ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores

Gabriela Buendía Ábalos

Resumen: En el marco de referencia que el sistema educativo brinda a las gráficas cartesianas, las tareas que el profesor de matemáticas tiene que desarrollar se refieren a lograr la correcta articulación de los elementos semióticos que la componen, favorecer el tránsito desde un registro gráfico hacia el analítico, lograr la adecuada interpretación. Ante ello, lo que se adquiere –incluyendo al profesor– es un uso instrumental de los símbolos matemáticos inmersos sin entender los conceptos representados. En esta investigación, proponemos un análisis no hacia cómo enseñar el objeto gráfica, sino hacia cuestionar a la propia gráfica analizando cómo se usa ante situaciones que plantean otro tipo de tareas que las inicialmente señaladas.

Palabras clave: gráficas cartesianas, conocimiento en uso, prácticas sociales

The use of the graphic cartesian. A study with teachers

Abstract: In the framework that the educational system provides to Cartesian graphs, the tasks that the math teacher has to develop are related to achieving the correct relationship of the semiotic elements that compose it, favoring the transition from a graphic register to the analytical one, obtain the proper interpretation. What is finally acquired, including the teacher, is an instrumental use of mathematical symbols without understanding the concepts involved. In this research, we propose an analysis centered not on how to teach the graph object, but to question the very graphic analyzing how it is used in situations that pose other tasks than the ones originally indicated.

Keywords: Cartesian graphs, using knowledge, social practices

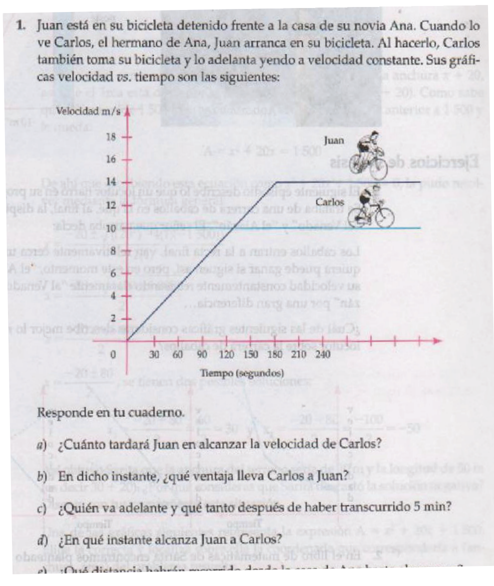
Fecha de recepción: 24 de abril de 2012. Fecha de aceptación: 8 de agosto de 2012.

INTRODUCCIÓN

Las gráficas cartesianas forman parte de los contenidos curriculares desde el último año de educación primaria. A través del currículo y libros de texto, el discurso matemático escolar suele asignarles el papel de representar e interpretar un conjunto de datos, papel que posteriormente se orientará hacia el trabajo con funciones a través de tareas escolares del tipo "graficar o interpretar la gráfica de una función".

Las gráficas son un objeto matemático que es necesario conocer para lograr su construcción, utilización como modelo, o interpretación, así que el papel del profesor de matemáticas es enseñar lo anterior. Importa, entonces, la correcta articulación de los elementos semióticos que componen la gráfica, o interpretar lo que se está viendo en la misma, de manera acorde con el problema contextualizado que dicha gráfica ilustra, o proponer tareas que promuevan lo que Duval (1988) señala como conversiones directas entre registros de representación.

En ese marco escolar de referencia, tareas que pidan analizar a través de las gráficas otras relaciones matemáticas más allá de las evidentes, pueden ser paralizantes incluso para el propio profesor. Tomemos como ilustración el siguiente problema de texto (figura 1).


1. Juan está en su bicicleta detenido frente a la casa de su novia Ana. Cuando lo ve Carlos, el hermano de Ana, Juan arranca en su bicicleta. Al hacerlo, Carlos también toma su bicicleta y lo adelanta yendo a velocidad constante. Sus gráficas velocidad *vs.* tiempo son las siguientes:

Responde en tu cuaderno.

a) ¿Cuánto tardará Juan en alcanzar la velocidad de Carlos?

b) En dicho instante, ¿qué ventaja lleva Carlos a Juan?

c) ¿Quién va adelante y qué tanto después de haber transcurrido 5 min?

d) ¿En qué instante alcanza Juan a Carlos?

Figura 1. El problema de las Bicicletas (Cantoral, R. Farfán, RM., Montiel, G., Lezama, J., Cabañas, G., Castañeda, A., Martínez-Sierra, G., Ferrari, M., 2008).

La respuesta a la primera pregunta puede obtenerse de un análisis directo de la gráfica, así que los profesores no tienen problema en identificar la intersección de las rectas como el tiempo en el que ambos ciclistas tienen la misma velocidad y de ahí obtener la respuesta; el tratamiento usual de las gráficas involucra saber hallar la intersección e interpretarla en el contexto del enunciado dado. Sin embargo, el resto de las preguntas requiere una interpretación que ya no es directa, pues implica reconocer relaciones implícitas. No basta operar sobre ella (encontrar coordenadas, hallar intersecciones...) y, ante ello, la gráfica puede no decir nada al profesor. Como Doorman y Gravemeijer (2009) señalan, bajo esos marcos escolares de referencia en los que la matemática se presenta poco articulada y alejada de significados contextualizados, lo que se adquiere –incluyendo al profesor– es un uso instrumental de los símbolos matemáticos inmersos, sin entender los conceptos representados.

