Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres

Simón Mochón Cohen

Resumen: Una de las ideas fundamentales de la matemática es el razonamiento proporcional. Sin embargo, este aparece muy poco en el aula debido a que en general es remplazado rápidamente por la regla de tres. Una de las razones podría ser que el maestro no sepa que son posibles varias aproximaciones del tema. En este escrito se da una lista de posibles acercamientos a la proporcionalidad a manera de secuencia didáctica. Estos están dirigidos al maestro por lo cual están redactados en forma de hojas de trabajo con ejemplos ilustrativos. Esta exposición incluye además un breve recuento de las nociones esenciales de la proporcionalidad, algunas consideraciones teóricas y un pequeño estudio en una escuela secundaria que muestra la problemática de este tema.

Palabras clave: Proporcionalidad, Enseñanza, Regla de tres.

Teaching of proportional reasoning and alternatives for the management of the rule of three

Abstract: Proportional reasoning is one of the fundamental ideas of mathematics. However, this way of thinking appears very little in the classroom because it is rapidly replaced by the rule of three. One of the reasons could be that the teacher doesn't know that several approaches for this subject are possible. In this essay we give a list of possible approaches to proportionality as a didactical sequence. These are directed to the teacher and therefore are written in the form of worksheets with illustrative examples. This exposition also includes a brief account of the basic notions of proportionality, some theoretical framework and a small study in the secondary school which shows some of the difficulties of this subject.

Keywords: Proportionality, Education, Rule of three.

Fecha de recepción: 11 de mayo de 2011. Fecha de aceptación: 12 de abril de 2012.

IDEAS INTRODUCTORIAS

La proporcionalidad es una de las ideas principales presente en todos los niveles de las matemáticas escolares y es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias. La mayoría de las actividades matemáticas de nuestra vida cotidiana están basadas en este concepto por ser el más sencillo de utilizar (5 piezas cuestan 5 veces lo que una pieza). Sin embargo, las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas, debido a que es común que en el aula se enseñe este tema de manera mecánica utilizando la regla de tres (Ramírez y Block, 2009).

El razonamiento proporcional juega un papel primordial en el desarrollo de las ideas matemáticas del estudiante. De acuerdo con Inhelder y Piaget (1958), este razonamiento revela un progreso al nivel de las operaciones formales del individuo. Existen cuantiosos estudios sobre el razonamiento proporcional. Citamos dos de los más relevantes que, además, son precursores de esta línea de investigación. Karplus *et al.* (1983) concluyeron que los estudiantes deciden o no utilizar el razonamiento proporcional de acuerdo con la facilidad o dificultad que encuentran en relacionar los números involucrados. Hart (1984), por otro lado, mostró estrategias y errores comunes de los estudiantes entre los que se encuentra la 'estrategia aditiva', esto es, los estudiantes utilizan un razonamiento aditivo erróneo dentro de una situación de proporcionalidad.

El papel del profesor en el tema de razonamiento proporcional, como el nombre del tema lo indica, es enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de este tipo y diferenciarlo de contextos no proporcionales. Así, la enseñanza de la regla de tres como única estrategia para resolver problemas de proporcionalidad resultaría insuficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad y sus diferentes enfoques, y saber cuándo aplicar correctamente esta regla.

DOS NOCIONES ESENCIALES

Una proporción es básicamente una igualdad de razones. Esta igualdad puede aparecer como una relación entre cuatro números relacionados entre sí o dentro de una variación entre dos cantidades. Para ilustrar la primera situación, si en un salón de clase hay 15 niñas y 20 niños y en otro hay 18 niñas y 24 niños, podemos afirmar que hay la misma proporción de niñas a niños en ambos salones (3 a 4). En la segunda situación de una variación entre dos cantidades, como por ejemplo la cantidad de naranjas que se compra y su costo, la constancia de la razón se dará en cada par de valores de estas cantidades: si 12 naranjas cuestan $20 pesos, 24 costarán $40 pesos y 6 costarán $10 pesos. De esta relación proporcional se pueden deducir propiedades que la caracterizan. Por ejemplo, el precio de 18 naranjas debe ser el precio de 12 naranjas más el precio de 6 naranjas y, por consecuencia también, el precio de 18 naranjas debe ser el triple del precio de 6 naranjas.

Existen dos nociones fundamentales que sirven como base para entender los conceptos de proporcionalidad: *la comparación y la variación*. Explicaremos brevemente cada una de ellas.

Comparación. Hay dos tipos de comparaciones. La *aditiva*, por medio de una diferencia y la *multiplicativa*, por medio de un cociente (al cual llamamos razón). Es importante saberlas diferenciar y conocer las ventajas y desventajas de cada una (sin embargo, no es el objetivo de este escrito profundizar en esto).

Por ejemplo, cuando oímos que una población aumentó en 100 000 habitantes en un año, esta información es valiosa para proyectar nuevas viviendas, empleo, etc. Sin embargo, no nos dice nada en relación a la población total. En cambio, cuando decimos que una población creció en un 30% en un año, esta razón nos indica su rapidez de crecimiento, lo cual tiene también su significado y utilidad. Debemos así explicar en el aula la utilidad de trabajar con una razón, como por ejemplo: "Toda la tienda tiene el 20% de descuento".

