relevante señalar que una asociación que se ha hecho en la mente de una persona es algo que va más allá del control de ella misma. La persona enfrenta un estímulo. Si su mente es eficiente, entonces todas las asociaciones relevantes al estímulo deberían ser realizadas. Lamentablemente, se tiene muy poca información sobre cómo se almacenan los conocimientos en la mente, cómo se recuperan y cómo se logran las asociaciones necesarias frente a la resolución de un problema.

Para explicar el caso de los estudiantes que, teniendo conocimiento de estructuras con divisores de cero, manifiestan una fuerte tendencia a generalizar la propiedad del producto nulo a estructuras donde no es válida, utilizamos la *Teoría de la intuición* presentada en Fischbein (1987).

Fischbein, en su trabajo, utiliza el término intuición como equivalente a *conocimiento intuitivo,* no es una fuente de conocimiento, no es un método para conocer, es un tipo de cognición. Por ejemplo, se admite *intuitivamente* que el camino más corto entre dos puntos es el segmento que los une, que todo número natural tiene un sucesor, que el todo es mayor que cada una de sus partes, que un cuerpo caerá si no se lo sostiene, etc. Fischbein afirma que en la matemática, y en la ciencia en general, existen dos tipos de conocimientos o cogniciones, aquellos que son autoevidentes y los que están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta. Los primeros se denominan intuitivos y los segundos, lógicos. Las cogniciones intuitivas se caracterizan por ser autoevidentes, en el sentido de que no requieren pruebas para convencer, ya sean formales o empíricas. Son estables en el tiempo; si son contradictorias con lo formal, es necesaria una retroalimentación permanente del conocimiento para que no sustituyan al conocimiento correcto. Son globales en el sentido de que no son producto de un análisis y no provienen de razonamientos analíticos.

Una de las principales características de las intuiciones es su resistencia a cambiar, su rechazo a admitir alternativas. Existen mecanismos que favorecen la perseverancia de las intuiciones. Uno de los principales es el de la experiencia. La experiencia implica un cierto grupo de restricciones y condiciones, pero también ofrece numerosas oportunidades de confirmar y reforzar las creencias correspondientes.

Debido a las características de los conocimientos intuitivos, la intuición puede considerarse como un obstáculo cuando la inmediatez de un resultado inhibe el proceso de análisis necesario para dar una respuesta adecuada. A veces, la teoría formal es incongruente con las intuiciones y se pueden presentar problemas en el momento de tener que resolver una determinada tarea. Si la intuición contradice los aspectos formales, será difícil llegar a una solución adecuada del problema. Entonces, la necesidad de armonizar la intuición y los aspectos formales surge como una necesidad básica en la enseñanza de la matemática. El objetivo principal se situaría en la superación de conflictos, construyendo una correcta relación entre intuición y actitud teórica, o sea, una complementariedad entre el conocimiento formal y el intuitivo.

La larga experiencia del alumno con la propiedad del producto nulo y su aplicación en el ámbito de la resolución de ecuaciones polinómicas en el conjunto de los números reales, unido a la escasa presencia de casos donde no es válida, permite a los estudiantes confirmar la validez de la propiedad una y otra vez, confiriéndole a ésta la característica de estabilidad, propia de un conocimiento intuitivo. Esto podría contribuir a que los estudiantes generasen un modelo de pensamiento basado en cierta información inicial (validez de la propiedad en cierto contexto) que se mantiene impermeable a evidencias que no son congruentes con la información que poseen (cuando se presentan contextos donde la propiedad no es válida). Fischbein y Schnarch (1997) señalan que, en la búsqueda de coherencia para nuestra organización cognitiva, los individuos suelen generar impresiones globales sobre la base de cierta información inicial y organizarlas en estructuras aparentemente coherentes que se mantienen impermeables a evidencias que no son congruentes con la información que poseen. De modo que, en el caso de los estudiantes que han recibido instrucción específica sobre estructuras con divisores de cero, se aprecia igualmente una fuerte tendencia a generalizar la propiedad del producto nulo.

La propiedad en la que nos hemos centrado y su validez en las estructuras algebraicas que se le presentan al alumno constituyen el contacto inicial del estudiante con un tipo de estructuras que pueden generar un modelo de pensamiento. Este modelo condiciona las respuestas del alumno y tengamos en cuenta, como ya mencionamos, que la inmediatez de un resultado (respuesta intuitiva) puede inhibir el proceso de análisis necesario para arribar a una respuesta correcta.

Trigueros y Ursini (2003) ofrecen un marco conceptual para comprender el desarrollo del lenguaje algebraico y su uso en diferentes situaciones mediante lo que han denominado *Modelo 3 UV*. Reconocen diferentes usos de la variable que están relacionados con diferentes concepciones del álgebra escolar, por ejemplo, aritmética generalizada, resolución de problemas, estudio de relaciones y funciones, estudio de estructuras. Establecen que, en la enseñanza del álgebra elemental, aparecen esencialmente tres usos del concepto de variable: como una incógnita, como un número genérico y como variables en una relacional funcional. Según estas autoras, se podría argumentar que una incógnita no es la manifestación de una variable porque representa un valor determinado; sin embargo, ellas consideran que la primera percepción de un símbolo literal cuando se está trabajando en álgebra es, o debería ser, la de un símbolo que representa cualquier valor y que sólo en una segunda instancia puede definirse su papel en la expresión.

Las autoras identifican cuáles son las capacidades básicas necesarias para una comprensión del concepto de variable, capacidades que se pondrán en juego al enfrentar la resolución de problemas y ejercicios en contexto algebraico. Respecto de la variable como incógnita, consideran que hay ciertos aspectos básicos que caracterizan su comprensión. Por ejemplo, es necesario reconocer en una situación, problema o ecuación, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado usando como información la que se presenta en la ecuación o en el problema. Para ello, será necesario ser capaz de representar las entidades desconocidas de manera simbólica y plantear expresiones algebraicas para describir las relaciones entre los datos dados. Los datos podrían relacionarse mediante una única ecuación o a veces con varias. Cuando se enfrentan ecuaciones, dadas o construidas, es necesario ser capaz de realizar manipulaciones algebraicas para encontrar el o los valores de la incógnita o incógnitas que satisfacen la ecuación. Es también importante ser capaz de sustituir la incógnita por el o los valores obtenidos para verificar que se obtiene una proposición verdadera.

