Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios

Juana Elisa Escalante Vega y Abraham Cuesta Borges

Resumen: En este trabajo se presentan los resultados de un estudio realizado con estudiantes universitarios de las licenciaturas en Economía y de Informática, con el objetivo de analizar las dificultades en la comprensión del concepto de variable, al resolver problemas donde se establece una relación del lenguaje algebraico con el lenguaje geométrico, el natural y el aritmético. Por otra parte, se analizó la comprensión de los diferentes aspectos que caracterizan a la variable y su relación funcional en situaciones contextualizadas. El estudio pudo comprobar que los estudiantes enfrentan dificultades cuando intentan realizar una lectura analítica de los enunciados verbales y serios obstáculos en el proceso de traducción de los lenguajes natural, aritmético y geométrico al lenguaje algebraico; como consecuencia, no han desarrollado el pensamiento algebraico que les permita comprender el concepto de variable, sus diferentes aspectos y usos.

Palabras clave: Dependencia entre variables, Dificultades, Estudiantes universitarios, Pensamiento algebraico, Relación funcional, Variable.

Difficulties to understand the concept of variable: a study with university students

Abstract: This paper presents the results from a research carried out with undergraduate students from the Economics and Information Sciences BA's. The objective was to analyze the difficulties faced by them in regards to the understanding of the concept of variable and for the solution of problems where a relation between geometrical, natural and arithmetical languages is required. Moreover, the level of understanding of the different aspects which characterize the variable and its functional relation in contextualized situations was analyzed. The research shows hat students face some difficulties when trying to make an analytical reading of verbal statements and deep obstacles in the process of translating natural, arithmetical and geometrical languages into algebraic language. As a consequence, they have not developed the algebraic thinking which would allow them to understand the concept of variable, its different aspects and usage.

Key words: Dependence between variables, Difficulties, Undergraduate students, Algebraic thinking, Functional relation, Variable.

Fecha de recepción: 23 de enero de 2012. Fecha de aceptación: 27 de abril de 2012.

INTRODUCCIÓN

La investigación en didáctica de la matemática (matemática educativa) se ha estado ocupando, entre otros aspectos, de los problemas relativos al aprendizaje (Rico, 1995) para lograr mayor comprensión de las dificultades y encontrar vías para superar estos problemas dentro del sistema educativo (Artigue, 2003). En el caso del álgebra, desde diferentes posturas teóricas, muchas de las investigaciones van dirigidas al estudio del pensamiento algebraico temprano, con especial interés en analizar las interrelaciones del lenguaje algebraico con el lenguaje natural y el de la aritmética (Filloy, Puig y Rojano, 2008). Un gran número de trabajos, como los reportados por Kieran (1980), Booth (1984), Filloy y Rojano (1989), establece la necesidad de que exista una relación entre los sistemas de signos del algebra, de la aritmética y de la lengua materna. También documentan cómo el arraigo al pensamiento numérico y a los significados coloquiales de las palabras no coadyuva a la interpretación, al uso de las letras y a la comprensión de expresiones algebraicas.

Como resultado, se obstaculiza el proceso de transición hacia conceptos de mayor nivel de abstracción como la relación entre variables. Existen dificultades (Bednarz y Janvier, 1996) para operar con cantidades desconocidas y para comprender la naturaleza de las relaciones existentes entre los datos y las incógnitas. Otros resultados (Filloy y Rojano, 1985; Kieran y Filloy, 1989; Ursini, 1990; Radford, 1996) ponen de manifiesto que se recurre al uso de procedimientos aritméticos en lugar del método algebraico, derivado de una enseñanza que, por lo general, privilegia la sintaxis algebraica con énfasis en aspectos manipulativos y numéricos. De este modo, el alumno se acostumbra a considerar las variables como etiquetas que se refieren a entidades específicas o a la inicial de las letras (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005), como es el caso de la fórmula para calcular el área del rectángulo: $A=bxh$, bien conocida por los estudiantes pero desconectada del dominio geométrico.

Siguiendo las ideas anteriores, resulta significativo conocer, a través de las actuaciones de los estudiantes universitarios, cuáles competencias poseen para enfrentar los requerimientos algebraicos que permitan la comprensión significativa del concepto de variable. El estudio muestra que, efectivamente, existen dificultades para realizar una lectura analítica de los enunciados verbales y serios obstáculos en el proceso de traducción de los lenguajes natural, aritmético y geométrico al lenguaje algebraico.

PROBLEMA Y PROPÓSITOS DE LA INVESTIGACIÓN

Los estudiantes de diferentes niveles educativos tienen dificultades en la comprensión de los varios aspectos y usos que caracterizan la variable (Ursini *et al*, 2005); no acostumbran a utilizarlas como herramienta para analizar y resolver problemas (Ursini, y Trigueros, 2006); además, suelen evitar el acercamiento algebraico a consecuencia de que no poseen una comprensión integrada del concepto de variable.

Investigaciones realizadas en la Universidad Veracruzana (Cuesta, 2007; Cuesta, Deulofeu y Méndez, 2010) han corroborado que, efectivamente, la carencia de conocimientos básicos impide que el estudiante pueda trabajar en tareas de interpretación y construcción (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990) del concepto de función, causado por el efecto combinado del significado que poseen los estudiantes sobre este concepto y del conocimiento que se tiene sobre los contextos en que se deben realizar dichas tareas. Existen serios conflictos para trasladar:

- Las ideas expresadas en lenguaje natural al lenguaje algebraico,
- Las ideas geométricas al lenguaje algebraico, y
- El conocimiento en forma de tabla o gráfica a una ecuación algebraica.

Dichos resultados constatan la existencia de dificultades para generalizar los resultados de operaciones aritméticas y para manipular operaciones algebraicas; ambas dificultades se hallan en estrecha relación con la experiencia personal del estudiante, lo cual hace suponer que algunos de los problemas de comprensión emergen, precisamente, del contexto de representación de los problemas planteados.