La razón contiene la relación multiplicativa de los tamaños entre las dos cantidades, pero pierde la información sobre sus magnitudes originales. Cuando decimos que la proporción de personas con un padecimiento es de 1 a 5, desconocemos el número de personas con el padecimiento y el número total. Esto parece obvio; sin embargo, en muchas situaciones no se ve así. Por ejemplo, si se sabe que dos soluciones tienen 2 y 3 gramos de sal por litro respectivamente, se podría llegar a concluir que la segunda tiene más cantidad total de sal. Sin embargo, esto no sería correcto ya que no conocemos la cantidad de agua de cada una en términos absolutos. En otro ejemplo, si decimos que, en un triángulo rectángulo, la tangente de un ángulo es $3/4$, no podemos saber las medidas de los lados opuesto y adyacente y en consecuencia no podemos afirmar que el lado opuesto tiene una medida de 3 y el adyacente de 4.

La proporcionalidad tiene como fundamento al concepto de razón que es uno de los subconstructos de la fracción (se sugiere ver los textos Block, 2008 y Freudenthal, 1983). Así, para comprender la proporcionalidad es necesario desarrollar la idea de cantidades relativas (Lamon, 1999). Además, se debe entender la conexión de equivalencia que existe entre dos razones y conocer sus propiedades de invariancia, como la de conservar la razón al multiplicar ambas cantidades por un mismo factor (lo cual está también íntimamente ligado a la equivalencia de fracciones). Uno de los primeros artículos que aborda esta problemática es el de Noelting (1980), en donde, para observar cómo estas ideas se desarrollan, se pide a niños que elijan entre dos vasos de naranjada (preparados con diferentes cantidades de jugo de naranja y agua) cuál sabe más a naranja.

Variación. De acuerdo con Lesh, Post y Behr (1988), el razonamiento proporcional involucra un sentido de variación entre dos cantidades para comparar múltiples valores.

La variación proporcional directa es solo una, de infinidad de posibles variaciones (llamadas funciones) y por tanto, debemos saber diferenciarla de otras. Veamos algunos ejemplos.

En 30 días una ensambladora produce 600 coches. La tabla siguiente muestra varios datos relacionando los días observados y el número de coches producido.

Triple Triple

Días	*# de Coches*
30	600
90	1,800
15	300
1	20

Aquí se muestra *la característica de proporcionalidad más básica que sirve para analizar si dos cantidades están relacionadas de una manera proporcional directa.* Si una se triplica, la otra también. Si una se reduce a la mitad, la otra también (este sería el ejemplo de comparar el primer renglón de la tabla con el tercero). En general, si una cantidad sufre un aumento (del doble, triple, etc.)

o una disminución (de la mitad, tercera parte, etc.) de tipo *multiplicativo*, la otra también tendrá este mismo cambio multiplicativo de aumento o disminución.

Para contrastar damos a continuación dos ejemplos de variaciones no directamente proporcionales. Se van a repartir 700 monedas de oro entre los ganadores de un juego de lotería:

Número de ganadores	*Monedas para cada uno*
2	350
5	140
10	70
200	?

Variación de la estatura de un niño con su edad:

Edad (años)	*Estatura (m)*
0	0.40
5	1.00
10	1.40
15	1.65
20	1.80

En estos ejemplos se observa claramente que un aumento del doble, triple, etc. de una cantidad no conlleva el mismo aumento de la otra cantidad.

Consideraciones teóricas

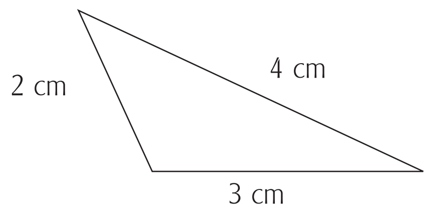
Etapas de desarrollo: Desde Inhelder y Piaget (1958), pero más profusamente desde Noelting (1980a) y Karplus *et al.* (1983) se han dado múltiples listas de las etapas de desarrollo de la proporcionalidad, dependiendo de las ideas matemáticas involucradas y su complejidad. Aquí daremos una categorización que apareció originalmente en el artículo de Karplus, basada en problemas básicos de proporcionalidad. Esta nos servirá para formular más adelante una secuencia didáctica introductoria de este tema.

A. *Incompleta.* Ignora parte de los datos o da una respuesta ilógica.
B. *Cualitativa.* Toma en cuenta todos los datos pero solo con consideraciones cualitativas ("necesita más", "necesita menos", etcétera).
C. *Aditiva.* Estrategia incorrecta que hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa.
D. *Pre-proporcional.* Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades.
E. *Proporcional.* Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia (la diferencia de estas dos últimas se explicará más adelante).

Un pequeño estudio en una escuela secundaria

Comenzaremos con el análisis de las respuestas a dos preguntas relacionadas con proporcionalidad en una escuela secundaria de la Ciudad de México, y que a continuación transcribimos. Los resultados de este análisis nos mostrarán de una manera más evidente la problemática asociada con el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad.

1) Si 2 lápices cuestan $16, ¿cuál será el costo de 50 lápices?
2) Un triángulo tiene las siguientes medidas:
3) Se quiere ampliarlo de tal manera que el lado que mide 2 cm vaya a medir 18 cm. ¿Cuánto deben medir los otros dos lados?



Para que el lector comprenda mejor los resultados, conviene describir las características de estas dos preguntas. La primera involucra una proporción que contiene dos razones enteras: un factor de 25 en el número de lápices (de 2 a 50) y una razón de $8 por lápiz. Debido a esto, se esperaba que una gran mayoría de los estudiantes no tuviera dificultad en resolverla (además, el contexto es muy familiar). La segunda pregunta tiene un contexto geométrico que resulta siempre más complejo para los estudiantes, pero la amplificación es entera (9 veces; de 2 cm a 18 cm). Las razones internas del triángulo son del doble (2 cm a 4 cm) y de "una vez y media" (2 cm a 3 cm). Esta última era la única razón que creíamos podría causar alguna dificultad por ser no entera.