Para desarrollar la comprensión de la variable como un número genérico, un prerrequisito es la habilidad de reconocer patrones y encontrar o deducir reglas generales. Para realizar esto satisfactoriamente, es necesario distinguir los aspectos invariantes de los que son variables. Es necesario también ser capaz de introducir símbolos para representar proposiciones generales, reconocer un símbolo como representando un objeto indeterminado y manipular expresiones que involucran variables como números genéricos donde no se requiere asignarles ningún valor específico, como cuando se opera con polinomios.

Para entender las variables en una relación funcional, es necesario reconocer situaciones donde la correspondencia entre las variables y la variación están presentes. Estas situaciones pueden involucrar información dada en tablas, gráficas, expresiones analíticas o lenguaje verbal, es decir, que la diversidad de registros estará presente. En cada una de estas representaciones, es importante reconocer correspondencias entre variables y la manera como la variación de una de ellas incide en otra. El reconocimiento de una relación implica la capacidad de ver que cada variable puede tomar diversos valores posibles dependiendo del intervalo donde la relación está definida. La habilidad de determinar la correspondencia entre las variables se refleja en la capacidad de determinar el valor de una de las variables cuando las otras son conocidas, lo que sería el cálculo de imágenes o de preimágenes. En general, para calcular preimágenes, es necesario plantear ecuaciones, de modo que las diferentes concepciones de la variable aparecen entrelazadas en la resolución de problemas. La habilidad de trabajar con variación se puede observar en la capacidad para determinar intervalos o reconocer cuándo la función crece o decrece, es positiva o negativa, tiene un máximo o un mínimo, etc. También es necesario ser capaz de representar la información usando diferentes registros de representación y transitar entre ellos. Cuando se requiere una expresión analítica, es necesario introducir símbolos para nombrar las variables relacionadas y distinguir estas expresiones de ecuaciones.

Trigueros y Ursini observan que las prácticas docentes no hacen énfasis en la distinción entre cada uno de los usos y, por tanto, resulta difícil para los estudiantes diferenciarlos. Sostienen que la enseñanza debería hacer énfasis en la distinción entre los diferentes usos de la variable con el objetivo de que los estudiantes puedan integrarlos en una única entidad conceptual: la variable.

Este marco teórico describe los aspectos básicos involucrados en el entendimiento de la variable como un concepto polifacético. Apunta a las dificultades específicas que tienen los estudiantes con cada uno de los usos de la variable y que determinan su éxito o fracaso en el aprendizaje del álgebra escolar y en tópicos matemáticos más abstractos. Las autoras señalan que un buen entendimiento del concepto de variable implica poner en juego todos los aspectos señalados y la capacidad de relacionarlos con el correspondiente uso de la variable. Frente a un problema matemático, los estudiantes deben ser capaces de interpretar el uso de la variable que el problema demanda y poder transitar de manera flexible entre los diferentes usos de la variable, integrándolos en un único objeto matemático. El uso de símbolos para realizar cálculos, para plantear propiedades y para expresar relaciones ayudará a los estudiantes a comprender el uso de la variable en la resolución de problemas. Los tres usos de la variable y los aspectos que ponen en evidencia su entendimiento por parte de los estudiantes aportan una herramienta útil para analizar las estrategias de los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas.

CONSTRUIR UNA ECUACIÓN A PARTIR DE SUS RAÍCES

Preguntas que piden al estudiante construir una fórmula, una situación, una ecuación o un problema a partir de cierta información dada requieren una comprensión conceptual y no pueden contestarse algorítmicamente, ya que se ponen en juego las propiedades de los objetos matemáticos involucrados. En el caso de ecuaciones, algunos conceptos involucrados se relacionan con el significado del signo de igualdad, los diferentes significados y usos de la variable, solución y métodos de resolución.

Varias investigaciones han mostrado que muchos estudiantes interpretan el signo de igualdad como una indicación para realizar una operación en lugar de un símbolo que muestra la equivalencia de dos expresiones (véase por ejemplo Kieran, 1981). Asimismo, se ha mostrado que esta interpretación influye en el desempeño de los estudiantes al resolver ecuaciones (Knuth y cols., 2006). Esta interpretación también se fortalece a través de los libros de texto, donde rara vez se incluyen operaciones en ambos lados de la igualdad (McNeil y cols., 2006).

Para Schoenfeld y Arcavi (1988), es difícil ver la incógnita como una variable, ya que, en general, para las personas, variable refiere a algo que varía o que toma múltiples valores. El término incógnita parece estar asociado a un valor específico que no se conoce, pero que puede determinarse, como es el caso de la incógnita x en la ecuación $3x + 2 = 5x - 4$. Los autores agregan que, en esta ecuación, x no es variable, porque toma un solo valor (que en este ejemplo es 3). En este sentido, como ya mencionamos anteriormente, Trigueros y Ursini (2003) plantean que, en un contexto algebraico, la primera interpretación de un símbolo literal debería ser el de un número general que representa cualquier valor y que, luego, en un segundo momento, se establecería su papel en la expresión como incógnita.

Según Linchevski y Herscovics (1996), en el contexto de las ecuaciones, las letras pueden ser entendidas como un contenedor que se sustituye por un número o como un número desconocido y esto posibilita verlas en un nivel más accesible que cuando se trabaja en el contexto de las expresiones algebraicas.

Para estos autores, sustituir la letra por un número en el contexto de las ecuaciones tiene más sentido para los estudiantes que la sustitución en una expresión algebraica, porque está relacionado con la búsqueda de un número apropiado a una situación.

En relación con la construcción de una ecuación a partir de sus raíces o soluciones, cuando Papaieronymou (2007) pidió a los estudiantes dar "una ecuación que tiene 2 como solución", obtuvo las siguientes respuestas:

$$\begin{aligned} 1 + x &= 2 \\ 1 + 1 &= 2 \\ 12 - x &= 2 \\ 10 \div x &= 2 \end{aligned}$$

En las respuestas se puede observar que estos estudiantes identifican el concepto de solución con el valor que aparece en el lado derecho de la ecuación, en lugar de pensarlo como el valor de x que satisface la ecuación.

Ahora veamos cómo contestaron nuestros alumnos a las dos preguntas que pedían construir una ecuación a partir de una raíz o dos raíces dada(s).

10) Escribe una ecuación que tenga raíz 8. ¿Cómo lo haces?

