Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica

Ana Soledad Bravo y Ricardo Cantoral Ariza

Resumen: El libro de texto es un objeto tangible para el análisis de las transformaciones que vive el saber matemático al convertirse en objeto de enseñanza. En este trabajo se presentan resultados del análisis de algunos libros de cálculo catalogados, unos como formales y otros como actuales, los cuales se caracterizan por su extensión y los recursos gráficos que utilizan. En específico, se realizó un seguimiento del concepto de integral de línea a fin de explicar el por qué en los textos de Fisicoquímica, en el enunciado de la primera ley de la Termodinámica, se utiliza el concepto de diferencial inexacta para representar matemáticamente "pequeños cambios de calor" o "pequeñas cantidades de trabajo realizado". Sin embargo, en los textos de cálculo dicho concepto no se registra como tal. Se reportan anomalías identificadas en el seguimiento de las explicaciones que se desarrollan en ocho libros de texto de cálculo acerca de la integral de línea de funciones, de ecuaciones diferenciales lineales y de campos vectoriales. Anomalías que, con base en la Teoría de la Transposición Didáctica, fueron tipificadas como: vacíos explicativos, rupturas en la secuencia lógica de las explicaciones e incongruencias entre las definiciones formales y los ejemplos que se resuelven.

Palabras Clave: Transposición didáctica, libros de texto, diferencial inexacta.

The Calculation Text Books and the Phenomenon of Transposition Didactics

Abstract: The textbook is a tangible object for the analysis of transformations affecting the mathematical knowledge in the process of becoming objects of teaching. In this work we present results from the analysis of some calculus books considered either formal books or either books of current use, which are characterized by their extension and graphic resources. Specifically, we made a tracing of the concept of line integral in order to explain why the textbooks of Physics and Chemistry use the concept of inexact differential to mathematically represent "small changes in heat" or "small amounts of work", for enunciating of the First Law of Thermodynamics. However, in the analyzed calculus textbooks this concept is not refered as such. We report anomalies identified in the followup of the explanations on function line integral, linear differential equations and vector field, which are given in eight calculus textbooks. On the basis of the Theory of Didactics Transposition, these anomalies were typified as empty explanatory, ruptures in the logical sequence of explanations, and inconsistencies between the given formal definitions and the solved examples.

Key words: Transposition, textbooks, inexact differential

Fecha de recepción: : 1 de octubre de 2010. Fecha de aceptación: 10 de diciembre de 2011.

INTRODUCCIÓN

El problema de investigación que nos ocupa está relacionado con el esfuerzo didáctico de los autores de libros de texto, al introducir, explicar, demostrar y ejemplificar conceptos matemáticos (discurso explicativo de conocimientos matemáticos). Dado que este discurso toma una forma y secuencia determinadas, a través de su análisis se puede caracterizar e identificar inconsistencias en el desarrollo del concepto de *integral de línea*, concepto que se utiliza en el enunciado matemático del primer principio de la Termodinámica para justificar la noción de *diferencial inexacta*. Estas inconsistencias son el resultado de las transformaciones que sufre el saber matemático al convertirse en un saber a enseñar.

Por otro lado, utilizamos la categoría del *Discurso Matemático Escolar* para designar el *discurso institucionalizado* por un complejo entramado social. Podemos observar que muchos de los textos analizados reproducen los mismos ejemplos y secuencia de explicaciones. También podemos ver, en los textos editados después de los años ochenta, una regularidad singular: ubican al concepto de *integral de línea* en el contexto del cálculo vectorial; en este sentido se considera que existen elementos de un discurso institucionalizado –registrado en libros de texto– que permea el quehacer didáctico y los planes y programas de estudio en las instituciones de enseñanza.

En la enseñanza escolarizada se asume que el conocimiento matemático es susceptible de ser enseñado y aprendido, postulado que también hacen propio los autores de textos. Bajo esta idea, realizan un esfuerzo didáctico para plasmar en las páginas de sus libros explicaciones que, desde su perspectiva, sean adecuadas para el aprendizaje. Sin embargo, en este proceso de *transposición didáctica* surgen inconsistencias derivadas de este mismo esfuerzo didáctico. Por ejemplo, la noción de integral definida, históricamente, surge como uno de los métodos de aproximación de áreas bajo curvas, luego como un proceso inverso a la derivación (Teorema Fundamental del Cálculo), y posteriormente, como el límite de las Sumas de Riemann. Pero, como la definición formal sólo adquiere verdadero sentido para funciones un poco más complejas y estas exceden los límites de profundidad del texto, los autores se limitan a presentar soluciones de integrales donde la idea implícita es la noción de la integral como un proceso inverso a la derivación. En tal caso, el estudiante se limitará a memorizar la definición porque en términos prácticos no fue utilizada esta herramienta formal y, en consecuencia, no hay elementos para poder significarla.

Otro fenómeno identificado en nuestro estudio es que los textos de Fisicoquímica conservan términos y conceptos que en los libros de cálculo han sido desechados después de un proceso de formalización para los conceptos y procesos del cálculo.

LA TEORÍA DE LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA Y LOS LIBROS DE TEXTO

Cuando la comunidad matemática produce conocimiento, comunica sus resultados con el propósito de mostrar su relevancia y su validez, de modo que no reproducen la ruta de pensamiento de su creación, sino que presentan el conocimiento nuevo en forma lo más axiomática posible para que sea factible la verificación de su validez. Esta comunicación da inicio a un proceso de transformación del conocimiento que constituye uno de los objetos de estudio centrales de la Matemática Educativa.

Después, este conocimiento comunicado y validado por la comunidad matemática, sufre otras transformaciones cuando es llevado a la escuela para ser enseñado; es decir, el conocimiento sufre cambios que obedecen a su intención instruccional. Yves Chevallard (1991) introduce la expresión de *transposición didáctica* para nombrar al proceso de transformación de un conocimiento desde que es "objeto del saber", propio de los matemáticos, pasando después a ser "objeto a enseñar" y llegando a ser, por último, un "objeto de enseñanza" cuando tiene un tratamiento didáctico. Si bien estas transformaciones se inician en la misma comunidad matemática, nosotros estamos interesados en las modificaciones que tienen un propósito instruccional, esto es, en las transformaciones derivadas del propio tratamiento didáctico. En este sentido, la teoría de la *Transposición didáctica* de Chevallard nos proporciona categorías conceptuales tales como: el *saber a enseñar* y el *saber enseñado* para analizar el tratamiento didáctico que proponen los autores de textos cuando abordan los contenidos especificados en sus índices temáticos.

Los libros son un material de consulta recurrente para profesores y estudiantes, ya que contienen de manera explícita: índice de temas, explicaciones, demostraciones, ejemplos resueltos, gráficas y un largo etcétera; en consecuencia, en estos se pueden identificar aspectos relacionados con la transposición que sufre el conocimiento matemático cuando es llevado a la enseñanza escolarizada. Es decir, los textos son un punto esencial a lo largo del proceso de transposición del conocimiento matemático escolar; como también señala Jeremy Kilpatrick (1992): ellos *nos proveen de una fuente en la cual algunos de los aspectos de la transposición didáctica pueden ser investigados*.

La teoría de *Transposición didáctica*, en su sentido más amplio, considera que las transformaciones que sufre el conocimiento matemático empiezan en la misma actividad de la comunidad científica, porque con el fin de comunicar sus hallazgos, el científico debe suprimir todas las reflexiones inútiles, todo proceso errático, las confusiones y las discusiones con sus pares. De esta manera la organización de los conocimientos depende, desde su origen, de las exigencias impuestas a sus autores para su comunicación, en tal caso, el conocimiento producido para comunicarse se despersonaliza, es sacado de su contexto y su tiempo. Es por esto que Chevallard sostiene que *la transposición didáctica se desarrolla en gran parte en la comunidad científica y prosigue en el entorno del sistema de enseñanza los medios cultivados (más exactamente la noosfera)*.