En base a las ideas anteriores se estudia la problemática concerniente a la comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos (Ursini *et al*, 2005). Pero también se pretende, con base en las actuaciones observadas (Filloy, 1999), dar cuenta de la falta de competencias al resolver tareas concretas en un determinado momento, que involucran la relación entre variables. Es un estudio enfocado básicamente al análisis de los procesos cognitivos (Rico, 2005) asociados a la competencia para resolver dichas tareas; entendiendo la competencia como *los modos en que los escolares actúan cuando hacen matemáticas y cuando se enfrentan a problemas* (Rico y Lupiáñez, 2010: 22).

De esta manera, el propósito general es analizar la comprensión, los errores y dificultades de los estudiantes universitarios, al responder a problemas contextualizados donde se muestra una relación entre dos variables. Se propone responder dos preguntas:

1. ¿Cuáles dificultades se manifiestan en la solución de problemas que requieren la comprensión del concepto de variable?
2. ¿En qué aspectos se manifiesta la falta de competencia para resolver los problemas aritmético-algebraicos?

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Para ubicar la problemática respecto a dificultades y las actuaciones de los estudiantes se toman dos enfoques de referencia: el Modelo 3UV (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini *et al.*, 2005) y el modelo de análisis y clasificación de actuaciones del Modelo Teórico Local (Filloy y Rojano, 1984; Filloy, 1999; Filloy *et al.*, 2008).

El Modelo 3UV establece que, para resolver los ejercicios y problemas típicos de los textos escolares, se debe trabajar con tres usos de la variable: la incógnita específica, el número general y las variables en relación funcional (Ursini *et al.*, 2005).

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran *la incógnita* es necesario:

I_1	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que debe ser determinado considerando las restricciones del problema.
I_2	Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
I_3	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I_4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas o aritméticas.
I_5	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el *número general* es necesario:

G_1	Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.
G_2	Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.
G_3	Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.
G_4	Manipular (simplificar, desarrollar) le variable simbólica.
G_5	Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran variables en relación funcional se requiere:

F_1	Reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada.
F_2	Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la variable independiente.
F_3	Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente.
F_4	Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional.
F_5	Determinar el intervalo de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F_6	Simbolizar la relación funcional, basado en el análisis de los datos de un problema.

El modelo 3UV se ha utilizado en investigaciones relacionadas con las concepciones de los estudiantes (Ursini y Trigueros, 1997) y de los profesores (Juárez, 2001). En especial, en Ursini y Trigueros (2006) se halla un importante análisis comparativo de estudiantes de diferentes niveles educativos, que reporta dificultades para comprender los diferentes usos y aspectos que caracterizan la variable.

El Modelo Teórico Local (MTL) constituye un marco teórico metodológico para la observación experimental, para explicar y dar respuesta sobre los procesos que se desarrollan en una situación dada, con contenidos matemáticos específicos y con alumnos concretos. Tiene un carácter descriptivo, explicativo y predictivo, que no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse mediante otro modelo (Puig, 2006). El modelo incluye cuatro componentes interrelacionadas: (i) el componente de enseñanza o modelo de enseñanza, (ii) el componente de actuación o modelo de cognición, (iii) el modelo de competencia formal y (iv) el componente de comunicación o modelo de comunicación.

En este sentido, el modelo de cognición constituye un marco propicio para identificar, describir y categorizar las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas contextualizadas que involucran la relación entre variables (Fernández y Puig, 2002; Filloy *et al*, 2008). Precisamente, en Filloy *et al* (2008) se halla una exhaustiva explicación de todos los elementos e interrelaciones asociados a la competencia que posee el resolutor ideal en la solución de problemas de enunciado verbal. De acuerdo con los autores, el aspecto fundamental en la solución del problema es el paso del lenguaje natural a una expresión en el lenguaje del álgebra: una ecuación. Por tanto, en la resolución de dichos problemas se hallan implicadas, tanto la competencia en ambos lenguajes, como la competencia en el proceso del paso de un texto escrito en lenguaje natural a un texto escrito en el lenguaje del algebra.

En un análisis del método cartesiano (MC) los autores presentan (Filloy, Puig y Rojano 2008: 332) una serie de pasos que el resolutor ideal, de problemas con contenido heurístico, debería recorrer.

Un primer paso reposa sobre la competencia en el lenguaje natural, pero en especial sobre la competencia en este tipo especial de textos matemáticos que son los problemas aritmético-algebraicos del enunciado verbal.

1. Lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.

En los pasos segundo, tercero y cuarto están presentes, tanto las competencias de proceso propias del MC, como las competencias en el sistema de signos del algebra.

2. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).

3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas, que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso) igualando dos expresiones de las que se han escrito en el segundo paso, que representan la misma cantidad.

Los pasos quinto y sexto contienen competencias estrictamente algebraicas.

5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la formula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.

Finalmente, el séptimo paso exige competencia en el contenido del problema que permite evaluar la adecuación del resultado.

7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

METODOLOGÍA

La metodología del estudio es cualitativa; se apoya en un experimento realizado con estudiantes universitarios, cuando intentan responder a preguntas o problemas contextualizados que involucran variables.

SUJETOS Y EXPERIMENTO

Se seleccionó a estudiantes de dos grupos: el primer grupo (en lo sucesivo Grupo 1), conformado por estudiantes de la Licenciatura en Informática, que estaban por culminar el único curso de cálculo del plan de estudios (cálculo de una variable real). El segundo grupo (en los sucesivo Grupo 2), conformado por estudiantes de Economía, que estaban por culminar el segundo curso de cálculo del plan de estudios (cálculo en varias variables).

Se propone una prueba escrita compuesta de problemas que pueden ser resueltos por estudiantes de nivel medio superior, y para cuyas respuestas no resultan imprescindibles los conocimientos adquiridos en la universidad. De acuerdo con el modelo 3UV se pretende determinar si los estudiantes en situaciones contextualizadas: (i) interpretan correctamente la variable, (ii) tienen la capacidad de simbolizar las relaciones en las que aparezca cierta caracterización de la variable, (iii) son capaces de manipular las variables que aparecen en una expresión, y (iv) son capaces de representar globalmente la información del problema (en tabla, gráfica y ecuación). A través de las actuaciones se intenta, además, describir las dificultades e identificar la falta de competencias, en el sentido de Filloy *et al* (2008), para dar solución a los problemas de la prueba.