Edad	*No contestan*	*Resuelven con éxito*	*La ecuación encontrada no tiene raíz 8*
14 – 15 años	1	11	2
17 – 18 años	0	12	2

Los alumnos de 17-18 años presentan ecuaciones de segundo grado con mayor frecuencia que los de 14-15 años, aunque parecería que en ambos niveles la ecuación que prefieren presentar los estudiantes es una de primer grado. En el siguiente cuadro, se puede observar además, que las ecuaciones presentadas por los alumnos más pequeños son menos "estructuradas" que las de los más grandes. Con esto queremos decir que los más pequeños se permiten presentar, por ejemplo, expresiones no igualadas a cero o ecuaciones ingeniosamente sencillas como $4 + 4 = x$, donde además la incógnita aparece en el segundo miembro. Este resultado contrasta con los resultados obtenidos en otras investigaciones, donde los estudiantes no aceptan la ocurrencia de la incógnita a la derecha del signo de igualdad debido a la interpretación del significado de este signo. Tampoco aparecen errores del tipo mencionado anteriormente, observado en Papaieronymou (2007). Creemos que el uso de la palabra *raíz* en lugar de *solución* para referir a la incógnita puede tener que ver con estos fenómenos.

	Correctas	*Incorrectas*
Ejemplos de ecuaciones que tienen raíz 8, presentadas por estudiantes de 14-15 años (correctas o incorrectas)	$x - 8 = 0$ $8 - x = 0$ $4 + 4 = x$ $16 - 8 = x$ $x + 2 = 10$ $-2 + 2x = 14$ $x + 8 = 16$ $2x + 3 = 19$ $(x - 8)x = 0$	$x + 50 + 14 = x$ $\sqrt{8} = 1{,}8x + 3{,}2$
Ejemplos de ecuaciones que tienen raíz 8, presentadas por estudiantes de 17-18 años (correctas o incorrectas)	$2x^2 - 16x = 0$ $x(x - 8) = 0$ $x - 8 = 0$ $2x - 16 = 0$ $16 - 2x = 0$ $4x - 32 = 0$	$x^2 = 8$ $128x^2 - 2 = 0$

En los alumnos de 14-15 años, la ecuación $x + 2 = 10$ tuvo 3 ocurrencias. En los alumnos de 17-18 años, la ecuación $x(x - 8) = 0$ tuvo 3 ocurrencias, la ecuación $x - 8 = 0$ tuvo 4 y la ecuación $2x - 16 = 0$ tuvo 2.

La mayoría de los estudiantes no explican cómo lo hacen, pero entre los que dan argumentos tenemos:

Trabajo presentado por el estudiante	*Argumento*
$2 \cdot (8) = 16$ $2x - 16$ $2x - 16 = 0$	"Multiplico la raíz 8 por algún número" "le resto el resultado del paso anterior"
$x - 8 = 0$	"En vez del 8 pongo la *x* y le resto 8 para igualarlo con 0"
$x + 2 = 10$ $x = 10 - 2$ $x = 8$	"Pensé en dos números que al restarse me diera 8"
$8 - x = 0$	"Busco el número opuesto a 8"
$16 - 8 = x$	"Busqué un par de números que restándolos o sumándolos o haciendo una operación me diera 8"

Vemos que la estrategia general consiste en pensar operaciones con números reales cuyo resultado sea el número deseado. Es decir, que la fuente de la cual los estudiantes obtienen significado para elaborar la ecuación parece ser la estructura numérica de referencia (Kieran, 2006). La incógnita es interpretada como un número que estará determinado por las condiciones impuestas a la operación planteada; además, los estudiantes son capaces de introducir un símbolo para designar la incógnita y usarlo para plantear la ecuación de acuerdo con lo que pide el problema.

LA VARIABLE EN EL CONTEXTO DE RESOLVER UNA ECUACIÓN

Vayamos ahora a otra de las preguntas:

11) Escribe una ecuación que tenga por raíces 4 y 3. ¿Cómo lo haces?

Con la ocurrencia de la incógnita más de una vez en la ecuación, el manejo del concepto de variable se vuelve más importante. Según Radford y Puig (2007), una de las dificultades encontradas en el aprendizaje del álgebra tiene que ver con "la comprensión de la manera distintiva con que signos simples (por ejemplo "x", "n") y signos compuestos (por ejemplo, "2 + 5" o "x + 17") reemplazan a los objetos que representan".

Vaiyavutjamai y cols. (2005) informan que, en el contexto de ecuaciones factorizadas de segundo grado, "muchos estudiantes no se dieron cuenta de que, si una variable apareció dos veces en una ecuación, entonces tuvo que tener el mismo valor en los distintos `lugares´ donde apareció". Cuando Vaiyavutjamai y Clements (2006) pidieron resolver ecuaciones del tipo $(x - 3)(x - 5) = 0$, la mayoría de los estudiantes respondieron correctamente diciendo que 3 y 5 son soluciones. Sin embargo cuando se les pidió verificar estas soluciones, los estudiantes reemplazaron la primera x por 3 y la segunda por 5 de la siguiente manera: $(3 - 3)(5 - 5) = 0$. Durante la entrevista, estos estudiantes dijeron que las dos x representaban diferentes variables y, por consiguiente, creían que podían tomar diferentes valores. Los autores piensan que una posible explicación puede estar relacionada con la interpretación que hacen los estudiantes de lo que generalmente dice el maestro: las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones diferentes.

Este mismo fenómeno se observó también en el contexto de ecuaciones de primer grado. Filloy y Rojano (1984) observaron que algunos estudiantes, cuando resolvían ecuaciones de primer grado tal como $x + 5 = x + x$, pensaron que la x que aparece en el miembro izquierdo de la ecuación puede ser cualquier número, pero la segunda x en el miembro derecho tiene que ser 5. En un estudio para ilustrar esta concepción errónea, Fujii (2003) utilizó expresiones tales como $x + x + x + x = x$ y $x + x + x = 12$. En el primer caso se preguntó a los estudiantes si la expresión era correcta y, en el segundo caso, tuvieron que elegir posibles respuestas correctas entre tres elecciones dadas. Cuando entrevistaron a aquellos estudiantes que pensaron que la ecuación $x + x + x + x = x$ puede ser correcta preguntando si "x no tiene que ser el mismo número", un estudiante respondió: "No tiene que ser la misma cosa. Es una variable" (Fujii, 2003). Al mismo estudiante que eligió (2, 5, 5) y (10, 1, 1) como soluciones aceptables para la ecuación $x + x + x = 12$ se le preguntó si $x + x + x$ se puede reemplazar por 3x y él contestó:

> Se puede, pero también puede ser incorrecto. Depende de a qué es igual la x, porque x puede ser igual a 10, la primera x, y luego la segunda x puede ser igual a 2 (Fujii, 2003).