Estas preguntas se aplicaron a los nueve grupos de una escuela secundaria, tres de primero, tres de segundo y tres de tercero (cada grupo de entre 20 y 25 alumnos). Globalmente, la pregunta 1 obtuvo 70% de respuestas correctas y la pregunta 2 solo 46%.

Para identificar las dificultades de los estudiantes, se realizó un análisis más profundo del tipo de estrategias utilizadas, pero únicamente a los grupos que obtuvieron el porcentaje más bajo de respuestas correctas en la pregunta 2 de semejanza.

La tabla siguiente muestra la lista de estrategias utilizadas (tres correctas y cuatro incorrectas) en estas dos preguntas (#1 y #2) junto con sus porcentajes de cada grupo y cada pregunta.

	Grupos y preguntas:					
	Primero		*Segundo*		*Tercero*	
Estrategias utilizadas	*#1*	*#2*	*#1*	*#2*	*#1*	*#2*
Uso de alguna razón	44.4%	7.7%	44.0%	8.0%	47.4%	11.1%
Correcto (sin procedimiento)	7.4%	26.9%	8.0%	16.0%	36.8%	33.3%
Regla de 3 correcta	7.4%	0.0%	12.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Totales correcto:	59.3%	34.6%	64.0%	24.0%	84.2%	44.4%
Regla de 3 incorrecta	7.4%	3.8%	16.0%	0.0%	0.0%	5.6%
Procedimiento aditivo	0.0%	34.6%	0.0%	40.0%	0.0%	44.4%
Incorrecto (otros)	33.3%	0.0%	20.0%	16.0%	10.5%	0.0%
No hay respuesta	0.0%	26.9%	0.0%	20.0%	5.3%	5.6%
Totales incorrecto:	40.7%	65.4%	36.0%	76.0%	15.8%	55.6%

Lo más evidente de esta tabla es que en la pregunta 1 se observa una mejoría en los porcentajes totales del primer al tercer grado escolar, pero no así en la pregunta 2 (el tercer grado sí resulta el mejor, pero el segundo grado tiene el mayor porcentaje de respuestas incorrectas totales).

Explicaremos a continuación brevemente cada una de las estrategias y daremos ejemplos de ellas.

Uso de alguna razón. En la pregunta 1 se utilizó la razón unitaria 8 pesos por lápiz en casi todos los casos. Solo uno o dos estudiantes de cada grupo utilizó la razón sin dimensiones 25 (50 lápices entre 2 lápices).

En la pregunta 2, se utilizó la razón entre los lados correspondientes dados 18 cm / 2 cm = 9. Esta estrategia indica cierta comprensión del problema (es interesante mencionar, sin embargo, que en un caso, el estudiante da las medidas correctas colocándolas en un triángulo que no es para nada semejante al proporcionado en el problema).

Correcto (sin procedimiento). Aquí, en ambas preguntas, los estudiantes escriben los resultados sin mostrar algún procedimiento (es de suponer que utilizan mentalmente la estrategia anterior). Estas respuestas correctas sin procedimiento muestran que hay una comprensión del problema, pero además sugieren que ambos problemas eran lo suficientemente simples para poder resolverlos mentalmente (si se entendían y se aplicaba una estrategia apropiada).

Regla de tres correcta. Dos ejemplos de planteamientos de este procedimiento en la pregunta 1 se muestran a continuación:

$$2 = 16 \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 2 & & \$16 \\ & & \\ 50 & & X \end{array}$$
$$50 = x$$

Las soluciones de este tipo son aplicaciones automáticas de una regla y por lo cual no se puede afirmar algo sobre si el alumno identifica de manera correcta el tipo de problema o si comprende su resultado. Sin embargo, la aplicación de esta regla sin una base sólida sobre las características de los problemas de proporcionalidad puede llevar frecuentemente a errores.

En la pregunta 2 no hubo aplicaciones correctas de esta regla.

Regla de tres incorrecta. Por lo general los estudiantes plantean correctamente esta regla pero, o no llegan a las operaciones de manera correcta o tienen un error al hacer las operaciones.

En general, la regla de tres se utilizó muy poco en la solución de ambos problemas (solo en el 10% de las respuestas). Esto indica que los estudiantes no sintieron la necesidad de utilizarla. Hay dos razones posibles: no la necesitaron porque los problemas tenían números sencillos o no identificaron que era un problema en el cual podía ser de utilidad. Es interesante notar que su utilización fue exitosa sólo en el 38% de los casos. Es decir, su aplicación llevó a los estudiantes a más resultados erróneos que correctos.

Procedimiento aditivo. En la pregunta 1 no se utilizaron procedimientos aditivos.

En la pregunta 2, la gran mayoría toma la diferencia entre los dos lados correspondientes dados $18 - 2 = 16$ y esto lo suman a los otros lados para obtener las respuestas. Se aprecian algunas otras estrategias diferentes también incorrectas de tipo aditivo.

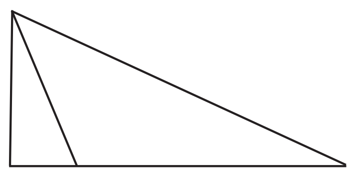
Es bien conocido que los estudiantes recurren a la estrategia aditiva cuando el problema de proporcionalidad es "complejo". En el problema 1 no apareció esta estrategia, pero en el problema 2 ocurrió en el 40% de las soluciones.