Ante este marco de referencia escolar limitado y poco significativo, nos preguntamos cómo podría usar las gráficas un profesor de matemáticas en una tarea escolar cuyo diseño mismo implica una manipulación o interpretación de datos no evidente. Este interés guió la implementación de talleres con profesores de distintos niveles educativos en los que se propuso trabajar con el problema de la figura 1. Pronto el tipo de tarea propuesta reveló que los profesores solo usan las gráficas –cómodamente– como un objeto semiótico que representa una función; esta tarea requiere un esfuerzo extra por parte de los profesores, quienes incluso reflejan desconcierto.

Reconocimos que, al enfrentarse a tareas de este tipo, los profesores usan la gráfica de distintas maneras y estos usos reflejan no solo métodos de solución más flexibles y distintos a los esperados, según el libro de texto, sino un uso del conocimiento matemático funcional y articulado. Pero este reconocimiento fue posible únicamente cuando, al analizar la actividad de los profesores, el centro de dicho análisis cambia del objeto gráfica, hacia el uso de la misma, permitiendo considerar herramientas, argumentos, contextos y prácticas.

Proponemos, entonces, una investigación sobre los usos de las gráficas de los profesores de matemáticas que permita ampliar el marco de referencia escolar usual. Para ello, lo gráfico no puede ser solo un registro con el cual trabajar, ni tampoco las tareas propuestas se refieren a lograr una adecuada lectura o interpretación de la gráfica. Proponemos hacer de las gráficas y su uso un marco epistemológico funcional en el que el cuestionamiento no es hacia cómo enseñar mejor una gráfica, sino cuestionar y considerar todo aquello que se relaciona con *lo gráfico*: además de los aspectos semióticos de la gráfica, las prácticas, las herramientas y los argumentos involucrados.

ABRIENDO EL PANORAMA

La escuela ha privilegiado la metáfora del objeto y las preguntas que podría contestar son con relación a cómo se aprende o cómo se enseña dicho objeto. Pero más allá de considerar a la gráfica solo como una representación semiótica dentro de un registro gráfico, la investigación en matemática educativa ha abierto visiones alternas respecto a ese papel.

La matemática realista, por ejemplo, concibe a la gráfica como un modelo, pero la noción tradicional de modelo cambia, pues no solo son modelos que derivan su significado a partir de lo modelado (convirtiéndose en una representación física), sino que se busca pensar acerca de las relaciones matemáticas en ellos (Doorman y Gravemeijer, 2009). Aunque el objetivo sea la construcción del modelo como resultado de actividades de modelación, el tipo de construcción de los estudiantes y sus invenciones juegan un papel central. A la gráfica como modelo se añade, entonces, la importancia de la actividad y su propósito, convirtiéndola en un modelo que busca favorecer el razonamiento matemático. La tarea que los autores atribuyen a la gráfica es, al seno de todo un proceso de aprendizaje en un marco de trabajo con relaciones gráficas, la de simbolizar y construir –simultáneamente– significados acerca de cuestiones como la variación y el cambio. Eso les permite dar cuenta acerca de que es factible que las gráficas puedan soportar el desarrollo de los principios básicos del cálculo.

Otras investigaciones como la de Bowen, Roth y McGinn (1999) reconocen la existencia de prácticas de graficación en las que importa quién es aquel que está interpretando una gráfica. Entienden la graficación como un conjunto de prácticas de representación, producción, lectura e incluso crítica de gráficas; todas son de naturaleza social –de ahí el nombre de *prácticas sociales*– y en ellas deben estar consideras las prácticas comunes de cada grupo social involucrado, sus preocupaciones y necesidades, el tipo de herramientas que se ponen en juego, incluyendo los recursos lingüísticos. Esas prácticas sociales se conforman por patrones básicos de acciones e interacciones humanas y, dado que el objetivo es diseñar ambientes de aprendizaje en los que los participantes se involucren en prácticas de graficación auténticas, les importa, entonces, interpretar y analizar dichos patrones.

En estas perspectivas, el papel de la gráfica en la matemática escolar se modifica. Radford (2009) menciona que, tomando la gráfica como una *construcción* semiótica que representa relaciones matemáticas entre sus elementos, esta resulta un medio para llevar a cabo reflexiones y generar significados sobre aspectos como tiempo y distancia. Se trata de todo un proceso de significación que el autor llama *objetivación cultural*, a través del cual los estudiantes se hacen versados respecto a ideas matemáticas y modos de pensamiento. En ese proceso de corte social, las gráficas tienen un rol epistemológico al seno de la matemática escolar, rol que importa reconocer, analizar y entender.

Ante ello, proponemos una investigación que, si bien también confiere a la actividad humana la función de producción del objeto, el énfasis no está en la gráfica como un objeto preexistente o ya construido, ni en su papel como representación producida o innata (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez-Sierra, 2006), sino en las prácticas sociales como normativas de la actividad alrededor de y con las gráficas.