Según Fujii (2003, refiriendo a Van Engen, 1961a, b), esta concepción errónea se debe a que algunos estudiantes consideran solamente el aspecto *no específico* del concepto de variable, y el aspecto *definitivo*, el cual está en tensión con el otro, no está presente.

Veamos nuestros resultados sobre el problema 11:

Edad	*No contestan o no concluyen*	*Resuelven con éxito*	*La ecuación encontrada no tiene por raíces 4 y 3*
14-15 años	**5**	**3**	**6**
17-18 años	**1**	**12**	**1**

Los estudiantes del nivel $17 - 18$ años presentaron en su inmensa mayoría la ecuación $(x - 4)(x - 3) = 0$ y muy pocos explican lo que hacen. Los estudiantes de $14 - 15$ años emprenden diversas y sorprendentes estrategias que no siempre los conducen a un resultado exitoso. Sin embargo, poseen argumentos que dan sentido al trabajo que realizan. A continuación veremos un cuadro con algunas de las ecuaciones presentadas, la edad de los estudiantes y su argumento.

Edad	*Trabajo presentado por el estudiante (correcto)*	*Trabajo presentado por el estudiante (incorrecto)*	*Argumento*
17-18 años	$(x-4)(x-3)=0$		"Busco ecuaciones por las cuales al sustituir x por 4 y por 3 me dé 0"
17-18 años	$(x-4)(x-3)=0$		"Los opuestos son las raíces"
17-18 años	$(x-4)(x-3)=0$		"Escribo un producto que tenga 2 soluciones y que a cada factor si le sustituyo por la raíz me dé por lo menos un factor 0"
14-15 años	$(x-4)(\ x-3)=0$		"Realizo una ecuación donde esté la x y el opuesto a 4 y 3"
14-15 años	$2x \cdot 1 = 2x$ $2x \cdot 1 = 2x$ $2 \cdot 4 \cdot 1 = 2 \cdot 4$ $2 \cdot 3 \cdot 1 = 2 \cdot 3$ $8 = 8 \qquad 6 = 6$		Sin argumento en lenguaje verbal
14-15 años		$(x-4)(y-3)=0$	"Busco los números opuestos a 4 y 3"
14-15 años		$(x+3)=(y+1)+1$	Sin argumento
14-15 años		$2x+3x=18$	"Pensé en una suma entre 2 números multiplicados uno por 4 y otro por un 3"
14-15 años		$3+2x=9$ $4+2x=12$ $2x=9-3$ $2x=12-4$ $2x=6$ $2x=8$ $x=6/2$ $x=8/2$ $x=3 \qquad x=4$	Sin argumento en lenguaje verbal
14-15 años		$x+1+x4+2=19$ $\mathbf{4}+1+\mathbf{3}\cdot 4+2=19$ $5+12+2=19$ $19=19$	Sin argumento en lenguaje verbal

En la tabla se ha distinguido *Sin argumento en lenguaje verbal* de *Sin argumento* para diferenciar el caso del estudiante que presenta una explicación en lenguaje simbólico y el que no presenta más que la ecuación.

En las ecuaciones presentadas por los estudiantes de 14-15 años, se observa el uso de ecuaciones con dos incógnitas, las ecuaciones con una sola incógnita a la que asignan valores diferentes en términos distintos y el uso de dos ecuaciones diferentes, donde cada una de ellas satisface una de las condiciones pedidas. También observamos en este nivel el uso de la verificación como elemento de control sobre la tarea realizada.

Los estudiantes que presentaron una ecuación lineal con dos incógnitas perdieron de vista que las soluciones a dichas ecuaciones son infinitos pares ordenados de números reales de la forma (x, y) y no números reales. Aunque esto último debemos precisarlo desde el punto de vista formal, creemos valioso destacar que, cuando el alumno verifica el par (3, 4), sustituye en la x el real 3 y en la y el real 4, cuestión que seguramente lo lleva a pensar en los reales 4 y 3 como raíces de la ecuación.

La estudiante que presenta la ecuación $2x \cdot 1 = 2x$ considera una ecuación cuyo conjunto solución es R y por tanto admite las raíces 4 y 3. Como la pregunta no especifica diciendo "únicamente raíces 4 y 3", se consideró correcta la respuesta dada.

Concentrémonos ahora en el caso de Luz, estudiante de 15 años, que es la que presenta el siguiente planteo:

$$\begin{aligned} x + 1 + x4 + 2 &= 19 \\ \mathbf{4} + 1 + \mathbf{3} \cdot 4 + 2 &= 19 \\ 5 + 12 + 2 &= 19 \\ 19 &= 19 \end{aligned}$$

Ella da su solución al problema, avalando la posibilidad de que la x tome distintos valores en distintos términos. Esta misma estudiante comete, más tarde, el error que estábamos observando, cuando resuelve la pregunta 15:

¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación $(2x - 12)(5x - 10) = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

Luz escribe y contesta así:

$$\begin{aligned} (2 \cdot 6 - 12)(5 \cdot 2 - 10) &= 0 \\ (12 - 12)(10 - 10) &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 \cdot 0 &= 0 \\
0 &= 0 \\
&\text{Sí}
\end{aligned}
$$

En todo su trabajo, avala la posibilidad de que la incógnita tome distintos valores en una misma expresión. Lo podemos observar también en la pregunta 16:

¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación $(2x - 10)(3x - 8) = 0$?

La estudiante realiza el siguiente planteo, pero no da una respuesta verbal al problema:

$$
\begin{aligned}
(2 \cdot \mathbf{5} - 10)\ (3 \cdot \mathbf{4} - 8) &= 0 \\
(10 - 10)\ (12 - 8) &= 0 \\
0 \cdot 4 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Del análisis de las preguntas 15 y 16, podríamos interpretar que esta estudiante piensa que, para que un producto sea cero, los dos factores deben ser cero y, por ello, tiene dudas y no da una respuesta a la pregunta 16. Sin embargo, contesta correctamente a las preguntas 14 y 18 de acuerdo con el nivel que cursa.