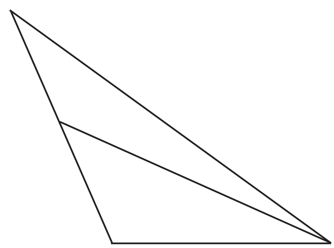
Incorrecto (otros). Aquí agrupamos una diversidad de resoluciones incorrectas a los ejercicios que no eran claramente pertenecientes a las dos estrategias anteriores. Describiremos a continuación las más frecuentes.

En el ejercicio 1 fue bastante común observar solamente la multiplicación: 50×16 (como si los 16 fueran el precio de uno, ignorando uno de los datos). Otros realizan solo la división, $50 \div 16$. Desde luego que estas operaciones recuerdan también parte del esquema de la regla de tres, pero esta, si se utilizó, no fue indicada.

En el ejercicio 2 hubo varios procedimientos en los que es difícil deducir la lógica seguida por el estudiante. Por ejemplo, uno realiza las divisiones $18 \div 4$ y $8 \div 3$. En dos casos más, los estudiantes utilizan un razonamiento proporcional pero con un factor incorrecto, que no se sabe de dónde se obtuvo.

En algunos intentos de resolución, se puede notar que los estudiantes simplemente no entienden el problema 2 ya que aparecen dibujos como los siguientes.





Es interesante preguntarse si, no entender el problema, fue un factor importante.

No hay respuesta. Aquí la mayoría deja en blanco el espacio de resolución y a veces escriben "no sé" o "no me acuerdo".

Aun cuando es difícil dar conclusiones generales de todas estas observaciones y se nota una mejora del primero al tercer grado, los porcentajes altos de respuestas incorrectas y, en particular, de estrategias aditivas, puede ser el resultado de un proceso de enseñanza con posibles deficiencias. Anotamos abajo dos de ellas:

- Los estudiantes no consideran a los "problemas matemáticos" como algo que requiere de reflexión para poder definir una estrategia y así encontrar la solución.
- Los estudiantes que aplican la regla de tres, lo hacen de manera mecánica y descontextualizada, lo cual los lleva a cometer errores.

En el apartado siguiente damos una secuencia de posibles acercamientos a la proporcionalidad que tratan de remediar la problemática descrita anteriormente. Está escrita en forma de hojas de trabajo para el estudiante, pero de manera muy concisa por las restricciones de espacio. Contienen además argumentos y comentarios adicionales, para que el profesor pueda reflexionar sobre su contenido. Dejamos al profesor la decisión final de cómo adaptarlas a sus propios estudiantes, ampliarlas, reforzarlas con otras y llevarlas a cabo, si desea utilizarlas en clase.

Acercamientos a la proporcionalidad

Las primeras tres etapas del desarrollo de la proporcionalidad que pueden manifestarse o no en los niños (*Incompleta*: ignora parte de los datos, *Cualitativa*: solo consideraciones cualitativas y *Aditiva*: uso de diferencias) requieren de ser abordadas de una manera apropiada en el aula. Un inicio de la proporcionalidad con consideraciones formales y la regla de tres como un instrumento de solución las dejaría mayormente sin ser atendidas. Así se sugiere un primer acercamiento intuitivo introduciendo ideas llamadas "pre-proporcionales", es decir, el uso de factores multiplicativos y tablas numéricas (la manera de hacer esto se mostrará en el primer acercamiento descrito abajo). Este enfoque, basado en las propiedades fundamentales de la proporcionalidad, apoyaría al niño a ir desarrollando sus concepciones sobre este contenido. Una vez que se ha cubierto esta primera etapa en su formación, se puede ir pasando por acercamientos paulatinamente más complejos (los cuales se muestran también más adelante) hasta llegar al acercamiento *proporcional* que implica ya una igualdad de razones entre los cuatro valores involucrados. Esta preparación conceptual previa llevaría finalmente a la aplicación de la regla tres de una manera más razonada con el apoyo de las nociones anteriormente construidas.

A continuación daremos una lista de acercamientos a la proporcionalidad, los cuales sugeriríamos se enseñen en la escuela básica de manera secuenciada para que este concepto se desarrolle adecuadamente. Están ordenados del más elemental al más complejo. Desde luego que hay otros factores, como los números involucrados, que influyen en la dificultad de un problema de proporcionalidad y que el profesor debe tomar también en cuenta. Como se podrá observar, en los primeros acercamientos que daremos a continuación, se utilizan razones muy sencillas para que el estudiante logre adquirir las ideas centrales y vaya descubriendo las propiedades de la proporcionalidad.

Se advierte que todas las situaciones planteadas aquí son de proporcionalidad. Sugerimos al maestro que antes de adentrarse en estos acercamientos de la proporcionalidad muestre en clase situaciones diversas de variaciones proporcionales y no proporcionales como fue indicado brevemente en la sección de "Dos nociones esenciales". Queremos recalcar que, en realidad, las situaciones no proporcionales son las más comunes. El llenado y vaciado de un tanque con cierta cantidad inicial, el crecimiento de poblaciones, el volumen de aire en los pulmones, las tarifas de un taxi o de un estacionamiento, la bolsa de valores, etc., son todos ejemplos de variaciones en el tiempo no proporcionales.