En suma, un conocimiento matemático, cuando es introducido en un programa escolar, experimenta transformaciones en el proceso de su tratamiento didáctico, proceso que hace que el *saber a enseñar* sea distinto del *saber enseñado*. En palabras de Chevallard:

> El saber-tal-como-es-enseñado, el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber-inicialmente-designado-como-el-que-debe-ser-enseñado, es saber a enseñar.

Desde nuestra perspectiva, los libros de texto presentan una propuesta del saber a enseñar (índice temático) y un tratamiento didáctico (definiciones, explicaciones, gráficas, ejemplos resueltos, etc.); es decir, una forma de enseñar.

Por otro lado, desde esta teoría, la noción de *noosfera* se introduce como medio o instancia para la selección de los elementos del *saber sabio* a fin de designarlos como *saberes a enseñar*. Para Chevallard, la *noosfera* es la instancia social más inmediata que rodea el sistema de enseñanza y que se enfrenta con los problemas que surgen del encuentro con la sociedad y sus exigencias. En esta esfera social participan (directa o indirectamente y con distintos grados de implicación) diversas personas e instituciones: profesores, matemáticos con interés en la enseñanza, asociaciones de padres, editores y autores de libros de texto, la instancia política decisoria y ejecutiva, es decir, el órgano de gobierno del sistema de enseñanza. Si bien en la educación básica, media y media superior, la noosfera es una compleja estructura social, en la educación superior (en las universidades públicas), dada su autonomía, la noosfera se reduce a "comisiones académicas" que estructuran planes y programas de estudio y orientan los métodos de enseñanza. En tal caso, como la experiencia lo indica, para estructurar los contenidos de los programas de matemáticas los profesores recurren a los textos como un elemento central de consulta. Es frecuente encontrar coincidencia de contenidos para carreras similares en universidades distintas.

Por lo anterior, sostenemos que es necesario realizar investigaciones analizando los libros de texto de cálculo desde distintos enfoques teóricos porque sólo desde la difusión de resultados de estos trabajos se puede incidir en la modificación y estructuración de manuales con acercamientos didácticos más adecuados.

En un estudio de transposición didáctica en los libros de texto de álgebra (en Estados Unidos), W. Kang (1990) observó que estos se escriben bajo la suposición de que el conocimiento matemático es enseñado y aprendido a través de un procedimiento de explicación seguido de su práctica. De hecho, nosotros, encontramos que de los ocho textos revisados [W. A. Granville (1982), R. Courant (1996), C. Pita Ruiz (1995), R. Larson *et al.* (1999), Thomas G. y R. Finney (1986), E. Sowkowski (1989), J. Stewart (2002) y N. Piskunov (1973)], en nuestra investigación, sólo uno (C. Pita Ruiz) escapa al siguiente esquema general:

Introducción		**Explicación formal**		**Práctica**
Algunos elementos de aplicación y datos históricos puntuales.	⇨	Definiciones y teoremas (formales), seguidos de demostraciones.	⇨	Ejercicios resueltos y ejercicios a resolver.

Este esquema de tratamiento didáctico, que también prevalece en las aulas, es un producto de la transposición didáctica, que de momento no se puede calificar de "bueno o malo", sino que la investigación debe mostrar sus alcances y limitaciones.

En el libro de Stewart, en un texto titulado "Al alumno", el autor dice a sus lectores:

> Algunos estudiantes comienzan con sus problemas de tarea, y solo consultan el texto si se atoran en algún ejercicio. Creo que un plan mucho mejor es leer y comprender una sección del libro antes de intentar resolver los ejercicios. En particular debe estudiar las definiciones a fin de captar el significado exacto de los términos.

Como vemos hay una explícita idea de que para resolver problemas y ejercicios primero hay que estudiar las definiciones formales. Además, se piensa que los conceptos tienen un significado exacto y que esto se aprende leyendo.

Dado que los libros de texto cumplen una función didáctica porque tienen una explícita y clara intención de proporcionar situaciones de aprendizaje, los autores de estos, a partir de su concepción epistemológica y su experiencia didáctica, organizan contenidos, hacen uso de recursos técnicos y eligen la forma discursiva de presentar sus *contenidos*. En este sentido, como se especificó anteriormente, los manuales registran: los saberes a enseñar y los saberes enseñados de la siguiente manera:

saber sabio		**saber a enseñar**		**saber enseñado**
El *saber sabio* es el conocimiento validado por la comunidad matemática.	⇨	Todos los textos presentan una relación de *saberes a enseñar*bajo el título de *contenido*.	⇨	Desarrollan explicaciones de los saberes a enseñar con una *intención didáctica*. Su discurso denota una postura *epistemológica*.

Bajo este esquema, vemos que los textos presentan de manera explícita un tratamiento didáctico de los saberes matemáticos que su contenido delimita. Según Chevallard, *la exigencia de explicitación discursiva, la "textualización" del saber, conduce primeramente a la delimitación de saberes "parciales", cada* *uno de los cuales se expresa en un discurso más o menos autónomo*. En otras palabras, la delimitación de contenidos y de la profundidad de las explicaciones es un proceso necesario para comunicar el *saber a enseñar* en los libros. De esta necesaria delimitación del saber se derivan otras transformaciones que se producen en el proceso de transposición, como son:

a) la *desincretización del saber;*
b) la *descontextualización* del saber*;*
c) la *despersonalización* del saber*;*
d) la *programabilidad* de la adquisición del saber.

La explicación de cada una de estas transformaciones sirve de marco conceptual para identificar y caracterizar las anomalías encontradas en el seguimiento del concepto de integral, diferencial total e integral de línea de ecuaciones diferenciales lineales, en los textos de cálculo, y de las explicaciones de estos conceptos en el contexto de la termodinámica en los textos de fisicoquímica.

a) La delimitación del saber conduce al registro de saberes parciales, cada uno de los cuales se explica de manera ficticiamente autónoma. Esto es, la necesidad de darle un tratamiento didáctico al conocimiento matemático que es complejo e intrincado, conduce a la separación de conceptos que están fuertemente imbricados; en este sentido, se produce una segmentación del saber y por ello a este proceso se le denomina *desincretización* del conocimiento. Por ejemplo, Richard Courant (1996) dice

> Después de Euler, los autores, uno tras otro, se solidarizaron con la separación entre cálculo diferencial y cálculo integral y, al hacerlo, oscurecieron un punto clave: la reciprocidad entre derivación e integración.

En este caso, la separación entre el Cálculo Diferencial e Integral, que para muchos profesores y autores de manuales es didácticamente adecuada, para Courant representa una dificultad para entender la reciprocidad entre los procesos de derivación e integración.

En muchos casos, la división de un saber determinado en saberes independientes es visto como didácticamente útil, pero detrás de este argumento está la idea de que el aprendizaje de un complejo objeto matemático es la suma "casi automática" del aprendizaje de sus partes. No obstante, la experiencia muestra que la habilidad de establecer relaciones entre distintos conceptos no es un acto espontáneo.

b) La delimitación del saber implica también un proceso de *descontextualización*, es decir, se desubica al saber de la red de problemáticas y problemas que le dieron sentido en su proceso de creación. En los libros de texto, muchas veces, como se explicó anteriormente para el caso de la integral definida, se dan definiciones formales que, fuera del contexto de su creación, pierden sentido dado que los problemas resueltos no ameritan tal definición.

c) En general, la comunicación escrita del pensamiento matemático implica la construcción de un discurso despersonalizado (*despersonalización* del saber) en tanto no muestra la dinámica subjetiva (errores, hipótesis no adecuadas, intentos fallidos, etcétera) de su creación y realización, es decir, el sujeto queda fuera de su producción. Este hecho ha producido una visión del aprendizaje para la cual el error es una simple falta, una laguna de conocimiento, y no es visto como una parte constitutiva del proceso de construcción del saber.

d) La puesta en texto del conocimiento matemático implica, además de la delimitación, una secuenciación de los saberes a enseñar, esto es, se establece una exposición de contenidos como una progresión de conocimientos adecuada para el aprendizaje, lo que a su vez implica que el aprendizaje tiene un principio y una secuencia. Sin embargo, el orden de aprendizaje no es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber; en palabras de Chevallard, *el aprendizaje del saber no es el calco del texto del saber*. Tal concepción del aprendizaje conduce a la memorización (desprovista de significados) de los contenidos por parte de los estudiantes.