14) ¿Es 7 raíz de la ecuación $(3x - 21)(x - 3) = 0$? Explica tu respuesta.

Luz plantea y contesta así:

$$
\begin{aligned}
(3 \cdot 7 - 21)\ (7 - 3) &= 0 \\
(21 - 21)\ (4) &= 0 \\
0 \cdot 4 &= 0
\end{aligned}
$$

18) i) Se sabe que $b \cdot d = 0$, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información? ii) ¿qué representan para ti b y d?

Luz responde: *"Son números y me parece que aunque sea uno tiene valor 0 y el otro puede tener otro número cualquiera. Si no, puede ser que tengan los dos valores 0."*

La alumna reconoce números en los símbolos y puede determinarlos con base en la restricción que presenta la pregunta.

Para Luz es muy natural asignarle valores distintos a la x en una misma expresión. Y lo hace tanto en las expresiones factorizadas como en las desarrolladas. Veamos la solución que ofrece esta estudiante a la pregunta 17:

¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

$$\mathbf{3}^2 - 7 \cdot \mathbf{4} + 12 = 0$$
$$9 - 28 + 12 = 0$$
$$+\,21 - 28 = -7$$
$$-\,7 \neq 0$$

El error que comete Luz en la doble asignación de valores a la incógnita parecería situarse en que, al existir dos raíces, entonces deben estar las dos presentes en el proceso de verificación. Esto se puede interpretar como un error lógico, es decir, el problema estaría situado en cómo conciliar "4 **y** 3 son las raíces" con la lógica de una expresión algebraica en donde $x = 4$ **o** $x = 3$. Luz debe dar un salto en la comprensión de la lógica necesaria para el trabajo algebraico. Quizás la lógica de las situaciones cotidianas entra en contradicción con la lógica que requiere el trabajo formal en álgebra. Luz sabe que, cuando se pone su camisa blanca y su falda gris para ir al liceo, las dos prendas se encuentran sobre su cuerpo: "Me puse la camisa blanca y la falda gris". Sin embargo las expresiones algebraicas no soportan este mismo manejo cotidiano del "**y**" que Luz sí podría hacer con sus prendas y su cuerpo. La expresión algebraica requiere "una prenda por vez". Y para hacer las verificaciones de las dos raíces, es necesario usar "el cuerpo" dos veces.

En el pensamiento de esta estudiante, 4 y 3 son las raíces, no implica, al menos naturalmente, que $\mathbf{3}^2 - 7 \cdot \mathbf{3} + 12 = 0$ y $\mathbf{4}^2 - 7 \cdot \mathbf{4} + 12 = 0$. Quizás esto deba constituirse en un objetivo específico de la enseñanza.

Veamos ahora la ecuación que presenta Ernesto (14 años) como respuesta a la consigna: *Escribe una ecuación que tenga por raíces* 4 y 3. *¿Cómo lo haces?,* donde también avala que la x pueda tomar dos valores distintos en la misma expresión:

$$2x + 3x = 18$$

Si seguimos el pensamiento de Ernesto, vemos que efectivamente $2 \cdot \mathbf{3} + 3 \cdot \mathbf{4} = 18$.

Bardini y cols. (2005) dicen que "Una variable no es un número en el sentido aritmético. Un número, por ejemplo el número 3, no varía. Una variable es un objeto algebraico". Estos autores también advierten sobre la diferencia entre una variable y una incógnita: "Aunque ambos son números no conocidos y, desde un punto de vista simbólico, las mismas operaciones sintácticas se pueden llevar a cabo sobre ellos, su significado es diferente. En ecuaciones algebraicas usadas en álgebra introductoria, como '$x + 12 = 2x + 3$', la incógnita existe sólo como la designación de un número cuya identidad se revelará al final. La revelación de la identidad de la incógnita es, de hecho, el propósito de resolver una ecuación". Según Trigueros y Ursini (2003) esta diferencia reside entre la variable como "un número general" o "en una relación funcional" y la variable como "una incógnita específica".

Sin embargo, algunos de estos estudiantes que dan diferentes valores a la misma x en una misma ecuación parecen estar concibiendo la x como una *incógnita* y en una *relación funcional* pero consigo misma, a la vez. Esto es, la ven como una incógnita, ya que están buscando u ofreciendo valores que cuando la reemplacen satisfarían la ecuación y también la perciben en un tipo de relación funcional, porque sus "diferentes valores" en la misma ecuación dependen de otras ocurrencias en ésta para satisfacer la ecuación. Esto se ve claramente en la respuesta de Ernesto mostrada antes. Sin embargo, cuando la ecuación se encuentra factorizada, creemos que la lógica desempeña también un papel importante, como explicamos anteriormente en el caso de Luz.

Wagner (1983) aporta un interesante punto de vista para la problemática que estamos comunicando. Este autor sostiene que las letras son fáciles de usar pero difíciles de comprender. Señala que una de las dificultades radica en que las letras son similares a las palabras pero diferentes. Letras y palabras pueden tener diferente significado en distintos contextos, pero esto no sucede en un mismo contexto. Si queremos sustituir x en $3(x + 2) + 5 = 17 - 2x$, debemos asignarle a x el mismo valor en cada ocurrencia, mientras que, en una misma oración, una misma palabra puede tener significados distintos. Inclusive, en un contexto matemático, una misma expresión puede referir a cuestiones diferentes. Wagner ejemplifica con la oración "La suma de un número par y un número impar es siempre un número impar", sabemos que, a excepción del caso en que el número par es cero, el primer "número impar" es diferente del segundo "número impar". La reflexión de Wagner es fácil de visualizar si cambiamos el sistema de representación por el que habitualmente se utiliza con los estudiantes –antes de introducir letras– en situaciones donde se pide completar los términos que faltan. Vemos un ejemplo:

$$25 + 32 + \boxed{} + \boxed{} = 80$$

Esta actividad está extraída de un libro de texto[1] uruguayo para estudiantes del primer año de enseñanza media (12-13 años) correspondiente a la unidad "Número natural". Si se esperara que los estudiantes colocaran el mismo número en ambos cuadros, no podrían utilizarse números naturales. Por tanto podría inferirse que los autores del texto no esperan que en ambos cuadros se coloque el mismo número. Algunas veces el uso de estos cuadros constituye un paso previo a la introducción de las letras, pero obsérvese que su funcionamiento es distinto. Esta observación aporta elementos para la reflexión didáctica en torno a las actividades que se proponen en el aula a los estudiantes y que constituyen pasos previos a la introducción de las letras. Si el diseño de las actividades no es adecuado, podríamos estar obstaculizando la adquisición del pensamiento algebraico en lugar de facilitar su desarrollo.