Antes de entrar de lleno a los diferentes acercamientos y como guía para el maestro, quisiéramos dar algunas sugerencias pedagógicas de cómo las actividades propuestas a continuación podrían ser presentadas a los alumnos (esto desde luego depende del estilo del profesor y sus objetivos didácticos). Nuestra orientación personal sería dar a los alumnos actividades a través de hojas de trabajo para ser resueltas por equipos. Estas hojas de trabajo deben diseñarse para fomentar el descubrimiento y la discusión de las ideas por medio de preguntas bien dirigidas (en este escrito se dan ejemplos para que puedan ser tomados como modelo). El papel del profesor en clase sería entonces el de guía para encaminar a los equipos de estudiantes en las direcciones correctas. Al final de cada actividad sería recomendable discutir las ideas en forma grupal, dirigiendo la atención del grupo en las nociones y propiedades de la proporcionalidad que el profesor tenía como objetivo desarrollar en la actividad.

Cada situación que se propone a continuación tiene un objetivo didáctico que está determinado por el tipo de acercamiento en la que está contenida. Para apoyar al profesor, se han agregado recuadros especificando el objetivo central que se persigue en cada una de ellas.

Acercamiento 1: Uso de tablas y razonamiento 'pre-proporcional' (descrito más abajo).

Considera la siguiente situación:

Situación 1. Una familia viaja en coche a velocidad constante durante todo su recorrido. Diana, la hija menor, se da cuenta que entre dos poblados que estaban a una distancia de 50 kilómetros (km), tardaron en la carretera 25 minutos. Ella quiere calcular cuánto tardarán en viajar las distancias de 150, 75 y 125 kilómetros, entre las otras ciudades que van a visitar.

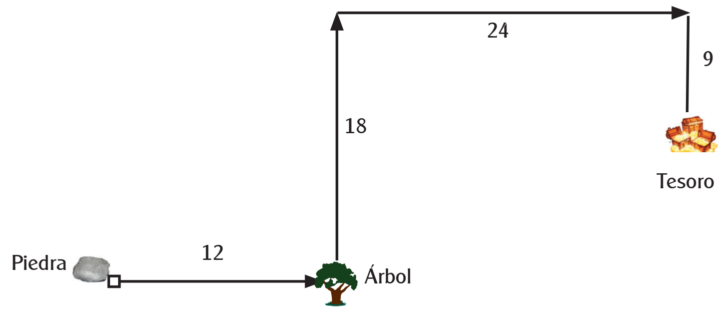
El objetivo de esta primera situación es que el alumno reflexione sobre si la situación planteada es de tipo proporcional (para esto, debe considerar si al duplicar, triplicar... la distancia, también el tiempo se duplicaría, triplicaría...) y que inicie este razonamiento proporcional a través de razones sencillas como el triple, la mitad, una vez y media y dos veces y media.

Ella razona de la siguiente manera para formar una tabla como la mostrada a continuación. Primero, 150 km es el triple de 50 km (la distancia original). Coloca tú en la tabla el tiempo correspondiente a la distancia de 150 km. Luego piensa que 75 km es la mitad de 150 km. Pon el siguiente tiempo en la tabla. Por último 125 km son dos y media veces los 50 km originales. Termina de llenar la tabla siguiendo estas tres ideas.

Distancia (km)	*Tiempo (min)*
50	25
150	
75	
125	

Considera ahora la siguiente situación:

Situación 2. Un pirata encuentra un mapa con medidas raras en el que se indica dónde fue enterrado un tesoro. El diagrama grabado es el siguiente.



El pirata localiza la piedra y el árbol y al caminar entre ellos, cuenta 30 de sus pasos. Ayúdale a saber cuántos de sus pasos corresponden a cada una de las medidas dadas en el mapa.

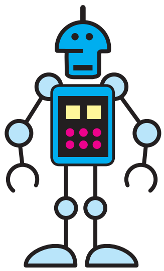
> El objetivo de esta situación es que el alumno continúe con la reflexión sobre si una situación es del tipo proporcional (¿si las medidas del mapa cambian por un factor, los pasos del pirata cambiarían también por el mismo factor?) y siga aplicando y descubriendo las propiedades básicas del razonamiento proporcional.

Después de convencerte de que esta es una situación de proporcionalidad (deduciendo qué le pasaría a la segunda cantidad –pasos pirata– al suponer que la primera cantidad –medidas mapa– se duplica, triplica, etc.), razona de manera similar a la de Diana en la primera situación para que llenes la tabla siguiente (por ejemplo, 18 es una vez y media el 12, la primera medida).

Medidas mapa	*Pasos pirata*
12	30
18	
24	
9	

Situación 3. Una fábrica de juguetes quiere manufacturar cuatro robots, idénticos al mostrado abajo, pero cada uno de diferente tamaño. Las alturas

de estos deben ser de 15 y 30 centímetros y dos más chicos de 10 y 5 centímetros.



El cuerpo de computadora del robot se produce por separado. Si el robot de 15 centímetros tiene una altura de su cuerpo de 5 centímetros, ayuda a la fábrica a saber las alturas de los cuerpos de los otros robots.

El objetivo de esta situación es similar al de las dos anteriores. Se incluye como una ilustración más del trabajo que se tiene que realizar en el aula a través de varios ejemplos diferentes.

Después de convencerte de que esta es una situación de proporcionalidad, llena la tabla siguiente, pensando en qué proporción aumentan o disminuyen las alturas de los robots (por ejemplo, la altura del segundo robot es el doble de la del primero).

Altura robot (cm)	*Altura cuerpo (cm)*
15	5
30	
10	
5	

Acercamiento 2a: Unitario (por medio de la tabla de valores).

Regresemos a la **situación 1** en la que Diana estaba tratando de calcular los tiempos para recorrer varias distancias. A Diana se le ocurre una idea genial que plasma con el 1 extra en la columna de la distancia en la tabla siguiente.