Finalmente, debemos hacer énfasis en que el conocimiento expuesto en los textos tiene un carácter estático. Siempre los estudiantes tienen la percepción de que en los libros está plasmado un conocimiento acabado, con significados únicos y que la tarea es aprender definiciones y demostraciones aunque estas no tengan ningún sentido práctico ni cuestionamiento lógico.

Efectos de la desincretización, la descontextualización, la despersonalización y la programabilidad del saber

Es preciso señalar algunas características generales de los libros de texto que nos permitirán fundamentar nuestro análisis:

1. Los textos se elaboran con una clara y explícita intención didáctica; esto es, sus autores tienen el propósito de enseñar, y sus lectores el de aprender.

2. Los textos son una fuente central de consulta para la preparación de clases por parte del docente, y de estudio para los alumnos.
3. En los textos se desarrollan explicaciones de *saberes a enseñar* especificados en su contenido.
4. Los autores de los textos eligen y elaboran una forma específica de discurso explicativo de los conceptos. Forma que expresa su experiencia y conocimiento didácticos.

A partir del análisis de la manera en que se abordan los *objetos matemáticos a enseñar* en los manuales, podemos caracterizar la forma como resuelven los procesos inevitables de su comunicación: la *desincretización*, la *descontextualización*, la *despersonalización* y la *programabilidad* del saber.

Desde nuestra perspectiva, el seguimiento de las explicaciones de un saber específico en los textos nos permite identificar ciertas anomalías que para el lector, que busca entender tal saber, se convierten en obstáculos para poder construir significados más elaborados y completos del concepto en cuestión.

Después de un primer análisis de las explicaciones de integral, diferencial total e integral de línea en los manuales de cálculo que se seleccionaron para el presente estudio, se logró tipificar las siguientes anomalías:

a) Rupturas en la secuencia lógica de la explicación. Dada la desincretización del saber, esto es, dado que un saber para ser comunicado necesariamente se descompone en conceptos parciales, si las explicaciones de estos conceptos parciales no se concatenan de manera adecuada y lógica, se producen rupturas.

b) Vacíos explicativos. La despersonalización del saber elimina del discurso preguntas contradictorias, errores, pensamientos alternos, etc.; este hecho puede dejar fuera explicaciones que se buscan, como es el caso de la *diferencial inexacta*.

c) Incongruencia entre las definiciones formales y los problemas que se resuelven. La descontextualización del saber puede originar, en algunos casos, que las definiciones formales se expliciten sin plantear siquiera una situación para la cual tengan sentido. Por ejemplo, si las integrales que se presentan a manera de ejemplos se pueden calcular con la noción de integración como un proceso inverso a la derivación, la definición formal como la existencia del límite de las Sumas de Riemann quedará como una simple justificación formal del concepto sin ningún significado para el estudiante.

Símbolos y significados de la diferencial en los libros de texto de cálculo y Fisicoquímica

Es a partir de la formalización del cálculo con el concepto de límite que las explicaciones y los términos que se utilizan en la termodinámica son excluidos de los textos de cálculo. En el caso que nos ocupa, podemos ver dos discursos paralelos para referirse a los mismos conceptos, por un lado, en la termodinámica hasta la actualidad aparecen términos como: "cantidad infinitamente pequeña", "cambio elemental", "diferencial inexacta", entre muchos otros, pero en los textos de cálculo este lenguaje desaparece. Veamos la diferencia que existe entre el significado del diferencial en los textos de fisicoquímica y los de cálculo. En el manual *Fisicoquímica* de Castellan (1998) aparece una explicación previa al enunciado de la primera ley de la termodinámica que dice:

> El trabajo producido en una transformación cíclica es la suma de las *pequeñas cantidades* de trabajo $\text{đ}W$ producidas en cada etapa del ciclo. De forma análoga, el calor transferido desde el entorno en una transformación cíclica es *la suma de las pequeñas cantidades* de calor $\text{đ}Q$, transferidas en cada etapa del ciclo. Estas sumas se simbolizan mediante las *integrales cíclicas* de $\text{đ}W$ y $\text{đ}Q$:
>
> $$W_{cicl} = \oint \text{đ}W\,, \qquad Q_{cicl} = \oint \text{đ}Q$$
>
> En general, W_{cicl} y Q_{cicl} no son cero, una de las características de las funciones de trayectoria. (Cursivas de los autores)

En otro texto, *Fisicoquímica* de Ira Levine (1983), como en la mayoría de textos de esta disciplina, en el enunciado del primer principio encontramos:

> Para un *proceso infinitesimal,* la ecuación, $\Delta U = q + w$, se transforma en:
>
> $$dU = dq + dw \quad \text{sistema cerrado}$$
>
> donde, dU es el *cambio infinitesimal* en la energía del sistema, en un proceso en que se cede al sistema una *cantidad infinitesimal* de calor dq y se realiza sobre él un *trabajo infinitesimal* dw.

Incluso, la integral de línea de la diferencial del trabajo en un proceso cíclico se explica de manera coloquial pero muy parecida al texto anterior:

> El trabajo adiabático total del ciclo $w_{ad.cic}$ es la *suma de los elementos* dw para cada una de las *partes infinitesimales* del ciclo, y esta suma es la integral de línea alrededor del ciclo.

Todos estos términos ya no solo no están presentes en los textos actuales de cálculo; al contrario, hay una descalificación de este lenguaje. En el libro de Courant, en el apartado titulado *Definición analítica de la integral. Notaciones*, argumenta lo siguiente:

> La definición de integral como el límite de una suma condujo a Leibnitz a expresar la integral mediante el siguiente símbolo:
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx.$$
>
> El signo de integral es una modificación del signo de sumatoria en forma de una *S* grande que se usó en la época de Leibnitz. El paso al límite a partir de una subdivisión finita de porciones Δx_i, es indicada mediante el uso de la letra *d* en lugar de Δ. Sin embargo, al utilizarse esta notación no debe tolerarse *el misticismo* del siglo XVIII *de considerar dx como un "infinitamente pequeño" o "cantidad infinitesimal", o de considerar la integral como una "suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas"*. Tal concepción está desprovista de significado claro y oscurece lo que anteriormente se ha formulado con precisión. (cursivas de los autores)

Esta clara descalificación del lenguaje inicial del cálculo es producto de su formalización con base al concepto de límite, después de este hecho, dentro de los textos de cálculo se abandonan las primeras ideas de esta disciplina, las cuales en efecto, para problemas donde la complejidad así lo requiere no nos serían propicias. Pero, a partir de las investigaciones en didáctica de las matemáticas se sabe que la enseñanza del cálculo que deshecha las primeras ideas de los conceptos que corresponden a las etapas históricas de su construcción, no logra formar en los estudiantes un pensamiento formal, sino que en el mejor de los casos, estos solo adquieren una habilidad algorítmica. En concreto, el lenguaje formal, preciso y axiomático vuelve inaccesible los conceptos para la mayoría de los estudiantes. Los teoremas y definiciones formales deben pensarse como una meta del aprendizaje de la matemática pero no como el inicio.

Con la intención de explicitar este principio de la termodinámica de una forma matemáticamente consistente, I. Levine reproduce el enunciado del matemático Constantino Carathéodory

> En un sistema cerrado, el trabajo w_{ad} (1⇨2) es el mismo para todas las trayectorias adiabáticas entre los estados 1 y 2.