Wagner sugiere que, en la enseñanza, se debe ayudar a los estudiantes a reconocer que una letra es similar a una palabra en el sentido de que puede tener distintos significados en distintos contextos, pero una letra es diferente de una palabra porque debe referir a lo mismo en un mismo contexto.

AVERIGUAR O ENCONTRAR LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la pregunta 12:

Tenemos una ecuación $(2x - 4)(.......) = 0$, en la que no conocemos el segundo factor.

a) ¿Es 2 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?
b) ¿Es 3 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

Respuestas a la parte *a*:

[1] M. Borbonet, B. Burgos, A. Martínez y N. Ravaioli (2000), *Matemática 1,* Montevideo, Fin de Siglo, p. 35.

Edad	*No contestan la parte* a	*Responden que SÍ a la parte* a	*Responden la parte* a *de la pregunta, refiriéndose al segundo factor*
14 – 15 años	**6**	**7**	**1**
17 – 18 años	**0**	**13**	**1**

Respuestas a la parte *b*:

Edad	*No contestan la parte* b	*Dicen que dependerá del segundo factor*	*Contestan que NO, porque 3 no es raíz del factor conocido*	*Otras respuestas*
14 – 15 años	**6**	**5**	**1**	**2**
17 – 18 años	**2**	**8**	**2**	**2**

Los estudiantes que se refieren al segundo factor para decidir si 2 es raíz argumentan que:

"Al no saber el segundo factor no puedo saber las raíces de la ecuación" (14 años)
"Si anula el segundo término, sí" (17 años)

Creemos que los estudiantes que recurren al segundo factor para responder la parte *a*, están pensando en que ambos factores deben ser cero para que el producto lo sea. Esta respuesta podría tener relación con la creencia que detectamos a través de la pregunta 13 que presentamos a continuación:

Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

$$\left(\boxed{} - 6\right)\left(\boxed{} - 19\right) = 0$$

Edad	*No contestan*	*Dan la solución correcta*	*Contestan que en los papelitos están 6 y 19*	*Otras respuestas*
14-15 años	**3**	**1**	**3**	**7**
17-18 años	**2**	**1**	**7**	**4**

Fueron consideradas respuestas correctas las de Talís (17 años) y Gerardo (14 años) que se presentan a continuación. Aunque la visión de estos dos estudiantes no es exactamente la misma, creemos que ambos realizan una discusión interesante de la pregunta. El resto de los estudiantes dieron respuestas parciales al problema, como por ejemplo, "en los papelitos puede ir el 6 y otro número cualquiera".

Presentamos a continuación la argumentación de Talís:

$$(p_1 - 6)\,(p_2 - 19) = 0$$

El p_1 puede ser 6 y cuando éste es 6 el p_2 puede ser cualquier otro número ya que la multiplicación da 0. Y cuando el p_2 es 19 el p_1 puede ser cualquier otro número por lo mismo.

De alguna manera, esta estudiante sobreentiende que los papelitos tapan dos incógnitas y así nos lo hace saber mediante los símbolos que introduce para su explicación.

Veamos ahora la solución que ofrece Gerardo. Él distingue las dos posibilidades, que los papelitos estén tapando una misma incógnita o dos:

> "Pueden ser si son los mismos o 6 o 19, si no son los mismos, el primero tiene que ser 6 o el segundo 19, el otro no importa".

Resulta interesante observar el manejo explícito que hace Gerardo del "o" cuando nos dice 6 o 19. Quizás por ello no cometió ningún error en las múltiples verificaciones que debió realizar al resolver su tarea. Este estudiante mostró un excelente manejo del concepto de variable, ya que es capaz de distinguir las soluciones a la ecuación en dos casos: una incógnita y dos incógnitas. Sin embargo, no introduce simbología para formular la explicación como sí lo hizo Talís.

Observamos en la tabla de arriba que, con el aumento de edad, parecería afianzarse la creencia de que detrás de los papelitos están los números 6 y 19. Sin embargo, dada la muestra de estudiantes con los que trabajamos (14 de 17-18 años y 14 de 14-15 años) no podemos sacar conclusiones más generales.

Presentaremos a continuación los resultados obtenidos en la pregunta 14:

¿Es 7 raíz de la ecuación $(3x - 21)(x - 3) = 0$? Explica tu respuesta.

			Para contestar usan el procedimiento de verificación	
Edad	*No contestan*	*Para contestar resuelven o intentan resolver la ecuación*	Sustituyen 7 solamente en el primer factor	Sustituyen 7 en los dos factores
14-15 años	5	2	2	5
17-18 años	0	7	4	3

Se deseaba observar si los estudiantes consideraban suficiente que se anulara un factor para que el producto fuera cero, pues esto podía tener relación con el error de la doble asignación que estábamos analizando.

En el cuadro puede observarse que, en el nivel 17-18 años, siete estudiantes eligen resolver la ecuación y otros tantos emprenden la verificación. Sin embargo, en el nivel de los de 14-15 años, donde las herramientas que permiten resolver una ecuación como la que se propone no están del todo disponibles, ya sea porque todavía no conocen la fórmula de resolución o porque todavía no manejan con soltura la aplicación de la propiedad de un producto nulo, hace que la estrategia preferida sea la de verificación.

Creemos que la resolución de la ecuación es una herramienta más costosa en el nivel de la operatoria requerida que el procedimiento de verificación. Más aún para los estudiantes del nivel 17-18 años que aplicaron la fórmula de resolución, para lo cual fue necesario desarrollar la expresión polinómica dada. Quizás estos estudiantes han incorporado herramientas eficaces para la resolución de ecuaciones, pero no valoran críticamente su utilización, como en la situación problemática que se les presentó. Esto es congruente con lo reportado por Kieran (1985, referido en Kieran y Filloy, 1989), quien señala que, tan pronto como los estudiantes de álgebra aprenden a manejar un método formal de resolución de ecuaciones, tienden a abandonar el uso de la verificación.