Distancia (km)	Tiempo (min)
50	25
1	(½)
150	
75	
125	

El objetivo de retomar la situación 1 es mostrar esta estrategia unitaria, que es una variación del procedimiento del acercamiento 1. El estudiante debe darse cuenta que, una vez que se llega a conocer una de las dos cantidades cuando la otra tiene el valor unitario (1), el problema se torna en un simple problema multiplicativo.
Esta estrategia de "dos pasos" (dividir y luego multiplicar) es el equivalente conceptual a la regla de tres, solo que en esta última, primero se multiplica y después se divide.

Diana pensó así: "Si puedo calcular el tiempo que nos lleva en viajar un solo kilómetro, el cálculo de los otros tiempos se vuelve muy fácil." Y continuó: "La distancia de 50 km la tengo que dividir entre 50 para obtener 1 km. Entonces si divido el tiempo de 25 min entre 50, obtendré el tiempo que estaba buscando." Siguiendo estas dos ideas, completa la tabla anterior.

Regresemos a la **situación #2** del pirata. La tabla siguiente ya tiene agregado el 1 que se le ocurrió a Diana. Complétala con el mismo razonamiento que utilizaste en la tabla anterior.

Medidas mapa	Pasos pirata
12	30
1	
18	
24	
9	

El objetivo de retomar las situaciones 2 y 3 es el de ilustrar nuevamente la estrategia unitaria y hacer ver que esta siempre es posible a través de una división inicial.

Regresa a la **situación 3** de los robots y termina de completar la tabla siguiente. Primero comprueba la altura del cuerpo dada que correspondería a un robot de 1 cm de altura.

Altura robot (cm)	*Altura cuerpo (cm)*
15	5
1	$\frac{1}{3}$
30	
10	
5	

Acercamiento 2b: Unitario (por medio de las razones entre las dos cantidades).

Regresemos a la **situación 1** en la que Diana calculó los tiempos para recorrer algunas distancias. La hermana mayor de Diana le dice que también podría haber obtenido estos tiempos apoyándose en alguna de las dos razones entre las columnas de la tabla (llamadas las constantes de proporcionalidad) como sigue.

Razón "Tiempo entre distancia": (25 min ÷ 50 km) = $\frac{1}{2}$ minuto por kilómetro

Comprueba que, multiplicando esta razón por cualquier distancia de la primera columna de la tabla de esta situación, nos dará el tiempo correspondiente de ese tramo. Si ahora la distancia fuera de 120 kilómetros, ¿cuál sería el tiempo de recorrido? ____________

El objetivo de este nuevo acercamiento es volver la atención del estudiante a la relación de los pares de números entre las dos columnas (y no en la relación entre números de la misma columna como se hizo antes). Así, como se verá en los ejemplos siguientes, aparecerá una nueva razón que resulta más ventajosa porque permanece constante a través de los pares de valores de la tabla y que se denomina la constante de proporcionalidad.

En la situación 1 del acercamiento unitario 2a, apareció la razón: 1 km corresponde a $\frac{1}{2}$ min. En este nuevo acercamiento (2b) aparece esta nuevamente, pero en la forma de una razón de cambio: $\frac{1}{2}$ min/km, conectando a las dos columnas como un factor.

Los estudiantes deben de pasar por diferentes conceptualizaciones de la proporcionalidad. Una vez que ya hayan comprendido este factor de proporcionalidad y si se desea, se puede introducir el factor de proporcionalidad simétrico a este ("de derecha a izquierda"), como se describe a continuación. Todo lo que pertenece a este segundo factor multiplicativo está escrito en letra itálica.

En un primer momento conviene limitarse a la razón anterior para no causar confusiones (esta, como se observó arriba es el factor multiplicativo de la primera a la segunda columna). Posteriormente se puede introducir la segunda razón, *mostrada a continuación (esta es el factor multiplicativo, pero de la segunda a la primera columna).*

Razón "Distancia entre tiempo": *(50 km ÷ 25 min) = 2 kilómetros por minuto.*

Comprueba que multiplicando esta segunda razón por cualquier tiempo de la segunda columna de la tabla de esta situación, nos dará la distancia correspondiente del viaje. Si ahora el tiempo de recorrido fuera de 3 horas, ¿cuál sería la distancia recorrida? __________ (Nota. Tienes que convertir el tiempo a minutos.)

Regresemos a la **situación 2** del pirata. Calcula las siguientes razones:

Razón "Pasos pirata entre medidas mapa": ________________________

Comprueba que, multiplicando esta razón por cualquiera de las medidas del mapa, te dará los correspondientes pasos del pirata. En el mapa también se indica que la llave del cofre del tesoro se encuentra enterrada hacia el sur de la piedra, a una distancia de "80". ¿A cuántos pasos del pirata equivale esta nueva medida? __________________

Razón "Medidas mapa entre pasos pirata": ________________________

Comprueba que multiplicando esta razón por cualquiera de ___________ te dará las correspondientes_____________________________.

El objetivo de retomar las situaciones 2 y 3 es el de ilustrar nuevamente esta razón constante entre las columnas de una tabla de proporcionalidad y su utilidad como una propiedad importante inherente de este tipo de tablas.

Regresa a la **situación 3** de los robots. Obtén la razón de la "Altura del cuerpo entre la altura del robot". Con esta calcula la altura del cuerpo para un nuevo robot gigante de 180 centímetros de altura.

Acercamiento 3: Razonamiento proporcional (constancia de la razón).

Situación 4. Una tienda vende paquetes de 6 latas de refresco por $15. Completa la tabla siguiente para que el dueño de la tienda la utilice.

# de latas	*Precio (pesos)*
6	15
12	
18	
24	
30	

Argumenta por qué esta es una situación proporcional (como indicamos en la situación 2).