En este enunciado, que fue formulado en 1909, ya no encontramos símbolos ni alusiones a la diferencial del trabajo y del calor. Sin embargo, este hecho limita su entendimiento e imposibilita explicaciones sucesivas de conceptos como la energía interna, entalpía, energía libre de Gibbs entre otros, motivo por el cual este autor argumenta:

> Esta forma de expresar la primera ley no aportará nada esencialmente nuevo para nosotros, pero mejora los fundamentos lógicos de la termodinámica y, por tanto, se presenta en esta sección (que puede verse por encima).

En efecto, este enunciado no aporta información, pero elimina los conceptos de calor y energía interna del sistema y se convierte en un enunciado matemáticamente correcto, pero inaccesible para entender el sentido y significado de este principio, razón por la cual, en el libro se recupera la clásica expresión matemática ($dU = dq + dw$) de este principio termodinámico para seguir explicando las funciones de estado (energía interna y entalpía).

Es evidente que, para R. Courant, el concepto de límite es importante para precisar la noción de dy o dx en el proceso de integración. En el siglo XIX la preocupación por el rigor se manifiesta con intensidad. En ese siglo se produce un intenso desarrollo de las matemáticas, caracterizado por una extensión y una diversificación continuas de las distintas ramas de esta disciplina. Según el libro *Historia de las matemáticas* de Jean-Paul Collette (1986) en el siglo XVIII los matemáticos trabajaron para enriquecer el análisis matemático con numerosos algoritmos y descubrimientos interesantes sobre funciones, pero la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo siguió siendo imprecisa e intuitiva. Es en 1823 que Cauchy desarrolló el cálculo diferencial e integral sobre la base del concepto de límite (Farfán, 1997, Cordero, 2003). Este hecho originó la idea de haber encontrado fundamentos formales para el cálculo, idea que tuvo las dimensiones de un cambio de paradigma y, en consecuencia, impulsó a la comunidad matemática a abandonar las ideas intuitivas como: "diferencias finitas", "diferencias infinitamente pequeñas", "la integración como suma de elementos infinitesimales", etcétera. Pero como vemos, la asimilación de la formalización del cálculo en la fisicoquímica nos conduciría a una reconstrucción general de sus conceptos que, de ser posible, traería pérdida de significados y se convertiría en una nueva disciplina incomprensible para la gran mayoría de profesores y alumnos.

En suma, estamos frente a la disyuntiva de ser matemáticamente precisos y abandonar las ideas iniciales de la termodinámica o conservar el significado de la integral como la suma de cantidades infinitamente pequeñas para entender una serie de conceptos de esta disciplina.

Aunque muchos maestros argumentan que la dificultad de los estudiantes para aprender las bases de la termodinámica clásica radica en su deficiente preparación en cálculo, nosotros pensamos que existe un *problema mayor*, y es que no existe una congruencia entre los términos y significados que se conservan en la fisicoquímica y los conceptos y significados que se les enseña en sus clases de matemáticas. Por ejemplo, en los textos de matemáticas, en general, no existe la explicación de la diferencial inexacta y los de fisicoquímica, en apartados llamados "interludio matemático" se concretan a decir que la integral de línea de una diferencial exacta es cero y la de una diferencial inexacta es diferente de cero. En conclusión, no es posible encontrar una definición o explicación matemática de tal diferencial. Este hecho nos muestra que, en el proceso de descontextualización del saber, desaparece del registro de saberes del cálculo el término de la diferencial inexacta porque, dada la formalidad del cálculo, no es posible definir con exactitud una forma diferencial lineal que no es exacta. Lo anterior produjo un vacío conceptual matemático para entender los textos de fisicoquímica.

Estos hechos ponen a los estudiantes frente a:

1. Libros de texto de cálculo que han eliminado de sus explicaciones las formas diferenciales que no son exactas (diferenciales inexactas en termodinámica), a pesar de que en el contexto del enunciado del principio de la conservación de la energía tienen una validez conceptual para diferenciar el trabajo y el calor (funciones de trayectoria) de la energía interna (función de estado) de un sistema.
2. Libros de texto de fisicoquímica que utilizan el término de diferencial inexacta para representar una "pequeña cantidad de trabajo" realizado por un sistema o una "pequeña cantidad de calor" que recibe el

sistema. Además, el símbolo para esta diferencial, ausente en los textos de cálculo, es distinto a "d" y difiere dependiendo del autor de los manuales de fisicoquímica: $df(t)$ en el texto ruso de A. I. Gerasimov, *et al* (1970), $\not{d}f(t)$ en el texto de G. Castellan (1998), $d'f(t)$ en el texto de L. García-Colín (1976).

LOS TEXTOS DE CÁLCULO Y SU INTENCIÓN DE SER PRECISOS E INTUITIVOS

Como textos representativos de los editados después de la década de los setenta se revisaron: *Cálculo* de R. Larson *et al.* (1999), *Cálculo con Geometría Analítica* de Thomas G. y R. Finney (1986), *Cálculo con Geometría Analítica* de E. Sowkowski (1989) y *Cálculo. Trascendentes tempranas* de J. Stewart (2002).

Estos manuales se caracterizan por tener un discurso menos rígido en comparación a la formalidad del texto de Courant; utilizan frases en lengua natural, fórmulas literales, expresiones en lenguaje formal, situaciones de aplicación, figuras geométricas o gráficos cartesianos, interpretaciones geométricas, etc. Son extensos en temas y páginas, razón por la cual las explicaciones de algunos conceptos son poco profundas como en el caso de la integral de línea.

Otro rasgo significativo es que, debido al avance de los recursos computacionales y a la idea de que lo gráfico es intuitivo, la utilización de representaciones gráficas es abundante. Un producto representativo de este pensamiento es el texto de Larson, que cuenta con dos tomos que suman 1 495 páginas y 3 500 gráficas, extensión que obedece, en palabras de los autores, a que "el texto ha puesto énfasis especial en la importancia del aprendizaje mediante gráficas, superior, sin duda, al de otros textos de los años setenta y comienzos de los ochenta." Además, aseguran que la edición revisada se sitúa

> a medio camino entre los textos que se autodefinen como tradicionales y los considerados como reformistas. Nuestro enfoque es tradicional por cuanto creemos firmemente en la importancia de una teoría rigurosa, con enunciados precisos y demostraciones de los teoremas.

De la misma manera, en el prólogo de su libro, J. Stewart dice que su premisa ha sido que *se puede lograr la comprensión conceptual sin renunciar a lo mejor del cálculo tradicional*, y también considera la utilización de gráficas como un acercamiento intuitivo. Sin embargo, en estos cuatro textos, en la mayoría de los casos, las gráficas cumplen un papel sólo ilustrativo, es decir, no cumplen con la intención de mostrar lo que la formalidad esconde. Como se verá cuando se analice el concepto de integral de línea, ninguno de estos libros presenta en sus explicaciones una interpretación gráfica de la integral de línea de funciones sobre una trayectoria. En cambio, el *Cálculo Vectorial* de Pita Ruiz, a pesar de utilizar un lenguaje formal y riguroso, difiere de los anteriores en la forma de presentar los teoremas, las definiciones y los recursos gráficos: 1) propone una definición inicial de la integral de línea de campos vectoriales, 2) presenta una interesante secuencia de problemas resueltos, 3) discute las respuestas de los problemas provocando una serie de preguntas centrales, 4) responde las preguntas planteadas formulando las definiciones y teoremas pertinentes y 5) concluye con una interpretación gráfica de la integral de línea y la resolución de problemas que ameritan tal significado. (Se sabe que este autor tiene una formación en Matemática Educativa).