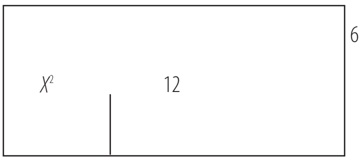
Se aplicó en la última semana del semestre escolar bajo la siguiente orientación: (i) utilizar cualquier procedimiento o estrategia, (ii) no borrar ningún procedimiento escrito, y (iii) que, en caso de no responder, se escriban las causas. Posteriormente se realiza una entrevista individual a una muestra de estudiantes (6 estudiantes del Grupo 1 y 7 estudiantes del Grupo 2), con el objetivo de realizar una descripción interpretativa de las respuestas, identificar y profundizar en las causas de errores y dificultades en las respuestas escritas.

Procesamiento de datos

Se presentan a realizar la prueba 24 estudiantes de Informática y 23 de Economía. Para mantener el anonimato, en lo sucesivo se denominará a los estudiantes del Grupo 1 como: I_1...... I_{24} y a los del Grupo 2 como: E_1.....E_{23}. Una primera lectura permitió elaborar una matriz que relaciona a cada estudiante con las respuestas a cada una de las preguntas. Se verificó que, ciertamente, se ponen de manifiesto dificultades e inconsistencias de naturaleza diferente, muchas de ellas vinculadas al nivel de conocimiento que se tiene sobre el contexto de las tareas o a la comprensión de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal. Dicha caracterización será tratada, de manera particular, en el análisis de cada una de los problemas propuestos.

RESULTADOS DEL ESTUDIO

El análisis presenta, primero, la situación (pregunta) y los diferentes aspectos que caracterizan los tres usos de la variable, seguido de una tabla resumen que muestra (por columnas) los porcentajes de NO ACIERTOS a las respuestas y los diferentes aspectos del modelo 3UV. Por filas, se detallan las dificultades halladas en las actuaciones de los estudiantes.

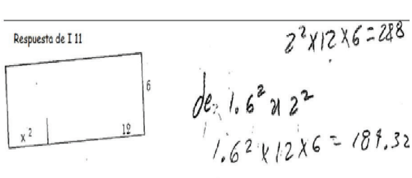
Pregunta 1 (tomado de Ursini y Trigueros, 2006)	*Análisis Particular*
¿Para cuales valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288? 	Se debe reconocer a x como una entidad general (G2) que debe ser manipulada para obtener la expresión del área (G4). Reconocer que x es una cantidad desconocida (I1), cuyo valor puede determinarse (I4) realizando operaciones algebraicas o aritméticas. Se debe reconocer la correspondencia (F1) entre los valores del área y los valores de x, así como la variación conjunta de ambas (F4). Determinar la variación de x dado el intervalo de variación del área (F5).

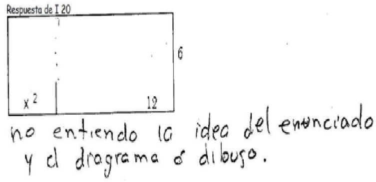
La mayoría de los estudiantes (ver tabla 1) no pueden reconocer que *x* es una entidad general (G2), que se puede determinar a partir de la expresión del área (G4). Para el 60% y 75% de los estudiantes del Grupo 2 y del Grupo 1 respectivamente, resultó un obstáculo la determinación del valor de *x*, realizando operaciones algebraicas o aritméticas (I4).

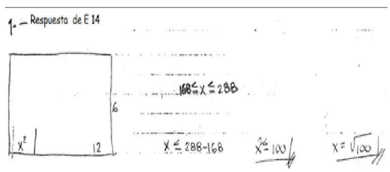
Grupo 2 Economía								
3UV / *Causado por:*	*P1*	*G2*	*G4*	*I1*	*I4*	*F1*	*F4*	*F5*
Incomprensión	34.7							
Manipulación aritmética	26.0							
% de NO aciertos	60.7							
Grupo 2 Informática								
3UV / *Causado por:*	*P1*	*G2*	*G4*	*I1*	*I4*	*F1*	*F4*	*F5*
Incomprensión	50	50	50	50	50	50	50	50
Manipulación aritmética	25	25	25	25	25	25	25	25
% de NO aciertos	75	75	75	75	75	75	75	75

Porcentaje de No aciertos a la pregunta 1

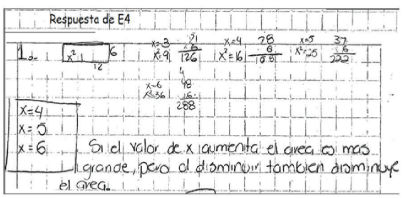
Incomprensión: en esta categoría se agrupan aquellas respuestas, donde se evidencia incomprensión total del enunciado o de la imagen; en esencia, no se comprende la pregunta planteada. Ejemplos de estas actuaciones son:

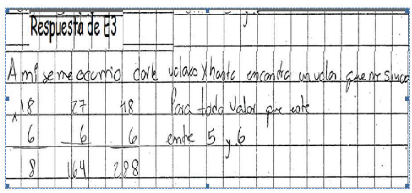






Manipulación aritmética: en esta categoría se agrupan las respuestas, con las cuales se muestra comprensión del enunciado, pero su nivel de conocimiento (aritmético) resulta insuficiente para poder representar la expresión algebraica, en este caso: $A = (x^2 + 12)*6$. Aunque algunos estudiantes sí pueden representar la ecuación, no son capaces de realizar las operaciones algebraicas que les permita determinar el valor de x. Ejemplos de respuesta son:





Este fragmento de entrevista al estudiante E_3, muestra ambos tipos de actuaciones; de inicio no se comprende el enunciado, y posteriormente solo se puede realizar operaciones aritméticas.

P (Profesora): ¿Cómo abordas este problema?

E_3 (Estudiante): Te piden que calcules el área, simplemente hay que encontrar las variables y sacar, por medio de una formula, el resultado.

P: ¿Qué formula utilizas?

E_3: Yo no le entendí, si el área que están pidiendo varía entre 168 y 288 o es en general de todo el rectángulo... la base.

P: ¿Cuál es la base del rectángulo?