El objetivo de este nuevo acercamiento que se mostrará a continuación es pasar a concebir a la proporcionalidad de una manera integral como una igualdad de dos razones formadas por cuatro valores. Hasta ahora hemos considerado esta relación, no directamente, sino a través de los valores de las razones involucradas. Es decir, hasta ahora relacionábamos dos valores para establecer una razón (como entidad) y esta, a su vez, se utilizaba para relacionar a otros dos valores. Ahora, directamente, se relacionan los 4 valores entre sí a través de sus razones mutuas.
Esta es realmente la conceptualización más usual de la proporcionalidad pero, por involucrar a una relación simultánea de cuatro valores, requiere de una carga cognitiva adicional para establecerla.

Divide cada uno de los cinco precios de la tabla entre el correspondiente número de latas (si puedes, utiliza una calculadora). Todos deben ser iguales. ¿Qué significado tiene este valor?

Si simbolizamos cualquier grupo de cuatro celdas de la tabla como:

# de latas A	Precio A
....	....
# de latas B	Precio B

La igualdad de los cocientes calculados arriba se puede representar de la siguiente manera:

$$\frac{\text{Precio A}}{\text{\# de Latas A}} = \frac{\text{Precio B}}{\text{\# de Latas B}} \quad \text{(que sería el precio por lata).}$$

De igual manera, divide cada uno de los valores del número de latas entre el correspondiente precio de la tabla (si puedes, utiliza una calculadora). Todos deben ser iguales. Esto se puede representar de manera similar como (nota la diferencia entre la igualdad siguiente y la anterior):

$$\frac{\text{\# de Latas A}}{\text{Precio A}} = \frac{\text{\# de Latas B}}{\text{Precio B}}$$

Las últimas dos igualdades nos pueden servir para resolver problemas de este tipo de situaciones proporcionales. Como ejemplo, plantearemos el siguiente problema.

Problema de la situación 4. *Una persona desea comprar 90 latas para una fiesta. ¿Cuánto le costarán?*

Si replanteamos este problema en una tabla como la anterior, tendríamos que:

6	15
....	....
90	Precio B

La primera igualdad nos daría:

$$\frac{15}{16} = \frac{\text{Precio B}}{90}$$

La segunda igualdad sería:

$$\frac{6}{15} = \frac{90}{\text{Precio B}}$$

Las dos son equivalentes, pero la mejor para nosotros es la primera ya que tiene la incógnita del precio arriba y por lo cual es más fácil de despejar. Dividiendo el 15 entre 6 y pasando el 90 al otro lado multiplicando', obtendremos:

$$\text{Precio B} = 2.5 \times 90 = 225 \text{ pesos}$$

Veamos un segundo ejemplo de este acercamiento.

Situación 5. Según una receta, se necesitan 12 fresas para hacer un pastel de fresas para 8 personas. Completa la tabla siguiente para una pastelería que desea ofrecer este pastel en varios tamaños.

# de personas	*# de fresas*
8	12
16	
24	
32	
40	

Argumenta por qué esta es una situación proporcional (como indicamos en la situación 2).

Se retoma en esta nueva situación este acercamiento de la constancia de la razón a través de relacionar cuatro valores directamente entre sí.

Divide cada uno de los valores de la cantidad de fresas de la tabla entre el correspondiente número de personas (utiliza, si puedes, una calculadora). Todos deben ser iguales. ¿Qué significado tiene este valor?

Si simbolizamos cualquier grupo de cuatro celdas de la tabla como:

# de personas A	# de fresas A
. . . .	. . . .
# de personas B	# de fresas B

La igualdad de los cocientes calculados arriba se puede representar de la siguiente manera:

$$\frac{(\#\text{ de fresas A})}{(\#\text{ de personas A})} = \frac{(\#\text{ de fresas B})}{(\#\text{ de personas B})}$$

e igual manera, argumenta por qué tendría también sentido la igualdad siguiente:

$$\frac{(\#\text{ de personas A})}{(\#\text{ de fresas A})} = \frac{(\#\text{ de personas B})}{(\#\text{ de fresas B})}$$

Utilizando la más fácil de las últimas dos igualdades, resuelve el siguiente problema.

Problema de la situación 5. La pastelería quiere romper el récord del pastel más grande y compra una canasta con 1 500 fresas. ¿Para cuántas personas se podrá hacer un pastel (con las mismas proporciones que antes)?

Antes de resolverlo, replantea primero este problema en la tabla siguiente:

…………	……….

Veamos una situación algo diferente

.

Situación 6. En una fotografía de un edificio hay una ventana de 3 centímetros (cm) de altura por 6 cm de ancho como la mostrada a continuación.

Un pintor quiere hacer un dibujo amplificado de esta ventana, de tal manera que la altura de la ventana le quede de 15 cm. Quiere saber de cuánto debe ser el ancho de la ventana amplificada que pintará. Para esto, les pregunta a sus dos hijos y obtiene las respuestas siguientes:

Pablo le dice: "La altura que quieres de 15 cm es 12 centímetros más que la altura en la fotografía. Por lo tanto, el ancho debe de ser 12 centímetros más que en la fotografía, o sea de 6 + 12 = 18 cm"

Pedro le dice: "La altura que quieres de 15 cm es 5 veces la altura en la fotografía. Por lo tanto, el ancho debe de ser 5 veces el de la fotografía, o sea de 5 × 6 = 30 cm"

> Esta situación (6) es bastante especial porque atiende directamente a la problemática de que algunos estudiantes utilizan estrategias aditivas. Aquí los dibujos hacen ver que una estrategia aditiva distorsiona la forma de la ventana. El objetivo entonces es crear un conflicto cognitivo en el estudiante que utiliza esta estrategia en estas situaciones de proporcionalidad. Desde luego que un solo ejemplo no sería suficiente para esto, pero se pueden crear problemas similares con figuras en las que la estrategia aditiva produzca una distorsión visible de ellas, lo cual puede resultar de gran ayuda.
> Conviene mencionar que, de cualquier manera, es conocido que cuando las razones son más complejas, algunos estudiantes recurren a la estrategia aditiva aun cuando no la utilicen en casos de razones enteras o razones fraccionarias simples.