Otro ejemplo de que estos textos utilizan los recursos gráficos como una ilustración más que como una interpretación de lo que la formalidad no permite visualizar, es el hecho que ninguno de ellos presenta una interpretación gráfica del Teorema fundamental del cálculo. En cambio, el texto de Courant a pesar de que el uso del recurso gráfico es limitado, sí propone con un ejemplo concreto una interpretación gráfica de este teorema:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{u}\,du \qquad \int_a^b \frac{1}{u}\,du = \ln b - \ln a\,.$$

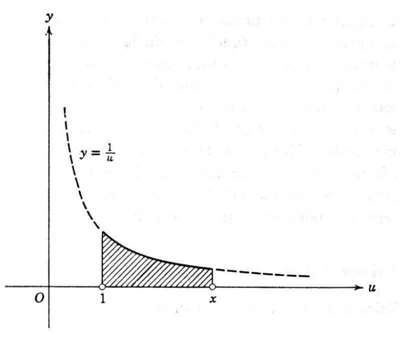


Figura 2.18 Log x representado por un área.

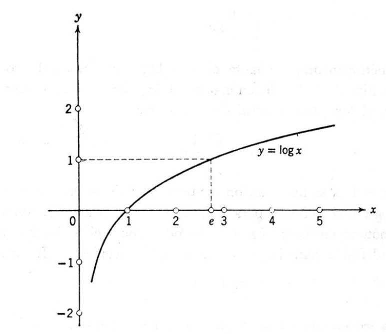


Figura 2.19 El logaritmo natural

Si bien para los autores de los libros editados después de la década de los setenta, el acercamiento gráfico es intuitivo, para R. Courant y F. John la intuición está relacionada con la aplicación de los conceptos a problemas de la realidad:

> La obra evita el estilo dogmático que oculta la motivación de los conceptos y las raíces que el cálculo tiene en la realidad intuitiva. Un importante objetivo que se persigue en este libro es mostrar la relación recíproca entre el análisis matemático y sus diversas aplicaciones y destacar el papel de la intuición. Esperamos que cierto énfasis en la precisión no interfiera con este objetivo. (En el prólogo de la edición revisada)

Como vemos, las dos preocupaciones centrales de los autores son, por un lado, proponer situaciones de aplicación como un acercamiento intuitivo, y por el otro, la precisión de sus definiciones y demostraciones. Esta reflexión plantea una importante interrogante a los autores de libros de texto: ¿es posible ser a la vez preciso e intuitivo en el discurso explicativo de los conceptos del cálculo? Cabe recordar que, desde el siglo XVIII, surge la necesidad de escribir tratados de cálculo, con el fin de que la materia fuera accesible a un público mucho más numeroso que el pequeño círculo intelectual de la época. Es por esto que los autores, desde entonces, están interesados en que el material de sus textos sean accesibles a la mayoría de estudiantes y, en consecuencia, es importante pensar en elementos intuitivos. Es decir, los autores tienen que conciliar dos hechos inevitables:

- La historia de la matemática muestra que cada avance en la generalización y precisión de los conceptos del cálculo produce definiciones y demostraciones cada vez más formales; en tal caso, las definiciones sin errores nos alejan de las ideas intuitivas que dieron origen a estos conceptos.
- Existe la exigencia social de que los textos deben ser accesibles para la mayoría de estudiantes.

Estos dos hechos son una preocupación central para los autores de manuales de cálculo, por esto explicitan de manera clara la intención de presentar acercamientos intuitivos y a la vez definiciones exactas y precisas. Sin embargo, como se sabe, lo gráfico no necesariamente es intuitivo; por el contrario, el pensamiento visual demanda un mayor nivel cognitivo que el pensamiento algorítmico (Eisenberg y Dreyfus, 1991), y las aplicaciones de conceptos a situaciones reales demandan la movilización de distintos registros de representación (R. Duval, 1993).

Estas exigencias, han orillado a los autores de textos a seguir manteniendo una estructura clásica de exposición: introducción, explicación formal, utilización de gráficas como ilustración y problemas de aplicación. Este esquema, que pone énfasis en la exactitud de la definición de los conceptos, no resuelve los problemas originados por los procesos de dexcontextualización del saber. Es necesario que el diseño de textos se realice desde otra perspectiva, se debe poner atención en situaciones que posibiliten la construcción de significados de los procedimientos y conceptos matemáticos más que en sus definiciones formales. En otras disciplinas, como la física, podemos ver que existen problemas que no requieren la teoría de la relatividad de Einstein para resolverse y que basta la teoría de Newton para muchos problemas de mecánica. De este modo, creemos que insistir en los libros y en los cursos de cálculo, en definiciones precisas sin que el problema a resolver lo amerite conduce a que los estudiantes las memoricen sin la oportunidad de construir significado alguno. En otras palabras, la preocupación central no debe ser la precisión de las definiciones, sino la construcción de significados del concepto.

A manera de ilustración de lo expuesto, analizaremos los distintos significados del proceso de integración que se desarrollaron a través de la historia del cálculo.

Integral como una suma de un número infinito de "cantidades infinitamente pequeñas": $\int_a^b df(x)$	Integral como proceso de antiderivación: $\int f'(x)$	Integral como la existencia del límite de las sumas de Riemann: $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$

El tránsito del significado de la integración como proceso inverso a la derivación a su definición como la existencia del límite de las sumas de Riemann resume muchos años de desarrollo del cálculo. Según Collette, (1986), la relación entre la función continua y la función diferenciable no estaba comprendida por Cauchy; él cree que toda función continua admite necesariamente una derivada.

Es Riemann el que retoma la noción de integral definida de Cauchy y en lugar de postular la continuidad puntual para el integrando, busca funciones más generales y determina las restricciones necesarias para las que pueden existir las integrales de estas funciones. De esta manera llega a la generalización del concepto de integral que engloba las funciones $f(x)$ definidas (no necesariamente continuas) y acotadas en un intervalo cerrado [*a, b*].

Como podemos ver, para funciones que son derivables no hay necesidad de tal definición formal de la integral. De hecho, en ninguno de los textos revisados excepto en el de Courant, se resuelven integrales de funciones cuya integración demande esta definición.

Este problema se origina por el proceso de *descontextualización* del saber, es decir, se desubican los conceptos y sus significados de la red de problemáticas y problemas que le dieron sentido en su proceso de creación y esto origina una incongruencia entre la definición y los procesos de integración que se resuelven.

LA INTEGRAL DE LÍNEA DE FUNCIONES, DE CAMPOS VECTORIALES Y DE FORMAS DIFERENCIALES LINEALES

Los contenidos (*saberes a enseñar*) y el tratamiento didáctico de los conceptos en los textos de cálculo editados a finales del siglo XX muestran un proceso de homogenización, es decir, se certifica que existe una secuencia de conceptos, ejemplos y definiciones que se repiten, hecho que nos indica la existencia de discurso matemático institucionalizado y consensado a nivel internacional (Cantoral, 1997). Estos libros poco difieren en los temas del capítulo en el que se aborda la noción de *integral de línea*, y en la profundidad y extensión de sus explicaciones. Veamos, a manera de ejemplo, la secuencia de temas en los siguientes textos: *Cálculo* de R. Larson, *et al.* (1999), *Cálculo con Geometría Analítica* de E. Swokowski (1989) y *Cálculo. Trascendentes tempranas* de J. Stewart (2002):

Texto de R. Larson, *et al.*
Capítulo 14. Análisis vectorial

Campos de vectores 1290
14.2 Integrales de línea 1302
14.3 Campos vectoriales conservativos e independencia del camino 1316

Texto de E. Swokowski

Texto de J. Stewart

Lo primero a señalar es que estos complejos temas se explican en pocas páginas, de allí que su tratamiento cumpla un papel informativo más que explicativo. Po ejemplo, el texto de Larson, *et al.* ocupa 11 páginas y el de Swokowski sólo nueve.