E_3: Por lo que puedo ver es el 12 y el número que se debe encontrar [hace referencia a x] tiene que ser multiplicado por sí mismo.

P: Entonces, ahora que lees de nuevo, ¿qué es lo que varía entre 168 y 288?, ¿podrías resolver el problema?

E_3: ...Primero debo sacar el área total que me dan, a partir de 12 y de 6, que es 72

P: ¿Cómo obtenemos el área de este otro fragmento de rectángulo? [Hace referencia al área correspondiente a la izquierda del rectángulo].

E_3: .. Imagino que el 6 debe ir a este lado y el área de la base sería... encontrar un número que multiplicado por seis, me dé el área, entonces x cuadrada menos la base por la altura...

P: Eso no tiene mucho sentido, tú encontraste una parte del área, multiplicando la base por la altura y ahora debes encontrar esta otra parte del área, ¿Qué debes multiplicar?

E_3: Si la base por la altura, entonces $A = x^2*6$.

P: Con ello obtienes el área. Tú deseas que el área total esté entre 168 y 288, ¿qué se debe hacer entonces?, ya tiene dos partes del área total.

E_3: ...Aquí [hace referencia a: $A= x^2*6$] le podemos dar un número, que fuera, no sé, cuatro, entonces al cuadrado y por seis serían 96; imagino yo, a una parte que son 72 le sumaría la otra parte, que es 96 y me da 168. Después seguiría poniendo más números hasta encontrar el otro valor [se refiere a 288].

P: Veamos, ¿cómo se obtiene?

E_3: ...Entonces a 288 le resto 168 me quedan 120 y un número al cuadrado que me de 120...

P: No necesitas este cálculo, tú necesitas un número al cuadrado multiplicado por seis.

E_3: ...debo tomar un rango del cuatro hasta el diez [realiza el cálculo de x^2*6]... ya me pasé... son 600... [Realiza el cálculo con 8]... se pasó, tiene que ser un número cercano al cuatro... tomo el cinco [realiza el cálculo con el número cinco] pero no llega a 288... entonces tiene que ser el número seis. [Verifica que, con $x = 6$ se obtiene el resultado de 288].

P: Entonces, ¿en qué intervalo se halla el valor de x?

E_3: De cuatro a seis, entre esos dos.

P: ¿No sería mejor si planteamos que $A = (x^2+12)*6$?

E_3: Sí, es más fácil [verifica que se obtienen ambos valores con las ecuaciones: $A = (x^2+12)*6 = 168$ y $A = (x^2+12)*6 = 288$].

P: ¿Es más fácil por este procedimiento?

E_3: Sí, es más fácil.

En síntesis, no puede llevar a cabo una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduzca a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades, a falta de competencia para comprender un problema aritmético-algebraico del enunciado verbal. Se pudo constatar, además, que los estudiantes conocen la fórmula para calcular el área ("$A = bxh$"), y que son hábiles para determinar el área del rectángulo si se les proporciona valores específicos, pero no se tiene la competencia para trasladar las ideas geométricas al sistema de signos del algebra.

Pregunta 2	*Análisis Particular*
Una Empresa ofrece en alquiler un autobús para una excursión a un precio total de 2 000 pesos, la capacidad del autobús es de 15 personas. Cada viajero debe pagar el mismo precio. Halla la relación entre la cantidad que debe pagar cada viajero (pago individual) y el número de personas que realizan el viaje. ¿Cómo sabemos cuánto debe pagar cada uno de los viajeros? Para responder la pregunta se te pide: a) Construir una tabla de valores para el número de viajeros y el precio que paga cada uno. b) Encuentra la gráfica que describe la relación entre el número de viajeros y el precio que paga cada uno. c) Escribe una ecuación que exprese la relación entre el número de viajeros y el precio que paga cada uno.	Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido (pago individual) que puede ser determinado considerando las restricciones del problema (I1). Simbolizar las cantidades y utilizarlas para plantear ecuaciones (I5). Determinar la desconocida (pago individual) realizando operaciones (I4). Reconocer la correspondencia entre las variables independientemente de la representación utilizada (F1). Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas (F4) y simbolizar la relación funcional (F6)

Muchos estudiantes (52% del Grupo 1 y 66% del Grupo 2) no pueden construir adecuadamente la tabla de valores, que relaciona el número de viajeros con el precio que paga cada uno (ver tabla 2).

Grupo 2 Economía									
3UV Causado por:	*P2a*	*I1*	*I5*	*I4*	*P2b*	*F1*	*F4*	*P2c*	*F6*
Incomprensión	52.2	52.2	52.2	52.2	52.2	52.1	52.1	52.1	66.7
Manipulación aritmética	0	0	0	0	22.8	22.8	22.8	22.8	20.8
% de NO aciertos	52.2	52.2	52.2	56.2	75	75	75	87.5	87.5
Grupo 2 Informática									
3UV Causado por:	*P2a*	*I1*	*I5*	*I4*	*P2b*	*F1*	*F4*	*P2c*	*F6*
Incomprensión	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7
Manipulación aritmética	0	0	0	0	8.3	8.3	8.3	20.8	20.8
% de NO aciertos	66.7	66.7	66.7	66.7	75.0	75.0	75.0	87.5	87.5

Porcentaje de No aciertos a la pregunta 2

En primer lugar, destaca el hecho que los estudiantes no logran reconocer el pago individual como una variable que debe ser determinada considerando las restricciones del problema (I1), realizando la operación aritmética correspondiente (I4). Se pone de manifiesto cierta tensión en la comprensión de la situación escrita y, por ende, en el paso de un lenguaje de representación a otro, que impide simbolizar las cantidades y utilizarlas para plantear ecuaciones (I5). Así, una lectura inadecuada de la situación impide que se pueda establecer la correspondencia (F1) y la variación conjunta (F4) existente entre ambas variables (número de viajeros y pago individual).