Decide quién tiene razón y por qué. Te sugerimos que dibujes a tamaño real ambas ventanas: la de Pablo de 15 cm de alto por 18 cm de ancho y la de Pedro de 15 cm de alto por 30 cm de ancho y compáralas con la ventana de la fotografía que aparece arriba.

¿Qué aprendiste de esta situación?

Acercamiento 4: Algorítmico (basado en la 'regla de tres', pero con un apoyo contextual de una tabla y un entendimiento desarrollado anteriormente en el acercamiento #3).

Frases como *"En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios."* están basadas en la memorización sin entendimiento y por lo cual deben evitarse. A continuación damos un enfoque cercano a la regla de tres, pero que está basado en el significado de la proporcionalidad y se apoya en el uso de una "tablita".

Recomendamos que, cuando se utilice la regla de tres en problemas, se sigan los siguientes tres pasos para reforzarla (daremos a continuación una ilustración de esto).

8. Se debe verificar siempre que en la situación particular planteada se puede aplicar la proporcionalidad examinando la variación paralela entre las dos cantidades (preguntar qué pasaría a una cantidad si la otra se duplica, triplica, etcétera).
9. Conviene replantear la situación en una tabla de cuatro valores con sus medidas correspondientes (como se hizo anteriormente) para mantener el contexto del problema, el cual le da sentido.
10. Resolver el problema por medio de la igualdad de razones (esto exige un manejo elemental de ecuaciones). Si se desea, se puede pasar primero al formato tradicional de "regla de tres".

Situación 7. Con el tanque de gasolina lleno un chofer viaja entre dos ciudades que están a 180 kilómetros (km) de distancia. Para llenar su tanque de nuevo, tiene que ponerle 14 litros (L). Ahora tiene que viajar una distancia de 525 km. ¿Cuántos litros necesitará?

> Esta situación muestra cómo conectar las ideas desarrolladas anteriormente con un planteamiento utilizando la regla de tres, pero manteniendo ciertas características de las tablas que hacen que no se pierda el significado del problema que se está resolviendo.

1. Justifica por qué tiene sentido considerar esta situación como una de proporcionalidad.
2. Replanteando la situación con una tabla de cuatro valores, tenemos que:

Distancia (km)	Gasto (L)
180	14
525	G

3. Aun cuando no es necesario, ya que la tabla anterior da mayor información con el mismo arreglo de los datos, el formato tradicional de la regla de tres sería:

$$\begin{array}{llll} & 180 & \xrightarrow{\text{es a}} & 14 \\ \text{como} & 525 & \xrightarrow{\text{es a}} & G \end{array}$$

Sabemos que las razones de "derecha a izquierda" (o de "izquierda a derecha") son iguales. Podemos escribir entonces que:

$$\frac{14}{180} = \frac{G}{525} \quad \text{o} \quad \frac{180}{14} = \frac{525}{G}$$

Nota: Es muy importante que el alumno vea estas dos ecuaciones como equivalentes y que se acostumbre a pasar de una a la otra, invirtiendo las fracciones (de esta manera solo tendrá que escribir una de ellas y si la incógnita aparece abajo, sabrá que es mejor invertir la ecuación).
Para resolver la primera ecuación, sólo tenemos que pasar el 525 multiplicando al otro lado de la igualdad:

$$G = 525 \quad X \quad \frac{14}{180} = 40.8L$$

CONCLUSIÓN

La proporcionalidad es una idea tan importante que se le debe dedicar un espacio considerable en cada uno de los grados superiores de la educación básica (estudiantes de 9 a 15 años). Aquí dimos una secuencia de acercamientos que convendría trabajar en el aula una y otra vez a diferentes profundidades.

Lo más importante es dejar atrás la enseñanza que muestra a la regla de tres como la llave mágica con la que se puede resolver todo problema de cuatro números con uno faltante. Para esto se debe seguir una enseñanza conceptual basada en entendimiento y no perdiendo el contexto del problema que le da sentido al proceso utilizado.

DATOS DEL AUTOR

Simón Mochón Cohen
Departamento de Matemática Educativa.
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,
smochon@cinvestav.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Block, D. (2008) "El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria". En: R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 495-512). México: Díaz de Santos de México, Clame.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holand: Reidel, Dordrecht.

Hart, K. (1984). Ratio: *Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER-NELSON.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books, Inc.

Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. (1983). "Proportional reasoning of early adolescents". In: R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). "Proportional Reasoning". In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. NJ: Lawrence Erlbaum.

Noelting, G. (1980a). "The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I - Differentiation of stages". *Educational Studies in Mathematics*, 11, 2, 217-253.

Noelting, G. (1980b). "The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II – Problem structure at successive stages; problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring". *Educational Studies in Mathematics*, 11, 2, 331-363.

Ramírez, M. y Block, D. (2009). "La fracción y la razón: un vínculo difícil en las matemáticas escolares". En *Educación Matemática*, 21, 1, 63-90.