Por otro lado, como se señaló con anterioridad, la secuencia de contenidos es bastante similar, pero lo importante es que se ubica el teorema de Green inmediatamente después de demostrar que, para una *diferencial exacta,* la integral de línea es independiente de la trayectoria; esto no tiene sentido ya que para estas formas diferenciales lineales la fórmula de Green es igual a cero. Este es un claro ejemplo de los efectos de la *desincretización* y la *programabilidad* del saber, estos dos temas: *Independencia de trayectoria* y el *Teorema de Green* se tratan como saberes parciales y autónomos.

A diferencia de estos textos, en el de Courant, la integral de línea se desarrolla en el capítulo 1 (tomo II) titulado *Funciones de varias variables y sus derivadas*, y en el apartado *Diferenciales e integrales de línea* y no en el contexto del cálculo vectorial; el teorema de Green aparece en el capítulo 5 como *Relación entre las integrales de línea y las integrales dobles en el plano.* Esta forma de presentar estos contenidos es mucho más adecuada porque ubica estos conceptos en contextos que les proporcionan sentido y significado.

Otro ejemplo que nos remite a la homogenización del tratamiento de los saberes matemáticos, es que para mostrar la utilidad de la integral de línea para calcular áreas limitadas por curvas cerradas simples, en todos los manuales revisados se presenta la fórmula:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

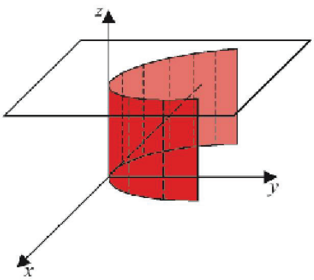
para calcular el área cerrada por la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

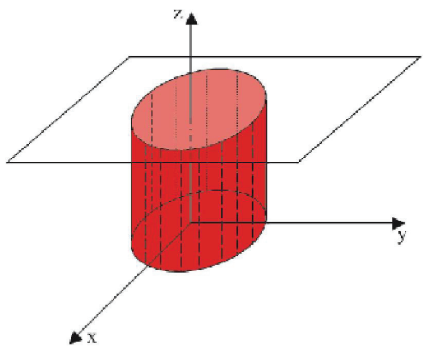
Es sorprendente que este ejemplo se repita en todos los textos analizados. Además, su tratamiento, en ausencia de una representación gráfica de la integral de línea, se reduce a un procedimiento algorítmico que sirve para calcular áreas dentro de curvas cerradas una vez que la curva se ha parametrizado. Esta fórmula aparece en el libro de Courant en el contexto de funciones de una variable, en los textos actuales se presenta como una consecuencia del teorema de Green. En el primer caso, hay un obstáculo adicional para conceptualizar este procedimiento y es que la integral de línea no tiene sentido si no se interpreta a *"x"* y *"–y"* como funciones de dos variables.

Vacíos explicativos en los textos actuales

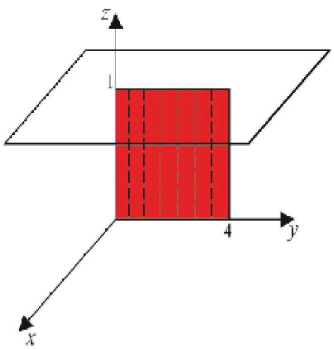
Además, de todos los señalamientos anteriores es pertinente precisar lo siguiente:

1. A pesar de que estos manuales utilizan el recurso gráfico como un acercamiento intuitivo a los conceptos del cálculo, no discuten la representación gráfica de la integral de línea de funciones de dos variables independientes como el área bajo la curva que forman los valores de la función siguiendo la curva de integración. Por ejemplo, para la función $f(x,y) = 1$, integrada sobre la parábola $y = x^2$, y sobre el círculo $x^2+y^2=1$, podemos graficar:





o para la integral de esta misma función sobre la parábola pero sólo respecto a *y*, tenemos que la integral de línea $\int_0^4 f(x,y)dy = 4$ este resultado corresponde al área de la gráfica:



2. En el teorema sobre la independencia de trayectoria de los campos conservativos, utilizan el concepto de conjunto conexo sin mostrar ni ejemplificar el porqué de la necesidad de que el abierto R, en el que es continuo el campo vectorial F, debe ser conexo. Sólo se informa de manera breve y coloquial lo que significa una región abierta y conexa y se muestran dibujos de estas regiones.
3. Dado el bajo nivel de profundidad con que se aborda la noción de integral de línea en estos manuales, el seguimiento de sus explicaciones no aporta ningún elemento para entender la diferencia significativa que existe entre la integral de línea de campos vectoriales conservativos y de campos vectoriales no conservativos. Por ejemplo, en el texto de Larson se introduce el concepto de integral de línea de una forma diferencial lineal, sin ninguna explicación, sólo se dice que **F**. d**r** se escribe a menudo como $Mdx + Ndy$. Esto es, no se explica que la integral de $\int_C (M\,dx + N\,dy)$ es parte del estudio de las ecuaciones diferenciales, y en el capítulo en que tratan este tema no se retoma el concepto de integral de línea. Este hecho muestra un proceso de *desincretización* que produce compartimentos aislados sin posibilidad de establecer vínculos entre ellos.
4. El contexto de aplicación de las nociones del cálculo en algunos casos puede ser un acercamiento didáctico que propicie un aprendizaje significativo, pero en este caso, la noción trabajo dentro del cálculo vectorial, en lugar de ser un elemento de motivación se vuelve un obstáculo para el entendimiento de la integral de línea. Para un estudiante sin conocimientos previos de física, lejos de favorecer la comprensión de este concepto, este contexto le ocasionará mayores dificultades cognitivas. En los textos de Courant y de Pita, las aplicaciones en la física se consideran como temas que requieren conocimientos más avanzados para entenderlas.

Rupturas en la secuencia lógica de la explicación en los textos actuales:

1. Las integrales de línea de funciones de dos o más variables independientes, de campos vectoriales y de formas diferenciales lineales, se abordan sin explicitar las diferencias sustanciales que existen entre ellas. Por ejemplo, para transitar de la integral de línea de funciones de varias variables independientes a la integral de línea de campos

vectoriales, solo se argumenta que una aplicación importante de estas integrales en la física es el cálculo del trabajo realizado por una fuerza. Es decir, se ve a la integral de línea de campos vectoriales como una simple aplicación algorítmica del concepto de integral de línea de funciones de varias variables, lo cual no permite significar el porqué de dos hechos importantes:

La integral de línea de *campos conservativos* sobre una curva cerrada simple es igual a 0.

$$\oint F \cdot dr = 0$$

La integral de línea de *campos no conservativos* sobre una curva cerrada simple es diferente de 0.

$$\oint F \cdot dr \neq 0$$

2. Las definiciones, los teoremas y ejemplos resueltos tienen el objetivo central de definir los campos vectoriales conservativos y su independencia de la trayectoria de integración. Sin embargo, el tema inmediato a tratar es el teorema de Green, el cual tiene sentido justo para campos no conservativos o formas diferenciales no exactas, porque para el caso de los conservativos (o una forma diferencial exacta) la expresión analítica de este teorema es igual a 0.

Seguimiento del concepto de integral de línea en textos formales

Como vimos en el apartado anterior los textos editados después de los setenta no explican la integral de línea con profundidad; cumplen solo un papel informativo. No aportan ninguna información para nuestro análisis. Con el propósito de dilucidar el porqué no existe en los textos de cálculo ni el término ni la explicación de la diferencial inexacta, se realizó un seguimiento de este concepto en los textos: *Introducción al cálculo y al análisis matemático* de Richard Courant (1996) y *Cálculo Vectorial* de Claudio de Jesús Pita Ruiz (1995).

El texto de R. Courant (1996) presenta la noción de integral de línea en el contexto de las formas diferenciales lineales. La forma prominente de su discurso es axiomática y el recurso gráfico es mínimo. En la edición revisada, a pesar de que se utilizan acercamientos geométricos no los considera como fundamento de los conceptos del cálculo. En el apéndice que introducen al final de las explicaciones de la integral de línea se dice:

> La intuición geométrica y la realidad han proporcionado motivación poderosa e ideas guía para el pensamiento matemático constructivo. Sin embargo, con el avance del análisis desde principios del siglo XIX, se ha vuelto una necesidad imperiosa dejar de invocar a la intuición como justificación principal de las consideraciones matemáticas. Nos hemos vuelto cada vez más hacia las demostraciones rigurosas basadas en la precisión robustecida axiomáticamente y los conceptos y procedimientos claramente enunciados.