Interpretación: en esta categoría se agrupan las respuestas de una interpretación errónea del enunciado. El estudiante entiende que cada viajero, sin importar cuántos sean, debe pagar la misma cantidad (133.33 pesos), resultado que se obtiene de dividir 2 000 pesos entre 15 viajeros; por otra parte, no se verifica que la respuesta escrita cumpla con las condiciones del problema. La actuación del estudiante E_{15} es un ejemplo:


Respuesta de E 15

① 2,000
15 personas

(*) Cada viajero debe pagar el mismo precio.

$$\begin{array}{r} 133.3 \\ 15\overline{)2000} \\ 50 \\ 50 \\ 5 \end{array}$$

Viajeros	Precio
1	133.3
2	133.3
3	133.3
4	133.3
5	133.3
6	133.3
7	133.3
8	133.3
9	133.3
10	133.3
11	133.3
12	133.3
13	133.3
14	133.3
15	133.3

133.3 × 15 = 2,000

En cuya entrevista se ejemplifica la falta de competencia en la comprensión de la situación que describe un problema aritmético-algebraico.

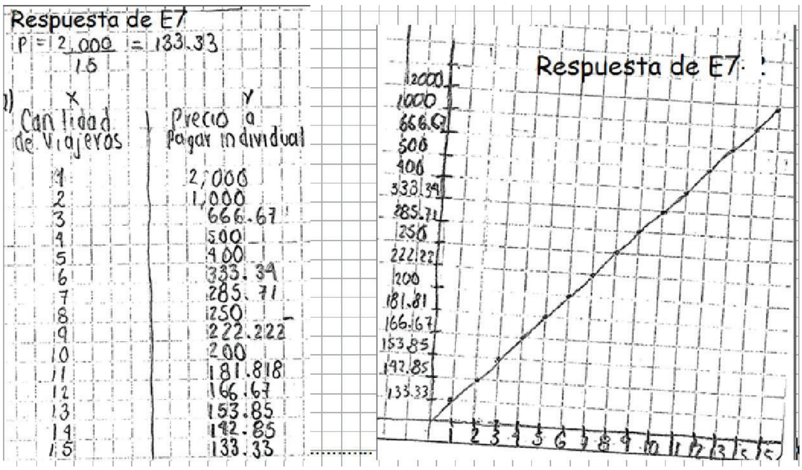
P (Profesor):	¿Cómo sabemos cuánto debe pagar cada pasajero?
E_{15}:	Si tengo 15 pasajeros, entonces divido el precio del autobús entre los 15.
P:	¿Qué obtienes entonces?
E_{15}:	133.33.
P:	¿Qué significa ese resultado?
E_{15}:	Si viaja una persona, debe pagar 133.33.
P:	Es decir, ¿cada pasajero paga esa cantidad?
E_{15}:	Sí.
P:	Veamos la situación siguiente: tomas un taxi con tres amigos y el taxista les cobra 20 pesos en total, ¿cuánto paga cada uno?
E_{15}:	Cinco pesos.
P:	¿Y si son dos personas?
E_{15}:	Entonces, 10 pesos cada uno.
P:	¿Y si solo viajas tú?
E_{15}:	Yo pago todo, los 20 pesos.
P:	Regresemos al problema: ¿cómo calculas cuánto paga cada persona?
E_{15}:	Dividí el precio del autobús entre el número de personas, que son 15.
P:	Es cierto, si viajan 15 personas, ¿y si no viajan 15 personas?
E_{15}:	Por eso puse la fórmula, el dinero entre las personas.

P:	Supongamos que viaja una persona.
E_{15}:	Debe pagar todo.
P:	Y ¿si viajan dos?
E_{15}:	Lo divido entre dos.
P:	Entonces, ¿cómo se calcula el pago individual?
E_{15}:	Es que... a lo que entendí del problema, es que piden una tabla de cada uno de los pasajeros y yo representé cada pasajero con un número y entendí que viajan 15 personas.
P:	Bien, la redacción del problema no se entiende; te solicitamos: ¿cómo se debe redactar la pregunta para que se entienda que puede variar el número de pasajeros?
E_{15}:	En lugar de decir: "construir una tabla de valores para el número de viajeros y el precio que paga cada uno", yo pondría la misma pregunta, pero en lugar de decir "que paga cada uno", yo escribiría "que la cantidad de viajeros cambie, desde uno hasta quince".
P:	Entonces, ¿si se modifica el enunciado verbal, se entiende la tarea a realizar?
E_{15}:	Sí, así sí se entiende.

En varias entrevistas se corrobora el mismo hecho: el estudiante necesita que se le explicite, o se le proporcione la idea de que el número de viajeros cambia; en esencia, él necesita datos más precisos para realizar las operaciones aritméticas.

Traducción: en esta categoría se agrupan aquellas actuaciones en las que, después de construir la tabla de valores, no se transfiere dicho conocimiento a otras formas de representación (grafica o ecuación). El estudiante no reconoce la variación conjunta de las variables involucradas (F4), independientemente de la representación utilizada (F1). Las respuestas correctas (en forma de tabla), del 22.8 % del Grupo 2 y del 8.3 % del Grupo 1, se contradicen cuando se intenta transferir dicho conocimiento a la relación funcional mediante una gráfica, o cuando se simboliza dicha relación mediante una ecuación (F6).

La respuesta escrita del estudiante E_7 pone de manifiesto la falta de competencia, tanto para representar globalmente la información del problema (en tabla, gráfica y ecuación), como para evaluar la adecuación del resultado (representación gráfica) a la condición del problema.

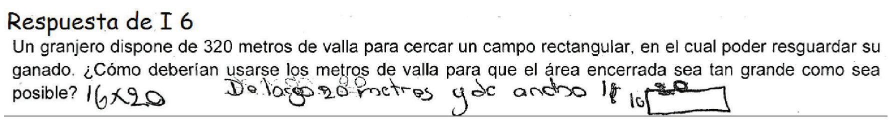


Pregunta 3	*Análisis Particular*
Un granjero dispone de 320 metros de valla para cercar un campo rectangular, en el cual poder resguardar su ganado. ¿Cómo deberían usarse los metros de valla para que el área encerrada sea tan grande como sea posible?	Se debe reconocer que los lados adyacentes del campo son desconocidos y se pueden determinar considerando las restricciones del problema (I1). Simbolizarlas y utilizarlas para plantear ecuaciones (I5). Reconocer la correspondencia entre las variables (F1) y simbolizar una relación funcional entre el perímetro y el área con base a los datos del problema (F6) sustituyendo las variables por el valor(es) que hacen verdadera las ecuaciones (I3) Determinar los intervalos de variación de una de las variables dado el intervalos de variación de la otra (F5).