Se trata de una *epistemología de prácticas* para las gráficas y su uso al seno de la cual, Cordero, Cen y Suárez (2010) proponen la graficación como una práctica institucional que permanece y se desarrolla en la escuela, a través de los diferentes elementos del discurso matemático escolar. Como práctica, la graficación es más que obtener una gráfica; favorece llevar a cabo múltiples realizaciones para formular las relaciones que intervienen en la situación particular, y hacer ajustes en la gráfica junto con argumentaciones para distinguir, cada vez más finamente, los elementos involucrados. Esto permite el desarrollo del razonamiento y de la argumentación a través de justificaciones funcionales más centradas en lo que es de utilidad al grupo humano en cuestión. Entonces, las explicaciones de la construcción o apropiación del objeto *gráfica*, no se proponen a través de sus partes constituyentes, ni las gráficas resultan ser la re-presentación (en el sentido de volver a presentar) de una función, ya que se asume que esta no existe objetiva ni previamente, sino que es producto del ejercicios de ciertas prácticas (Cantoral *et al.*, 2006). En esta epistemología, la gráfica antecede a la función, pues la graficación conforma elementos de construcción para el desarrollo de ideas variacionales y pueden desarrollarse de manera independiente o paralela al desarrollo analítico del concepto de función (Suárez, 2008).

ASPECTOS TEÓRICOS: PRÁCTICAS Y USOS

Esta discusión forma parte de un programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa que busca un nuevo estatus epistemológico para la matemática escolar, uno que se fundamenta en la relación entre prácticas sociales y la generación de dicho conocimiento (Cantoral *et al.*, 2006; Camacho, 2006). Esto es, lo que se estudia es al ser humano usando y haciendo matemáticas y no solo su producción matemática final. Este es el carácter social de las matemáticas que se busca evidenciar de tal manera que, entre sus objetivos, está proponer *epistemologías de prácticas* (Buendía y Cordero, 2005) en las que se formula que el ejercicio de ciertas prácticas antecede a la producción de conceptos determinados; esa es la base de significación que buscamos para la matemática escolar. En el seno de una epistemología de prácticas se manifiesta, necesariamente, el uso del conocimiento.

Hablar, entonces, del conocimiento en uso, resulta un contraste con lo que los sistemas educativos persiguen. Como menciona Cordero (2006), los sistemas educativos se han preocupado por lo que sabe un estudiante o un docente –por ejemplo, saber interpretar una función o lograr graficarla–, pero no por *cómo se usa ese saber,* lo cual tiene mucho más relación con una matemática escolar funcional y articulada. El autor propone entender el *uso de las gráficas*, al seno de la investigación en socioepistemología, a través del análisis de sus funcionamientos y formas, entendidos siempre situacionalmente, entrelazados, y en continuo desarrollo.

De acuerdo con Cordero, Cen y Suárez (2010) y con Buendía (2011), por forma se considerará tanto la apariencia perceptible de la gráfica, como la manera en la que el sujeto actúa con ella y sobre ella en una cierta tarea. Se trata de un actuar en un sentido amplio, pues se consideran aspectos sobre cómo el sujeto calcula, cómo argumenta, cómo resuelve o incluso cómo representa, dependiendo de la tarea particular. El funcionamiento es para qué le sirve la gráfica al sujeto en cuestión, es el rol de la gráfica en una tarea y cómo funciona en esa tarea.

Tomaremos, entonces, *el uso de las gráficas* como un constructo teórico que busca problematizar al saber matemático, en particular, el del profesor. En el siguiente apartado proponemos una unidad de análisis para el estudio y, al seno de ella, la importancia de esta investigación centrada en el profesor.

EL PAPEL DEL PROFESOR

La socioepistemología propone como base de significación no solo a la matemática misma, sino a todo aquello que rodea y en lo que se involucra el humano al hacer matemática. En consecuencia, se pueden considerar diferentes escenarios posibles y, en cada uno de ellos, se conforma una unidad de análisis. En el escenario que se tome como posible fuente de significación, se analiza la interacción entre la actividad observable de los individuos, la intencionalidad explícita de transmitir un cierto conocimiento y el saber matemático en juego relativo a dicho escenario (figura 2) (Montiel y Buendía, 2011).

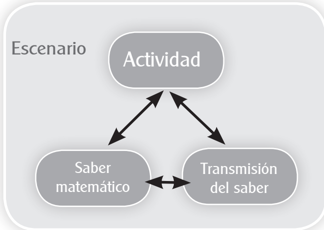


Figura 2. Unidad de Análisis

Ese saber matemático es el que se problematiza al considerar la matemática en juego como un actor a analizar, cuestionando su estatus de saber institucional como aquello que 'se debe aprender'. A partir de reconocer que son las prácticas sociales las que norman la construcción del conocimiento matemático, se hace necesario reconocer tambi[en su manifestación a través de sus usos en distintos escenarios; para el caso de esta investigación será el escenario escolar.

Los individuos con los que trabajamos en esta investigación son los profesores de matemáticas. Entender la actividad del docente retoma las variables que conforman el perfil de un profesor de matemáticas en servicio señaladas por Montiel (2010): el país, estado y región geográfica donde se forma y donde labora, el nivel educativo donde ejerce su práctica docente, su formación profesional y didáctica, su experiencia profesional y docente, su ideología, su cultura (incluyendo la matemática), entre otras. La relevancia del trabajo con el profesor reconoce que él, con su actividad, es determinante en el logro didáctico de los alumnos (Lezama, 2003); como señalan Lezama y Mariscal (2008), el profesor no se arriesga a la innovación si siente que pierde el control de lo que está acostumbrado a hacer en su actividad. No suele cuestionar su propio saber matemático y, difícilmente, reconoce que él mismo puede usar las gráficas de maneras particulares y diferentes a sus alumnos o a las recomendaciones didácticas de un texto; con ello echa a andar elementos culturales, producto de su proceso de formación, mezclándolos además con asuntos específicos de matemáticas. Mientras no surja este tipo de cuestionamiento, la actividad de clase puede ser una especie de apuesta y no se sabe si se obtendrán o no, ni por qué, los resultados esperados.