Este párrafo describe con elocuencia las características del texto y la postura epistemológica de los autores. Los recursos gráficos son mínimos y sólo ilustran las trayectorias sobre las que se integra.

En la explicación de la integral de línea de formas diferenciales lineales encontramos que en matemáticas el símbolo *df(t)*, se utiliza indistintamente para representar las *diferenciales exactas* y las *diferenciales no exactas*, en cambio, en los libros de fisicoquímica se utilizan dos símbolos distintos: *dE*, para representar la diferencial exacta de la energía interna y, $\not{d}W$ y $\not{d}Q$, para representar las diferenciales inexactas del trabajo y del calor.

En el texto se explica que si se tiene una función $u = f(x, y, z)$ entonces su diferencial total está dada por la expresión

$$du = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz \quad (1)$$

Luego por la regla de la cadena se expresa la diferencial *du* como

$$du = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt \quad (2)$$

esta ecuación, dice el texto, es la diferencial $du = \frac{du}{dt}dt$ de la función u "a lo largo de cualquier curva" representada paramétricamente por:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (3)$$

Pero cuando de manera general se refiere a que cualquier forma diferencial lineal *L* (exacta o no exacta) expresada por:

$$L = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz. \quad (4)$$

puede parametrizarse y convertirse en la expresión (5). La explicación textual es la siguiente:

> La razón por la que tiene sentido considerar una forma diferencial *L*, incluso cuando no es una diferencial exacta, es que, a lo largo de cualquier curva *C* dada paramétricamente en la forma
>
> $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$
>
> *L* se transforma en la diferencial
>
> $$L = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt \quad (5)$$
>
> de una función de una sola variable. Esta función, es simplemente la dada por la integral indefinida
>
> $$\int L = \int \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (6)$$

Resulta que la forma diferencial (5) representa tanto a las diferenciales exactas (expresión 2) como a las que no lo son, en consecuencia, la integral indefinida de *L* nos proporcionará una función *f(t)* para *L exacta* y para *L no exacta*. Es decir, la integral indefinida (6) es una función $f(t)$ que representa a una función "primitiva" especial (*función potencial* en el cálculo vectorial) que dio origen a *L* y a una función que no es la "primitiva" de *L*. Además, a diferencia del cálculo de funciones de la una variable, donde *df(x)* tiene un significado único, en el contexto de funciones de varias variables *df(t) representa a la diferencial exacta y a la diferencial que no es exacta*, llamada inexacta en la termodinámica. Este hecho no se especifica ni se explica con claridad.

Otro hecho a destacar es que en el manual de Courant, como en los textos editados después de la década de los setenta, cuando se encuentra la expresión de la diferencial total de una función de varias variables, no existe la exigencia de que las derivadas parciales sean continuas en un conjunto R *simplemente conexo*. Cuando se aborda el concepto de diferencial total, esta se define como:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \overbrace{f_x(x,y)}^{M}\,dx + \overbrace{f_y(x,y)}^{N}\,dy$$

y que para esta diferencial se cumple que las derivadas cruzadas de *M* y *N* son iguales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Sin embargo, para la función $f(x,y) = arc\tan\frac{y}{x}$, tenemos que la integral de línea de su diferencial total sobre un círculo unitario no es igual a 0 a pesar que las derivadas cruzadas de *M* y *N* son iguales.

$$\oint \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi$$

Esta situación lleva a plantear otro requerimiento para que la integral de línea sea igual a cero y es que las derivadas parciales sean continuas en un conjunto R *simplemente conexo*, este hecho es contradictorio, porque la nueva exigencia para que se cumpla con el teorema de la independencia de trayectoria no estaba presente en el momento de tratar las diferenciales totales. Situación que no se explica en este texto pero encontramos en el *Cálculo vectorial* de Pita Ruiz la siguiente explicación:

> Un hecho sobre el que llamamos la atención es que la propiedad del campo F de ser conservativo, es una propiedad *global*: se pide que haya una función *f* definida donde está definido el campo F, y que en todo *U* se tenga que F es el campo gradiente de *f*. Por otra parte, la propiedad establecida en el teorema 7.4.2, que está expresada en términos de derivadas parciales de las funciones coordenadas de F, es una propiedad *local*: tales derivadas parciales establecen un comportamiento determinado del campo F en los alrededores del punto en que ocurre la igualdad de las derivadas parciales. No es extraño pues que, en principio, estas dos propiedades *no sean equivalentes*. Lo que sí podemos esperar que acontezca, en base a la observación hecha en este párrafo, es que la propiedad establecida en el teorema 7.4.2 garantice *localmente* que el campo F es conservativo.

Aquí el teorema (7.4.2) es el que establece que las derivadas cruzadas deben ser iguales. Esta cita explica que cuando se aborda la diferencial total de una función de dos o más variables, no se exige que las derivadas parciales sean continuas en un conjunto R simplemente conexo. Pero cuando se integra una ecuación diferencial lineal para que se cumpla el teorema fundamental de la integral de línea es necesario que además de la condición de que las derivadas cruzadas sean iguales (condición necesaria) las derivadas parciales deben ser continuas en un conjunto simplemente conexo (condición suficiente). Esta argumentación esclarece el vacío explicativo que presentan todos los textos revisados incluyendo el tratado de Courant. Cuando en los textos se aborda el concepto de la diferencial total de funciones de varias variables no se establece que la función debe estar definida donde están definidas las derivadas parciales. Esto representa también una ruptura en la secuencia lógica de las explicaciones.

Un acercamiento gráfico también nos puede ayudar a entender este contraejemplo, si nosotros consideramos que la integral de línea de una forma diferencial lineal nos posibilita encontrar la función *f(t)* que, para el caso de las diferenciales totales, es la "primitiva" de L entonces se puede ver claramente que la trayectoria pasa por puntos donde la función no está definida:

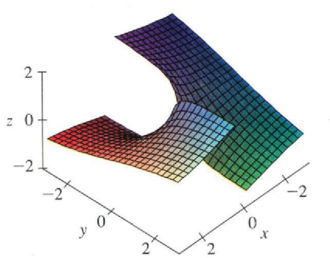


Figura 1

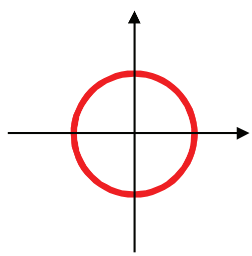
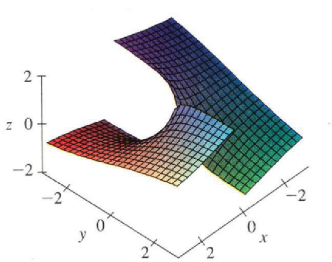
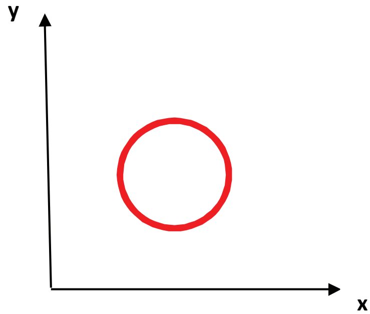


Figura 2

En consecuencia la integral de línea sobre esta trayectoria toma otro sentido. Pero si moviéramos la trayectoria a la zona de definición de la función entonces podremos constatar que la integral de línea será igual a 0.





$$\oint \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

En conclusión, la integración de formas diferenciales lineales no es sencilla e incluso en el texto de Courant aparecen vacíos para entender la independencia de trayectoria. Con mucha mayor razón las explicaciones de los textos de fisicoquímica son limitadas y contradictorias y sólo reproducen un argumento descontextualizado de la diferencial exacta para entender la inexacta, en estos solo se alude que la condición para ser exacta es que las derivadas parciales cruzadas de M y N deben ser iguales, detrás de esta explicación está la idea de que lo exacto explica lo inexacto.