Existen serias dificultades, incluso en los estudiantes más avanzados (Grupo 2), para reconocer los lados del campo rectangular como valores desconocidos (I1), que se deben utilizar para plantear ecuaciones (I5) (ver tabla 3). Cabe mencionar que, el principal obstáculo se halla en que no se puede reconocer y/o establecer la correspondencia (F1) entre los conceptos involucrados (perímetro y área) que impide simbolizar una relación funcional (F6).

Grupo 2 Economía							
3UV Causado por:	*P4*	*I1*	*I5*	*F1*	*F6*	*I3*	*F5*
Incomprensión	60.8	60.8	60.8	60.8	60.8	60.8	60.8
Manipulación aritmética	21.7	21.7	21.7	21.7	21.7	21.7	21.7
% de NO aciertos	82.5	82.5	82.5	82.5	82.5	82.5	82.5
Grupo 1 Informática							
3UV Causado por:	*P2a*	*I1*	*I5*	*I4*	*P2b*	*F1*	*F4*
Incomprensión	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0
Manipulación aritmética	41.6	0	41.6	41.6	41.6	41.6	41.6
% de NO aciertos	91.6	50.0	91.6	91.6	91.6	91.6	91.6

Incomprensión: en esta categoría se agrupan aquellas respuestas (60.8 % del Grupo 2 y 50% del Grupo 1) en las que se pone de manifiesto incomprensión del enunciado, de la tarea a realizar o de los conceptos involucrados en la situación. En respuesta a la pregunta, algunos comentarios escritos van en el sentido de: I_{10}: "*no entiendo esto*", I_5: "*de la manera que se usen, el área va a ser la misma*" y E_{16}: "*la valla debería usarse en forma circular*". En otro nivel se hallan las actuaciones que evidencian alguna comprensión del enunciado, pero se confunden los conceptos de perímetro y área. Un ejemplo es:


Respuesta de I 6

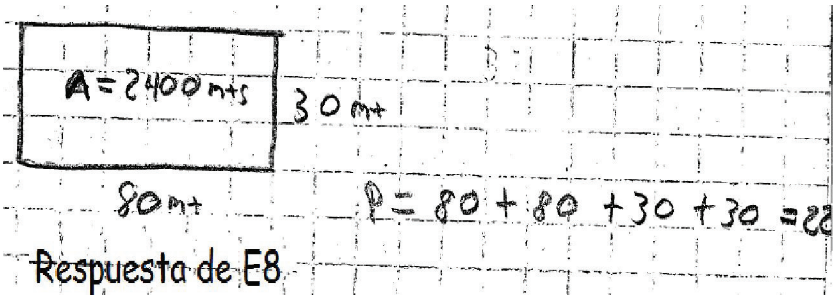
Un granjero dispone de 320 metros de valla para cercar un campo rectangular, en el cual poder resguardar su ganado. ¿Cómo deberían usarse los metros de valla para que el área encerrada sea tan grande como sea posible? 16x20 De largo 20 metros y de ancho 16 16 20

En un fragmento de entrevista el estudiante manifiesta:

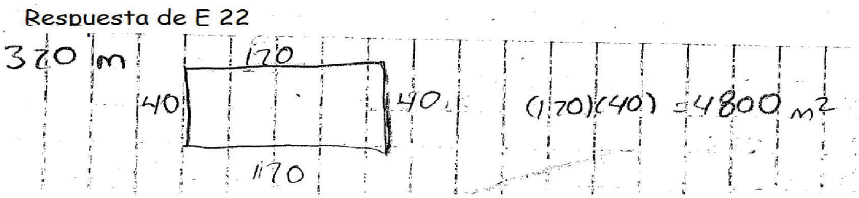
PROFESOR:	¿Cómo seleccionas estos dos números?
I_6:	Multiplicando, para que me diera lo mismo que el área, los 320.
P:	Es decir, ¿elijes dos números que multiplicados den 320?, ¿los elijes al azar?
I_6:	No, los tuve que multiplicar, tuve que hacer varias multiplicaciones.

Manipulación aritmética: en esta categoría agrupamos aquellas respuestas (21.7 % del grupo 2 y 41.6% del grupo 1) donde se puede observar que se tiene una idea de los conceptos involucrados, pero no se puede simbolizar una relación funcional (F6) debido a que se desconoce el proceso algebraico para establecer las ecuaciones (I3). Las actuaciones se dividen en tres tipos:

a) parte del conocimiento que se tiene sobre cómo calcular el área y le asigna valores arbitrarios a la fórmula *(A = bxh),* para luego verificar, de manera aritmética, si se cumple la condición de perímetro.



b) asigna valores que satisfacen la condición de perímetro, para calcular con ellos el valor de área correspondiente.



c) establece la fórmula del área y la expresión algebraica del perímetro, pero no puede relacionar ambas ideas a fin de proporcionar una respuesta correcta.

Respuesta de I3

Un granjero dispone de 320 metros de valla para cercar un campo rectangular, en el cual poder resguardar su ganado. ¿Cómo deberían usarse los metros de valla para que el área encerrada sea tan grande como sea posible? 60 100 $A = b \times a$ $P = 2B + 2A$ $P = 2(100) + x$? $P = 200 + 60(2)$

$320 - 200 = 120/2 = 60$ $P = 200 + 120 = \boxed{320}$

Lo antes expuesto muestra la falta de competencia en: (i) comprender el contexto de representación (geométrico) en que se plantea el problema, (ii) la comprensión de los conceptos involucrados en el problema, y (iii) trasladar las ideas geométricas al lenguaje algebraico.