Consideramos, entonces, que reconocer una nueva base epistemológica para las gráficas y desde ahí, que el docente reconozca y analice sus propios usos ante una situación problemática, le permitirá sentirse capaz de cuestionar y trastocar su propio conocimiento matemático y, por lo tanto, su discurso. Eso, necesariamente, se convertirá en un elemento para reflexionar acerca de su propia práctica docente y del impacto de esta sobre sus alumnos.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación se fundamenta en el trabajo realizado en dos talleres con profesores de matemáticas en los que se planteó el problema ilustrado en la figura 1, extraído de un libro de texto vigente para el sistema educativo mexicano, dirigido a estudiantes de tercero de secundaria (14-15 años) (Cantoral *et al.*, 2008). En este nivel educativo se trabajan contenidos matemáticos relativos a álgebra y trigonometría, principalmente. Los elementos de Cálculo se trabajan a través de funciones lineales y cuadráticas, la obtención de sus gráficas y cuestiones de operatividad como resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este problema, que hemos llamado "De las Bicicletas", se encuentra en el Bloque 3, titulado "Todo cambia", en el que se espera que los alumnos interpreten y representen relaciones lineales. Pertenece al eje curricular de "Manejo de la información", el cual se caracteriza por el constante uso de gráficas para organizar información y representar objetos matemáticos a fin de entender matemáticamente el mundo que nos rodea. Concretamente, la lección 20, de la cual forma parte el problema, plantea actividades sobre fenómenos cuya modelación requiere del empleo de gráficas definidas por secciones.

Se trata de una gráfica cartesiana tiempo-velocidad en la que está representado lo que ocurre con dos ciclistas que se mueven a distintas velocidades. La primera pregunta es sobre en qué tiempo los ciclistas consiguen la misma velocidad, respuesta que puede darse al interpretar la intersección de las rectas como la velocidad común en ambos y de ahí obtenerla. El resto de las preguntas se plantea en términos de *distancia*, por lo que la gráfica tendría que *ser usada* de otra manera, pues no basta con operar sobre ella (encontrar coordenadas, hallar intersecciones).

El análisis del uso de las gráficas que presentamos en este escrito, se basa en datos extraídos de los siguientes dos escenarios de trabajo con profesores de matemáticas de distintos niveles educativos.

Escenario 1. El problema se trabajó con un grupo de alrededor de 300 profesores durante un diplomado de especialización al que asistieron docentes de secundaria en ejercicio. No se tienen datos precisos sobre la formación profesional individual de los maestros participantes; sin embargo, en México, un alto porcentaje de los profesores que laboran en este nivel educativo no tienen licenciatura universitaria. Trabajaron en equipos de 10 integrantes y el análisis se realiza a partir de la producción escrita que presentaron dos equipos (A y B) en el pizarrón.

Escenario 2. El problema se propuso como actividad de curso propedéutico para ingresar a la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. Fue un grupo de 40 profesores de matemáticas, entre los cuales 32 laboran en instituciones de nivel superior (universidades e institutos tecnológicos), cuatro laboran en nivel medio superior, tres en nivel medio, y uno en la Normal; cuatro de ellos provienen de fuera de México (Colombia, Argentina y Uruguay) y el resto son de diferentes estados de la República mexicana. La actividad que se les propuso fue resolver el problema de las bicicletas y, posteriormente, solicitar a un alumno de cualquier nivel que lo resolviera. Se les solicitó también reflexionar mediante las siguientes preguntas, tanto acerca de su propia resolución, como sobre la de su alumno. Tuvieron cinco días para realizar la actividad y, posteriormente, enviar en línea un único documento con todo lo solicitado. Este documento es la fuente del análisis de la producción escrita que se analiza.

a) Además de lo correcto o erróneo de la respuesta, compara, en términos generales, los métodos de resolución elegidos

b) ¿Hubo dificultades específicas para alguno?

c) En cuanto a la gráfica, ¿cómo fue usada en cada caso? Por ejemplo, solo como apoyo, para localizar puntos o secciones, para hacer algún cálculo...

d) ¿Qué tipo de herramientas matemáticas se pusieron en juego? Ejemplo: expresiones analíticas, alguna fórmula... Para el caso del alumno, estas herramientas, ¿son propias de su nivel educativo o utilizó herramientas más comunes de otro nivel educativo?

Después del trabajo en esos escenarios, se han podido identificar al menos tres estrategias de resolución globales. En la Tabla 1 hemos puesto una breve descripción de cada estrategia. En el último renglón se incluye una referencia numérica: el número de profesores, pertenecientes únicamente al segundo escenario (40 individuos) que la utilizaron; este número es un claro indicativo del fuerte referente analítico en la actividad de los profesores y solo por ello lo presentamos. Cabe mencionar que, dentro de estos números, hay cuatro profesores restantes que no se dieron cuenta que la gráfica inicial era sobre velocidad, así que sus respuestas no fueron contabilizadas

Estrategia 1 *Emplear fórmulas y expresiones analíticas*	***Estrategia 2*** *Obtener áreas*	***Estrategia 3*** *Analizar intervalos*
Fórmulas extraídas del contexto de la Física como: $d = vt$ $d = V_o t + \frac{1}{2} at^2$ $\overline{v} = \frac{Vf - V_o}{2}$ Expresiones analíticas que representan la ecuación de las rectas del tipo $t = mx + b$ dadas en un solo intervalo o por partes	Áreas identificadas a través de figuras geométricas conocidas como rectángulos o triángulos. Áreas bajo la curvas identificadas como la distancia bajo la curva velocidad	Partir un intervalo en sub-intervalos
28 profesores	8 profesores	0 profesores

Tabla 1. Estrategias de resolución

La pregunta de investigación ahora se puntualiza de la siguiente manera: en estas estrategias, ¿cómo usan los profesores las gráficas? Es decir, dentro del conjunto de acciones, recursos y fines que pone en juego un profesor como estrategia al buscar la solución de un problema, la gráfica se usa de cierta forma y con cierto funcionamiento que no son necesariamente explicitados. Ese uso es el que nos interesa analizar al seno de una estrategia particular.