Para significar el teorema de la independencia de trayectoria se propone una sencilla gráfica, desde la cual se puede percibir lo que la formalidad no hace explícito. Es decir, si proponemos una superficie que represente a la función $f(x,y)$, al integrar su diferencial total dada por *L*, lo que se calcula es el valor de $\Delta f(x,y)$, de la fórmula:

$$\int_{C*} L = \int_{P_i}^{P_f} L = \Delta f(x,y) = f(x_f, y_f) - f(x_i, y_i),$$

donde (x_i, y_i) y (x_f, y_f) son los parámetros del punto inicial P_i y del punto final P_f de la trayectoria de integración. Esta interpretación gráfica es homóloga a la presentada en el texto de Courant para el Teorema fundamental del cálculo.

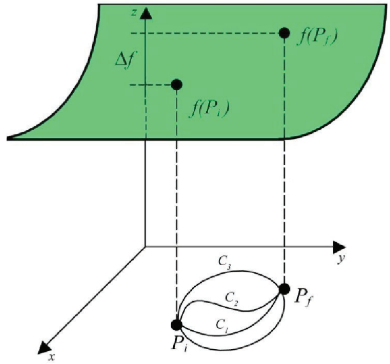


Figura 1. Independencia de trayectoria

En esta gráfica se puede ver con claridad cómo $\Delta f(x, y)$ no dependerá de la curva sobre la que se integra, pues el proceso de integración dará el mismo resultado (Δf) para las curvas C_1 y C_2, y para C_3 será igual a 0. Para el caso, de una forma diferencial lineal no exacta, la integral de línea como integral indefinida me da una función $f(t)$ que no es la función que dio origen a L, es decir, los coeficientes A, B, C no son las derivadas parciales de $f(x, y)$, para estas formas diferenciales la gráfica no aplica.

COMENTARIOS FINALES

Los libros de texto de R. Larson *et al.* (1999), Thomas G. y R. Finney (1986), E. Sowkowski (1989) y J. Stewart (2002) presentan una secuencia semejante de contenidos y una misma forma de abordarlos: explicación formal de conceptos seguido de aplicaciones. Hay una atomización de contenidos y cada uno de los cuales se explica de manera autónoma. Los recursos gráficos, que son abundantes, cumplen un papel ilustrativo más que didáctico. Además, a pesar de la extensión de estos textos, la integral de línea se aborda en pocas páginas y dada la superficialidad de sus explicaciones no aportaron información relevante acerca de la integral de línea y la independencia de trayectoria.

Es necesario pensar en formas más creativas de organización de contenidos de los textos para contribuir, en la medida de lo posible, a eliminar los efectos negativos del proceso transposición que sufre el saber matemático. Una manera de cambiar la clásica secuencia de contenidos de los manuales sería estructurar los conceptos del cálculo alrededor de preguntas o problemas abiertos, esto posibilitaría la integración de conceptos y la significación de los mismos.

Como se mostró en el escrito, producto del proceso de delimitación del saber matemático y en aras de la exactitud, los autores presentan definiciones formales de los conceptos centrales del cálculo (función, derivada, diferencial e integral) y eliminan de sus páginas las primeras ideas de estos conceptos que, a nuestro juicio, son convenientes para que el lector se familiarice con esta disciplina. En este sentido, sería didácticamente adecuado utilizar los diferentes significados y definiciones que se dieron a través de la historia para que a partir de su análisis e identificación de sus limitaciones se perciba la necesidad de construir definiciones más exactas y formales. En otras disciplinas, como tratamiento didáctico se utilizan definiciones o modelos que se desarrollaron a través de la historia para llegar a conceptos más actuales. Por ejemplo, en los textos de química se explica el modelo actual de átomo con un proceso de análisis de los distintos modelos atómicos propuestos a lo largo del tiempo. Esta posibilidad didáctica, eliminaría en parte la dificultad de que los estudiantes no encuentren en los textos de cálculo los términos y significados que utilizan los manuales de otras ciencias usuarias de esta disciplina.

En general, los libros de texto de cálculo han eliminado de sus explicaciones las formas diferenciales que no son exactas (diferenciales inexactas en Termodinámica), a pesar de que en el contexto del enunciado del principio de la conservación de la energía tienen una validez conceptual para diferenciar el trabajo y el calor (funciones de trayectoria) de la energía interna (función de estado) de un sistema. Este hecho es el resultado de la transposición didáctica que sufre la noción de integral de línea cuando es llevado a las páginas de los manuales de cálculo, efecto que obstaculiza la comprensión matemática de este concepto; asimismo, el concepto de trabajo y calor en los cursos de termodinámica. Es decir, los vacíos explicativos se convierten con frecuencia en obstáculos cognitivos para los estudiantes de fisicoquímica porque no encontrarán los términos diferencial inexacta y función de trayectoria ni sus explicaciones matemáticas correspondientes.

Datos de los autores

Ana Soledad Bravo
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco
asbravo@correo.xoc.mx

Ricardo Cantoral Ariza
CINVESTAV-IPN
rcantor@cinvestav.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. (1997). "Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas." *Revista EMA. Investigación e innovación en Educación Matemática*. Colombia: Universidad de los Andes, 2(2), 115-131.

Castellan, G. (1998). *Fisicoquímica*. México: Pearson, 2ª edición. (Versión original en inglés publicada en 1964).

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique Grupo Editor. (Versión original en francés publicada en 1985).

Collette, J. (1986). *Historia de las matemáticas*. México: Siglo XXI Editores.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Courant, R. (1996). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. México: Ed. Limusa, Vol. 2, 6ª reimpresión. (Primera versión en alemán en 1927).

Duval, R. (1993). "Semiosis y noesis", en Sanchez, E. *et al.* (comp.). *Didáctica de la Matemática en Francia*, DME, Cinvestav del IPN, México.

Eisenberg, T. and T. Dreyfus (1991). "On the reluctance to visualize in mathematics". En *Visualization in teaching and learning mathematics*, W. Zimmermann and S. Cunningham (editors). Washington D. C., Mathematical Association of America.

Farfán, (1997). *Ingeniería Didáctica y Matemática Educativa. Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García-Colín Scherer, L. (1976). *Introducción a la termodinámica clásica.* México: Trillas.

Gerasimov, A. *et al.* (1970). *Química física.* Moscú: Editorial Química. (Versión original en ruso).

Granville, W. (1982). *Cálculo diferencial e integral* (Byington, S., Trad.). México, D. F., México: Editorial Limusa. (Trabajo original publicado en 1904).

Kang, W. (1990). "Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Texbooks". Doctoral dissertation, University of Georgia.

Kilpatrick, J. & W. Kang (1992). "Didactic Transposition in Mathematics Textbooks.

For the Learning of Mathematics." *An International Journal of Mathematics Education* 12(1), 2-7. Canadá: Faculty of Education Simon Frazer University Vancouver..

Larson, R. *et al.* (1999). *Cálculo y geometría analítica*. España: McGraw-Hill, Vols. 1 y 2, 6ª edición.

Levine, I. (1983). *Fisicoquímica*. México: McGraw-Hill de México.

Piskunov, N. (1973). *Cálculo diferencial e integral* (Medkov, K., Trad.). Moscú, URSS: Editorial Mir.

Pita, C. (1995). *Cálculo vectorial.* México, D. F., México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México: Thomson Learning, 4ª edición.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 2ª edición.

Thomas, G. y Finney, R. (1990). C*álculo con geometría analítica* (López, M., Trad.). México, D. F., México: Addison-Wesley Iberoamericana.