Cuatro de los seis estudiantes que para contestar utilizan el procedimiento de verificación sustituyendo 7 solamente en el primer factor, hacen mención –de distintas maneras– a que basta con que un factor sea cero para que el producto dé cero. Estos estudiantes combinan entonces el procedimiento de verificación con el conocimiento de la propiedad del producto nulo.

Veamos ahora la pregunta 15:

¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación $(2x - 12)(5x - 10) = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

			Para contestar usan el procedimiento de verificación	
Edad	*No contestan*	*Para contestar resuelven la ecuación*	*En forma correcta*	*Sustituyen x por 6 en el primer factor y x por 2 en el segundo*
14-15 años	**5**	**1**	**7**	**1**
17-18 años	**0**	**8**	**5**	**1**

En este caso los dos números reales dados son raíces de la ecuación. Observando qué estrategia utilizaron los alumnos para dar respuesta a la pregunta (resolución de la ecuación o procedimiento de verificación) y comparando las estrategias preferidas por los estudiantes de los dos niveles para abordar el problema, los resultados nos merecen idénticos comentarios que los realizados en la pregunta anterior.

Presentaremos a continuación comentarios sobre la pregunta 16:

¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación $(2x - 10)(3x - 8) = 0$?

Edad	*No contestan*	*Para contestar resuelven la ecuación*	*Para contestar usan el procedimiento de verificación*	*Contestan sin hacer planteo*
14-15 años	**6**	**1**	**7**	**0**
17-18 años	**0**	**8**	**4**	**2**

En este caso, se agrega el problema de que 4 no es raíz de la ecuación dada. Observamos las estrategias puestas en juego para responder y exploramos nuevamente si para el alumno es suficiente con que un factor se anule para que el producto valga cero.

Si bien hay seis alumnos del nivel 14-15 años que no contestan la pregunta, 100% de los estudiantes que intentaron resolver el ejercicio dieron una respuesta acertada; idéntico porcentaje se obtuvo en el nivel 17-18 años. En cuanto a las estrategias preferidas por los estudiantes para resolver el problema, mantenemos las observaciones que hicimos en la pregunta 14, que se refieren a una marcada preferencia por la verificación en el nivel 14-15 años y no así en el nivel 17-18 años, donde la resolución de la ecuación que se propone es una estrategia muy usada por los estudiantes para dar respuesta a la pregunta que se formula.

Nos centraremos ahora en la pregunta 17:

¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

Edad	*No contestan*	*Para contestar resuelven la ecuación o intentan hacerlo*	*Para contestar usan el procedimiento de verificación*
14-15 años	**5**	**1**	**8**
17-18 años	**0**	**9**	**5**

Nuevamente una marcada preferencia por resolver la ecuación propuesta de parte de los estudiantes del nivel 17-18 años. De los nueve estudiantes de 14-15 años que intentan resolver la situación, dos estudiantes no pudieron llegar a la respuesta correcta. Un caso es el de Luz, que realiza la doble asignación y que ya comentamos anteriormente, y el otro es el de Diego que intenta despejar la incógnita, ignorando el término en x^2 y trabajando con la ecuación lineal $-7x + 12 = 0$. Nosotras interpretamos este fenómeno como un tipo del mecanismo que se conoce como *hacer caso omiso de lo desconocido* (Kieran, 1984). Kieran menciona, por ejemplo, que un estudiante resuelve la ecuación $4 + x - 2 + 5 = 11 + 3 - 5$ como si fuera $4 + x - 2 + 5 = 11$. Otro estudiante, en lugar de la ecuación $2x - 6 = 4$, resuelve la ecuación $2x = 6$. La ecuación $16x - 215 = 265$ es transformada en la ecuación $x - 215 = 265$ por un estudiante. En todas estas situaciones, los estudiantes cambian la ecuación dada cuyo método de resolución desconocen por una conocida, evitando así dificultades en el proceso de solución.

Por otro lado, Lima (2008) informa otras estrategias usadas por los estudiantes para convertir ecuaciones cuadráticas en ecuaciones lineales antes de resolverlas. Algunos estudiantes reemplazaron m^2 por m, otros aplicaron el exponente al coeficiente del término de segundo grado (por ejemplo convirtiendo $3m^2$ en $9m$). También se observó que m^2 se reemplazó por $m \cdot m$ y este último se tomó como si fuera igual a $2m$.

COMENTARIOS FINALES

Uno de los objetivos del curso que estaban finalizando los estudiantes de 14-15 años es que el alumno aprenda a resolver en R ecuaciones que están dadas en forma factorizada como las de la forma $(ax + b)(cx + d) = 0$. Esta ecuación entraña, sin lugar a dudas, serias dificultades para quienes se inician en su estudio. Entre estas dificultades podemos comentar que muchos estudiantes no reconocen en ella una ecuación de segundo grado, sino dos ecuaciones de primer grado; no comprenden que este tipo de ecuaciones tienen una incógnita, pero pueden admitir dos raíces, y presentan dificultades en la comprensión del concepto de variable.

La asignación de distintos valores a la incógnita de manera simultánea fue un recurso usado por los estudiantes más pequeños en el momento de tener que construir una ecuación con dos raíces dadas. Este procedimiento, junto con el de concebir una ecuación con dos incógnitas, resultó para ellos más natural o espontáneo que concebir una ecuación de segundo grado que tuviera las dos raíces dadas. Quizás el hecho de concebir una ecuación de segundo grado con *una* incógnita y la consiguiente posibilidad de que existan *dos* raíces sea mucho más complejo para los estudiantes de lo que los docentes creemos. Esto sería congruente con lo informado por Trigueros y Ursini (2003), quienes señalan que la gran mayoría de los estudiantes con los que trabajaron consideraban que la incógnita involucrada en una ecuación de segundo grado podía tomar solamente un valor. Estos resultados pueden aportar información a los docentes acerca del pensamiento algebraico de estudiantes de enseñanza secundaria. Si bien se trata de información obtenida a partir del trabajo de veintiocho estudiantes, los patrones que observamos muestran que algunos de ellos podrían aparecer en nuestras aulas. Esperamos que la información brindada permita reflexionar acerca de las dificultades que pueden enfrentar nuestros estudiantes en el estudio del álgebra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (1994), "Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics", *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, núm. 3, pp. 24-35.

Bardini, C., L. Radford y C. Sabena (2005), "Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics", en H. L. Chick y J. L. Vincent (eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Australia, vol. 2, pp. 129-136.