Retomando la propuesta de analizar el uso mediante la forma y funcionamiento de la gráfica, el análisis de las producciones escritas (en el pizarrón o en el documento individual) responde a preguntas puntuales del tipo qué hace, cómo y para qué. Los incisos del problema que se analizarán en este escrito marcan dos momentos de uso de las gráficas que interesa analizar:

a) ¿Cuánto tardará Juan en alcanzar la velocidad de Carlos? Esta pregunta se concreta en cómo se usa la gráfica para hallar el punto de intersección de las rectas
b) En dicho instante, ¿qué ventaja lleva Carlos a Juan? Esta pregunta se concreta en cómo se usa la gráfica tiempo-velocidad para identificar la distancia. Solo para completar el argumento que el profesor esgrime para esta pregunta, se discutirá el inciso c), que se refiere a la distancia recorrida en un tiempo posterior.

LOS USOS DE LAS GRÁFICAS

HALLANDO EL PUNTO DE INTERSECCIÓN

La respuesta a la primera pregunta puede obtenerse de un análisis prácticamente directo de la gráfica, así que la mayoría de los profesores no tienen problema en identificar la intersección de las rectas como el tiempo en el que ambos tienen la misma velocidad, y de ahí obtener la respuesta. La gráfica funciona de una manera acorde con el tratamiento usual de las gráficas en el aula de matemáticas: hallar la intersección de las rectas. Sin embargo, dada la naturaleza de la información gráfica proporcionada, el profesor tiene que hallar el punto exacto con el cual trabajar para la siguiente pregunta, decisión en la cual las gráficas se usan de diferentes maneras.

La figura 3 muestra la respuesta más común: aunque la gráfica no es exacta al hacer la proyección hacia el eje x, se identifica el punto de intersección en $t = 120$. Se muestra un ejemplo extraído de la respuesta de Jorge, quien hace una lectura directa de la gráfica identificando el punto de intersección de las rectas como el punto coordenado en el que las velocidades de los ciclistas se igualan. Es un uso de la gráfica de corte semiótico, coherente con el tipo de tareas que el sistema didáctico busca favorecer: la representación de las funciones –velocidad en este caso– como una gráfica y la interpretación de su intersección como la igualación de las funciones velocidad en un punto coordenado equivalente al dato tiempo-velocidad.

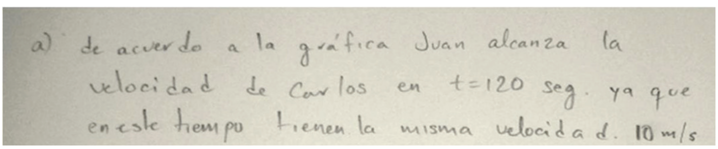

a) de acuerdo a la gráfica Juan alcanza la velocidad de Carlos en t=120 seg. ya que en este tiempo tienen la misma velocidad. 10 m/s

Figura 3. De acuerdo con la gráfica...

Ante lo inexacto de la información gráfica alrededor de t=120, varios profesores optan por seleccionar otro punto clave como auxiliar para buscar con mayor exactitud el punto de intersección; se elije aquel donde la gráfica de Juan deja de representar una velocidad que se incrementa y empieza a ser una velocidad constante. Identificar ese punto clave, con coordenada (180, 14), es una forma de trabajar con la gráfica que permite al profesor ser coherente con el comportamiento que está percibiendo en la gráfica lineal. En esa búsqueda de coherencia, la gráfica funciona bajo una idea de proporcionalidad.

En la figura 4, se ejemplifica ese uso mediante la respuesta de Daniel, quien encontrará las coordenadas del punto de intersección mediante una regla de tres: una vez que establece, mediante las proyecciones hacia los ejes la velocidad correspondiente a t=180 (punto clave), busca la proporción para v =10, hallando el valor t=128.57.