Pregunta 4	*Análisis Particular*
Los datos de la tabla expresan los precios (pago) a los que se venden los kilogramos de azúcar en un comercio de la ciudad.	Reconocer el patrón de comportamiento conjunto de los datos de la tabla (G1) y deducir de manera intuitiva la regla que establece el comportamiento de los datos (G3). Es necesario percibir la correspondencia (F1) entre las variables representadas en el problema. Simbolizar una relación funcional con base en el análisis de los datos del problema (F6), simbolizar las cantidades identificadas en la situación y utilizarlas para plantear la ecuación (I5). Luego se debe sustituir el valor proporcionado (I3) para obtener la cantidad desconocida (I4)

Kilogramos	*Precio (en pesos)*
0.5	8
1	16
1.5	24
2	32

a) Halla la ecuación que describa el pago total en dependencia del numero de kilogramos que se compra
b) Si se compran 4 Kilogramos, ¿cuánto se debe pagar?

La situación plantea dos preguntas relativamente sencillas de responder; sin embargo, se evidencian (ver tabla 4) serias dificultades (69. 4% del Grupo 2 y el 79.2% del Grupo 1) para determinar la ecuación que describe el pago total en dependencia (F6) del número de kilogramos comprados.

Grupo 2 Economía									
3UV / *Causado por:*	*P6a)*	*G1*	*G3*	*F1*	*F6*	*I5*	*P6b)*	*I3*	*I4*
Incomprensión	26	26	26	26	26	26	4.3	26	26
Manipulación aritmética	43.4	21.7	21.7	43.4	43.4	43.4	4.3	43.4	43.4

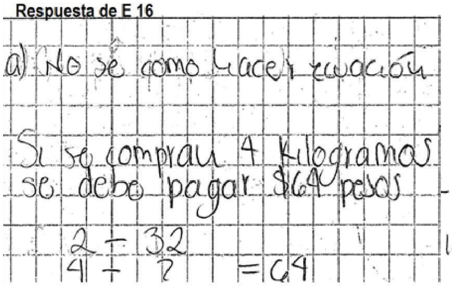
% de NO aciertos	69.4	47.7	47.7	69.4	69.4	69.4	8.6	69.4	69.4
Grupo 1 Informática									
3UV / *Causado por:*	*P6a)*	*G1*	*G3*	*F1*	*F6*	*I5*	*P6b)*	*I3*	*I4*
Incomprensión	29.1	29.1	29.1	29.1	29,1	29.1	8.3	29.1	29.1
Manipulación aritmética	50.1	28.2	28.2	50.1	50.1	50.1	4.2	50.1	50.1
% de NO aciertos	79.2	57.3	57.3	79.2	79.2	79.2	12.5	79.2	79.2

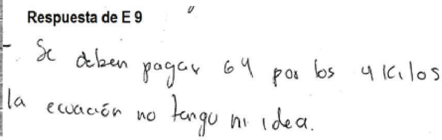
En primer lugar, resultó un obstáculo deducir la regla que establece el comportamiento de los datos (G3) y percibir la correspondencia (F1) entre las variables representadas. Muy pocos estudiantes logran simbolizar las cantidades identificadas en la situación y utilizarlas para plantear la ecuación (I5) que describe el pago total en dependencia del número de kilogramos comprados. La pregunta (b), por el contario, resultó de mayor facilidad (solo fracasa el 8.6% del Grupo 2 y 12.5 % del Grupo 1), a cuya respuesta se llega utilizando procedimientos aritméticos con el uso de los últimos datos de la tabla. Este proceder, carente de significados, no coadyuva a la determinación de la ecuación previamente solicitada en el inciso (a).

Incomprensión: se ejemplifica en aquellas actuaciones que reflejan limitado entendimiento del comportamiento de los valores representados en la tabla; tan solo se puede expresar una operación aritmética para calcular la cantidad a pagar en dependencia del número de kilogramos comprados. Casi siempre la actuación va en el sentido de responder que, si son dos kilogramos, se paga 32 pesos; entonces, a 4 kilogramos corresponde pagar 64 pesos, como se muestra en las respuestas siguientes:

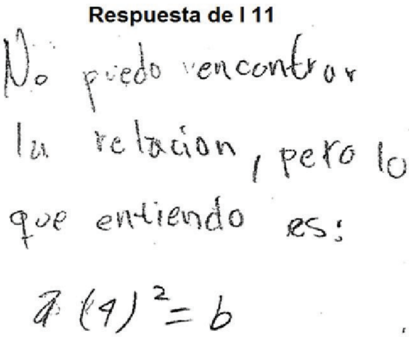
Respuesta de E 14

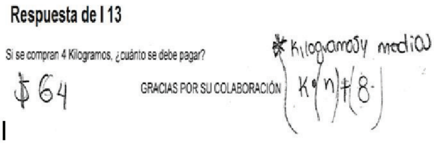
a) No se el concepto de pago total en dependencia, no sé que tengo que obtener. Si es una ecuación para obtener cualquier precio variando los kilogramos: X(1) = X(16)
b)
1 = 16
4(1) = 4(16)   4 Kg = $64.00





Traducción: agrupa las actuaciones donde, a partir de una correcta interpretación del enunciado, se decide primero responder de manera aritmética a la pregunta del inciso b). Sin embargo, la dificultad surge en el intento de traducir dicho conocimiento al lenguaje algebraico. Un ejemplo se halla en la siguiente respuesta:





Cuando se entrevista al estudiante I_{13} se obtiene una idea más precisa de esta dificultad.

PROFESORA:	¿Qué dificultad tienes para plantear la ecuación?
I_{13}:	Es que dice, "halle la ecuación que describa el pago total en dependencia del número de kilogramos".
P:	Si compro medio kilogramo, ¿Cuánto pago?
I_{13}:	8 pesos

P: ¿Si compro 1 kg?
I_{13}: 16 pesos
P: Sí observas la dependencia, ¿pero no puedes llegar a la ecuación?
I_{13}: No, no sé cómo encontrarla.

No se puede negar que muchos de los estudiantes poseen, al momento de responder, una idea intuitiva del patrón de comportamiento de los valores representados en la tabla, e incluso de la existencia de un comportamiento conjunto de los datos. Pero resulta notorio que dicho conocimiento no resulte suficiente para reconocer o representar la correspondencia existente entre las variables. Este hecho pone de manifiesto la falta de competencia en el sistema de signos del algebra, es decir, la impericia para seleccionar primero las cantidades a representar (con letras) y luego para representar la relación funcional entre ambas variables.

DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados muestran coincidencias con los de estudios anteriores (Montes, 2003; Trigueros y Ursini, 2003; Ursini y Trigueros, 1997, 2004) que tomaron como referencia el Modelo 3UV para estudiar y analizar la comprensión del concepto de variable. No resulta sorprendente, en especial si se compara con los obtenidos en Ursini y Trigueros (2006), en cuyo trabajo se expone un estudio comparativo con estudiantes de tres niveles escolares, donde se llega a la conclusión que: "cursar más materias de matemáticas no resuelve el problema de la comprensión de la variable" (Ursini y Trigueros, 2006: 32).

Recordamos al lector que, el estudio propone situaciones relativamente sencillas, algunas que pueden ser resultas por alumnos de secundaria; de manera premeditada se incluye la pregunta 1 (tomada de *ibíd.*: 11). Lo que resulta sorprendente es el hecho de que los estudiantes universitarios de este estudio, no posean una mayor comprensión que los estudiantes de secundaria que fueron analizados por las autoras, tan solo si se contrasta el nivel de respuesta relativo a la identificación de la incógnita (I4). La incomprensión del concepto, al menos en el contexto de este estudio, se mantiene igual desde la secundaria hasta la universidad; los estudiantes continúan evitando cualquier acercamiento algebraico y retornan a procedimientos de carácter aritmético, en especial cuando el problema implica cierto nivel de razonamiento de las situaciones y los diferentes contextos en que se presenta la tarea.

La falta de competencia se halla:

En la comprensión lectora, tanto del lenguaje natural como de enunciados verbales de problemas aritmético-algebraico.

En la comprensión de las situaciones de la vida real y de los contextos en que se plantean los problemas.

En el sistema de signos del álgebra, que se relaciona con la designación de signos y cantidades, y con el establecimiento de relaciones y expresiones a partir de las condiciones propias del problema.

Pero también, destaca el hecho de que muchas de las dificultades se deben, por una parte, a la incomprensión de otros conceptos involucrados en las tareas y por otra, a la falta de asociaciones entre diferentes conceptos que son necesarias para trabajar con el conocimiento algebraico. En efecto, y desde la perspectiva del Modelo Teórico Local (MTL), las actuaciones están sustentadas en la falta de competencia, especialmente cuando el estudiante se enfrenta a situaciones que involucran la relación entre los diferentes lenguajes y dominios matemáticos.

Muchos estudiantes no pueden identificar, en el sentido que señalan Bednarz y Janvier (1996), la estructura general del problema a partir de las cantidades (conocidas y desconocidas) como tampoco la relación entre ellas. Es causado por un inadecuado proceso de transferencia de ideas expresadas en lenguaje aritmético al lenguaje algebraico, y por la desconexión existente entre el lenguaje algebraico con otros dominios matemáticos, como el geométrico.

Si bien es cierto que el concepto de variable es objeto de aprendizaje en el nivel de secundaria, los resultados evidencian que la enseñanza, desde este nivel educativo, pone especial énfasis en los aspectos manipulativos, lo cual constituye un serio obstáculo en la comprensión de significados que coadyuven al proceso de transición de la aritmética al algebra.

Datos de los autores

Juana Elisa Escalante Vega
Facultad de Estadística e Informática, Universidad Veracruzana
jescalante@uv.mx
Abraham Cuesta Borges
Facultad de Economía, Universidad Veracruzana
acuesta@uv.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X (2), pp. 117-124.

Bednarz, N & Janvier, B (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra*, pp. 115-136. Dordrecht /Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor, (NFER-Nelson: Windsor).

Cuesta, A. (2007). "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía: análisis de una innovación educativa". Tesis de doctorado. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

Cuesta, A., Deulofeu, J., Mendez, M (2010). "Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía". *Educación Matemática*, 22 (3) pp. 5-20

Fernández y Puig 2002. "Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria". Actas del VI Simposio de la SEIEM. Logroño, España.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México. Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de ompetencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*. 25(3), pp. 327-342.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985). "Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies". En L. Streefland (Ed.) *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (pp. 154−158. Utrecht, Holanda.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). "Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra". *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 12-25.

Juárez, J. A. (2001) "La comprensión del concepto de variable en profesores de secundaria". Tesis de Maestría en Ciencias, DME- Cinvestav, México

Kieran, C. (1980). "The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation *vs*. an operator symbol". En Karplus. (Ed.) *Proceedings of the Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* California, pp. 163-169.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva Psicológica". *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.

Puig, L. (2006). "Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos!. En Bolea, P.; González, Mª. J. y Moreno, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática.* Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 107-126) Huesca, Instituto de Estudios Altoaragoneses/Universidad de Zaragoza.

Puig L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Puig L., y Cerdán, F. (1990). "Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales". En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). *Memorias del segundo simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.

Radford, L. (1996) "The role of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective". En N. Bernardz y L. Lee (Eds). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Kluver Academic Publishers.

Rico, L. (1995). "Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas". En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*, pp. 69-96. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (2005). "La competencia matemática en PISA". En VI Seminario de Primavera. *La enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA*. Madrid, Fundación Santillana.

Rico, L., Lupiáñez., J. L. (2010) "Objetivos y competencias en el aprendizaje de los números naturales". En *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 54. pp. 14-30

Ursini, S., y M. Trigueros (1997) "Understanding of deferent uses of variable: A study with starting college students". *Proceeding of the XXI PME Conference*, Lathi, Finlandia, pp. 4-254-4-261.

Ursini, S. (1990). El lenguaje aritmético-algebraico en un ambiente computacional. En *Cuadernos de Investigación*, Núm. 15, IV, Julio. PNFAPM, México pp. 149-156.

Ursini, S., F. Escareño, D. Montes y M. Trigueros. (2005) *Enseñanza del Algebra Elemental. Una propuesta alternativa.* México. Trillas.

Ursini, S. y M. Trigueros (2006). "¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?" *Educación Matemática*, 18 (3) pp. 5-38

Trigueros, M; A., Reyes; S., Ursini, y R., Quintero (1996). "Diseño de un cuestionario diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en álgebra". *Enseñanza de las Ciencias,* 14 (3), 351-363