Booth, L. (1984), *Algebra: Children's Strategies and Errors,* Windsor, NFER-Nelson.

Filloy, E. y T. Rojano (1984), "From an arithmetical to an algebraic thought: a clinical study with 12-13 years old", *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 51-56.

Fischbein, E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach,* Dortretch, D. Reidel.

Fischbein, E. y D. Schnarch (1997), "The Evolution With Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 28, núm. 1, pp. 96-105.

Fujii, T. (2003), "Probing Students' Understanding of Variables Through Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable so Difficult for Students to Understand?", *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, pp. 49-65.

Kieran, C. (1981), "Concepts associated with the equality symbol", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 12, pp. 317-326.

——— (1984), "Cognitive mechanisms underlying the equation-solving errors of algebra novices", en Southwell y cols. (eds.), *Proceedings of PME VIII,* Sydney, Australia, pp. 70-77.

——— (2006), "Research on the Learning and Teaching of Algebra", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* Rotterdam, Sense Publishers, pp. 11-49.

Kieran, C. y E. Filloy (1989), "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 7, núm. 3, pp. 229-240.

Knuth, E. J., A. C. Stephens, N. M. McNeil y M. W. Alibali (2006), "Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 37, núm. 4, pp. 297-312.

Küchmann, D. (1981), "Algebra", en K. M. Hart (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16,* Londres, John Murray, pp. 102-119.

Lima, R. N. (2008), "Procedural embodiment and quadratic equations", artículo presentado en ICMI 11, Monterrey, México.

Linchevski, L. y N. Herscovics (1996), "Crossing the Cognitive Gap between

Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, núm. 1, pp. 39-65.

McNeil, N. M., L. Grandau, E. J. Knuth, M. W. Alibali, A. C. Stephens, S. Y. Hattikudur y D. E. Krill (2006), "Middle school students' understanding of the equal sign: the books they read can't help", *Cognition and Instruction*, vol. 24, núm. 3, pp. 367-385.

Ochoviet, C. y A. Oktaç (2009), "If A · B = 0 then A = 0 or B = 0?", *The Montana Mathematics Enthusiast*, vol. 6, núm. 1 y 2, pp.113-136.

Papaieronymou, I. (2007), "Student difficulties in understanding the difference between the algebraic expressions and the concept of linear equation", *Proceedings of* CERME *5*, Working group 6, pp. 934-943.

Radford, L. y L. Puig (2007), "Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 66, pp. 145-164.

Schoenfeld, A. y A. Arcavi (1988), "On the meaning of variable", *Mathematics Teacher*, vol. 81, núm. 6, pp. 420-427.

Trigueros, M., S. Ursini y D. Lozano (2000), "La conceptualización de la variable en la enseñanza media", *Educación Matemática*, vol. 12, núm. 2, pp. 27-48.

Trigueros, M. y S. Ursini (2003), "First-year Undergraduates' Difficulties in Working with Different Uses of Variable", en Annie Selden, Ed Dubinsky, Guershon Harel y Fernando Hitt (eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 12. Research in Collegiate Mathematics Education V*, American Mathematical Society in cooperation with Mathematical Association of America, vol. V, pp. 1-29.

Ursini, S. y M. Trigueros, (2006), "¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?", *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 3, pp. 5-38.

Vaiyavutjamai, P. y M. A. Clements (2006), "Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations", *Mathematics Education Research Journal*, vol. 18, núm. 1, pp. 47-77.

Vaiyavutjamai, P., N. F. Ellerton y M. A. Clements (2005), "Students' attempts to solve two quadratic equations: a study in three nations", en P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce y A. Roche (eds.), *Building connections: Research, theory and practice* (Proceedings of MERGA 28, vol. 2, pp. 735-742). Melbourne, Australia, MERGA Program Committee.

Van Engen, H. (1961a), "A Note on 'Variable'", *The Mathematics Teacher*, marzo, pp. 172-173.

Van Engen, H. (1961b), "On 'Variable'_a rebuttal", *The Mathematics Teacher,* marzo, pp. 175-177.
Vinner, S. (1990), "Inconsistencies: their Causes and Function in Learning Mathematics", *Focus on Learning Problems in Mathematics,* vol. 12, núm. 3 y 4, pp. 85-98.
Wagner, S. (1983), "What are these things called variables?", *Mathematics Teacher,* núm. 76, pp. 474-479.

DATOS DE LAS AUTORAS

Cristina Ochoviet
Instituto de Profesores Artigas-CFE, Uruguay.
cristinaochoviet@gmail.com
Asuman Oktaç
Cinvestav-IPN, México.
oktac@cinvestav.mx

ANEXO

1) *i)* Resuelve la ecuación $(2x - 6)(18 - 2x) = 0$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

2) *i)* Resuelve la ecuación $(x + 6)(2x - 8) = 0$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

3) *i)* Resuelve la ecuación $(3x - 6)(x - 7) = 0$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

4) *i)* Resuelve la ecuación $(x - 5)(x + 4) = 0$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

5) *i)* Resuelve la ecuación $(x - 9)(x - 6) = 0$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

6) *i)* Resuelve la ecuación $x(2x - 10) = 0$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

7) *i)* Resuelve la ecuación $x(x - 8) = 0$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

8) *i)* Resuelve la ecuación $x^2 = 6 \cdot x$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

9) *i)* Resuelve la ecuación $5 \cdot x = 0$. Explica cómo lo haces.
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

10) Escribe una ecuación que tenga raíz 8. ¿Cómo lo haces?

11) Escribe una ecuación que tenga por raíces 4 y 3. ¿Cómo lo haces?

12) Tenemos una ecuación $(2x - 4)(........) = 0$, en la que no conocemos el segundo factor.
  a) ¿Es 2 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?
  b) ¿Es 3 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

13) Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

$$\left(\boxed{} - 6\right)\left(\boxed{} - 19\right) = 0$$

14) ¿Es 7 raíz de la ecuación $(3x - 21)(x - 3) = 0$? Explica tu respuesta.

15) ¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación $(2x - 12)(5x - 10) = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

16) ¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación $(2x - 10)(3x - 8) = 0$?

17) ¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$?
Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

18) *i)* Se sabe que $b \cdot d = 0$, ¿qué puedes deducir sobre b y *d* a partir de esta información?
  ii) ¿Qué representan para ti *b* y *d*?