$$\boxed{\frac{(10\ \frac{m}{s})\ \ (180s)}{(14\ m/s)} = \ \ 128.57\ s}$$

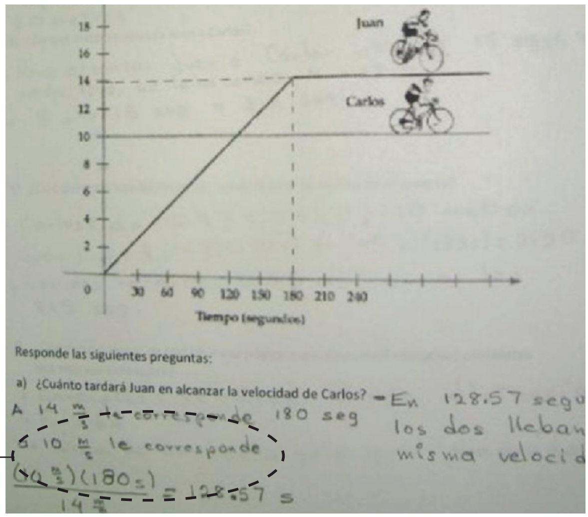


Figura 4. Un uso proporcional de la gráfica

En la figura 5, mostramos la estrategia de las expresiones analíticas pero, además, se ilustra un caso *sui géneris*: la respuesta de Angélica. Ella es una profesora uruguaya en cuya formación ha prevalecido el aspecto analítico y formalista de la matemática; esta característica social y de formación es determinante en su uso de las gráficas como una representación de la función, de tal manera que la búsqueda se orienta hacia hallar la expresión analítica de las rectas. La gráfica funciona a través de indicadores –como los puntos coordenados que permiten obtener la pendiente de la recta– para hallar tales expresiones. Nótese que no se trata solo de los valores numéricos de las coordenadas, sino de tomar dos puntos coordenados (x, y) para hallar la pendiente. Declarado por ella misma al cuestionarle sobre cómo considera haber usado la gráfica, dice que "el gráfico fue usado como apoyo para resolver la actividad".

Dado que, en realidad, la información gráfica no es exacta en ese punto, Angélica no se atreve a señalar a partir de la gráfica –ni aproximadamente– valores para *t*, de tal manera que propone el parámetro t_1 para el instante en que Juan alcanza la velocidad de 14 *m/s*, parámetro con el que continúa trabajando sin que le cause ningún problema. En el caso más usual, los profesores asignan algún valor numérico a dicho parámetro y realizan lo mismo que Angélica.

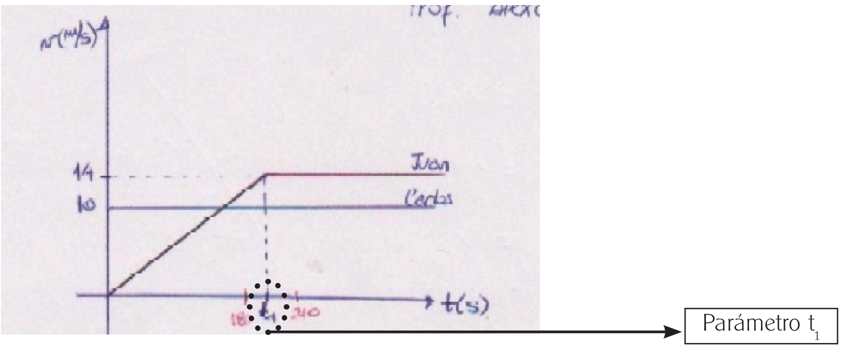
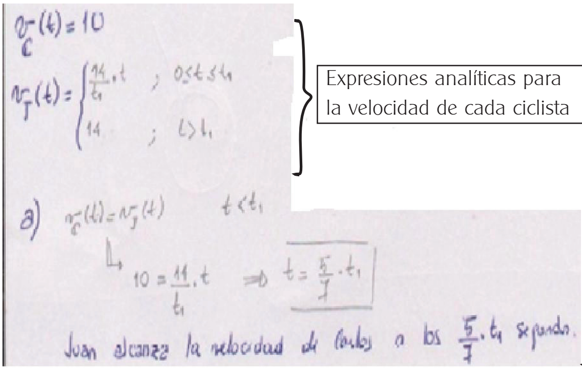


Figura 5. El parámetro t1

En la figura 6, Angélica da la expresión analítica para la velocidad de cada ciclista y consecuentemente, la respuesta a la primera pregunta se convierte en la igualación de ambas expresiones. La gráfica funciona de manera similar al marco de referencia escolar usual.



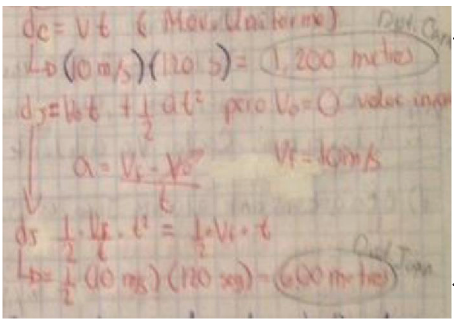
Expresiones analíticas para la velocidad de cada ciclista

Igualación de expresiones analíticas

Figura 6. El uso analítico

IDENTIFICANDO LA DISTANCIA

Hemos señalado, en la tabla 1, que el empleo de fórmulas o expresiones analíticas es la estrategia más utilizada por los profesores. Bien pueden ser las fórmulas expresamente del Movimiento Uniforme y al Movimiento Uniformemente Acelerado (figura 7) o simplemente $d=vt$, distinguiendo que, en el caso de Juan, la velocidad no es constante (figura 8).



$d_c=vt$ *(movimiento uniforme)*

(10m/s) (120s)= 1200 metros

$dj=Vot+1/2\ at^2$ *pero* $Vo=0$

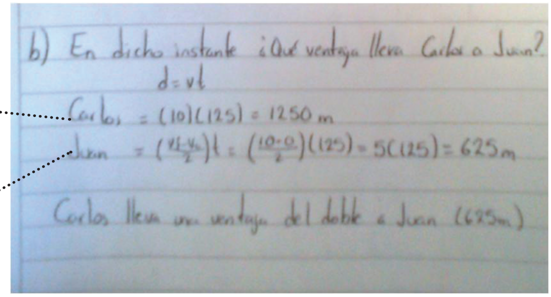
$a=\dfrac{Vf-Vo}{t}$ $\quad Vf=10\ m/s$

$dj=1/2Vf\,\dfrac{t^2}{t}=Vft$

1/2 (10 m/s (120 seg)= 600 metros

Figura 7. Fórmulas de movimiento

$d = vt$



Carlos$= (10)(125) = 1250\ m$

Juan$= \frac{(V_f - V_o)}{2}\ t = \frac{(10-0)}{2}\ 5(125) \ = \ 625$

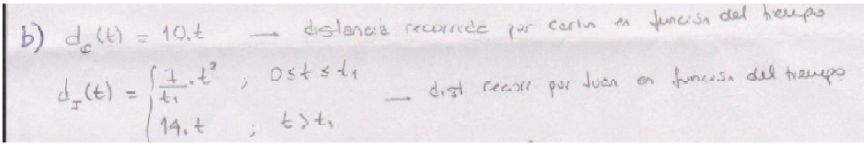
Figura 8. Distancia es igual a velocidad por tiempo

En esta estrategia, la gráfica funciona como un referente para obtener la información numérica que solicita la fórmula; esta información solo se refiere a valores puntuales como $V_f= 10_o$ $t=120$. Analizando las reflexiones de los profesores, destaca cómo la forma global resulta relevante para decidir el empleo de las fórmulas. Por ejemplo, el profesor Román, cuya respuesta se muestra en la figura 7, comentó:

> La gráfica es de vital importancia, ya que nos brinda la información exacta de cómo cambia la velocidad (eje Y) en función del tiempo (eje X). En la gráfica nos damos cuenta de cómo empieza en $t=0$ Juan a acelerar hasta que a los 180 segundos se estabiliza y logra mantener una velocidad constante de 14 m/s. También podemos observar a simple vista en qué momento la velocidad de Juan y la de Carlos son iguales, al verificar el punto de intersección en P (120,10). También la gráfica es muy importante para observar que en todo momento la velocidad de Carlos es constante y pertenece al MRU. En tanto que la velocidad de Juan se compone de MRUA (diagonal de la gráfica) y posteriormente de MRU a partir de los 180 segundos.

Esto es, aunque inicialmente pudiera pensarse que la gráfica *solo* se usa para obtener los datos numéricos, resulta que el comportamiento de la misma es un argumento que se pone un juego para decidir qué fórmula conocida de física puede auxiliar al profesor.

Retomando el ejemplo de la profesora Angélica, una vez halladas las expresiones analíticas (recordar figura 6), ya no vuelve a hacer referencia alguna a la gráfica y sus respuestas se basan en el manejo de sus expresiones analíticas: al hallar la distancia de cada ciclista, multiplica por *t* la fórmula para la velocidad (figura 9). Así, Angélica usa las gráficas reflejando aquellas herramientas coherentes con su formación y la concepción analítica que privilegia.


b) $d_C(t) = 10.t$ → distancia recorrida por Carlos en función del tiempo

$d_J(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_1}.t^2 & ; \; 0 \le t \le t_1 \\ 14.t & ; \; t > t_1 \end{cases}$ → dist recorr por Juan en función del tiempo

Figura 9. Expresiones analíticas de la distancia a partir de las fórmulas de velocidad

En la estrategia de hallar áreas, la figura 10 muestra la respuesta del equipo B, proveniente del escenario 1. Inicialmente, se habían dado cuenta de que, para el caso de Carlos (recta horizontal), la multiplicación de 128 por 10 les daba la distancia recorrida. Seguramente partieron de la fórmula $d=vt$ y esa operación resultó coherente cuando visualizaron que, haber multiplicado, equivalía a encontrar el área de un cuadrado; esto brinda a la distancia un significado diferente a partir del uso de la gráfica (ver en la figura 10 el cuadro en el que se habían dibujado diagonales y después las borraron). Esta forma de ver a la gráfica, les permitió, entonces, señalar el área de un triángulo rectángulo como la distancia recorrida por Juan.

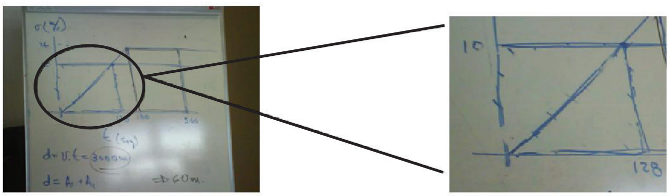


Figura 10. La distancia como el área de un cuadrado y de un triángulo

Este argumento de hallar las áreas toma especialmente fuerza al contestar el inciso (c) del problema. Así que, al buscar la distancia recorrida por los ciclistas en un tiempo posterior, el problema se transforma a una suma de áreas (figura 11). A esto nos referimos cuando afirmamos que la gráfica soporta el desarrollo de una argumentación.

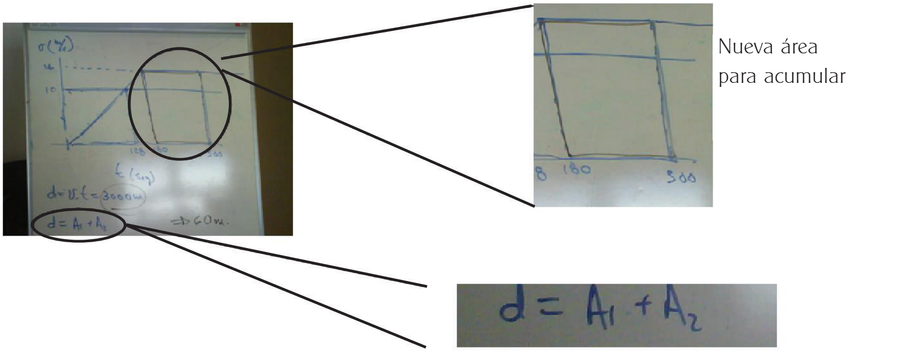


Figura 11. Distancia recorrida como suma de áreas

En esta respuesta, las gráficas están funcionando a través de secciones que conforman figuras geométricas conocidas, primero, en el punto de cruce, y luego hasta el otro punto requerido. La forma de interactuar con la gráfica es mediante el cálculo de las áreas de esas figuras. Usar las gráficas visualizando figuras geométricas genera un argumento de cálculo de áreas que es factible sostener y desarrollar desde un primer momento, para comparar las distancias en el primer cruce (en t=128) hasta aquel punto que permite hallar la distancia total recorrida. Bajo este tipo de uso, la forma como se percibe la gráfica es mucho más global.

La siguiente figura 12 muestra la respuesta de Jorge (recordar figura 3), en la cual aflora el hecho de que es un profesor que recurre regular y confiadamente a estrategias visuales; su trabajo con gráficas no suele tener referentes analíticos, sino argumentos fundamentados en el comportamiento de las mismas. El usa las gráficas *visualizando figuras geométricas* y declara que "el recorrido lo calculamos solo como el área del polígono formado sin operaciones más formales como una integral definida".

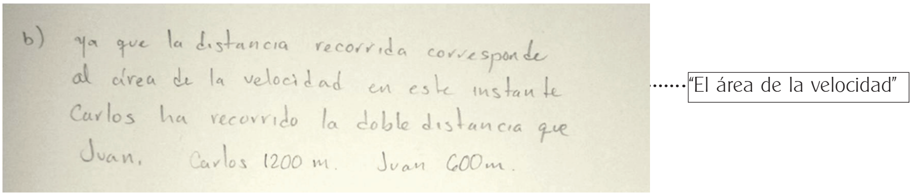


Figura 12. Argumentando con áreas

Responde identificando la distancia como “el área de la velocidad” y, efectivamente, visualiza el triángulo rectángulo correspondiente a la distancia recorrida por Juan, como la mitad del cuadrado correspondiente a la distancia recorrida por Carlos. Sin embargo, llama la atención que no incluye ningún trazo sobre las gráficas, sino que se trata de una descripción verbal acerca de lo que está viendo. Considera esta forma de usar la gráfica como “apoyo y como respuesta”.

En un ejemplo más sobre cómo el uso de las gráficas no es algo explícito para los profesores, el profesor Daniel, relata que “...y me encontré entonces con el área de una figura. Comparé los datos y fue un descubrimiento interesante, ya que nunca lo había mirado de esa manera”. Cuando responde la pregunta correspondiente a la distancia, es cuando “se da cuenta” de la factibilidad de ver el problema en función de figuras geométricas (figura 13).

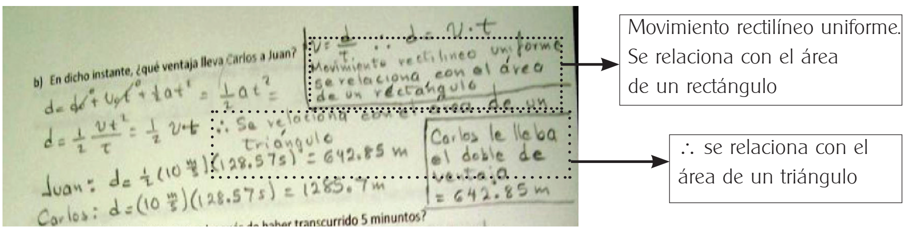


Figura 13. “Y encontré el área de una figura”

Cuando Daniel aborda el tercer inciso, lo resuelve directamente hallando el área de las figuras geométricas involucradas (figura 14). Podemos hablar nuevamente de cómo el argumento se desarrolla y las gráficas sostienen dicho desarrollo.

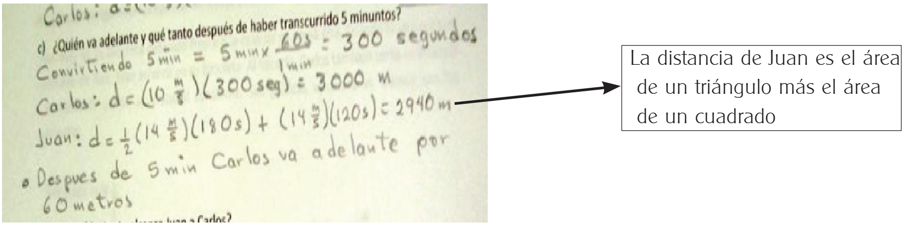


Figura 14. Desarrollando el argumento del área

En la figura 15, mostramos un ejemplo más de este uso de las gráficas basado en la visualización de figuras geométricas. Los dibujos que realiza Rosa dan cuenta con claridad de este tipo de uso: una forma global de ver las gráficas, el funcionamiento a través de la identificación de figuras geométricas conocidas, y el desarrollo hacia una suma de áreas. Nótese que, por alguna razón no explicitada, toma diferente tiempo para los ciclistas. Para Carlos utilizó t=330 y para Juan, t=300.

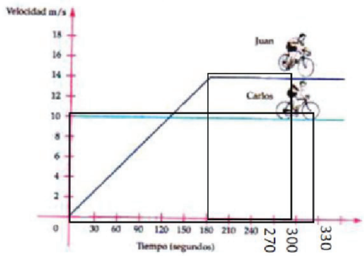
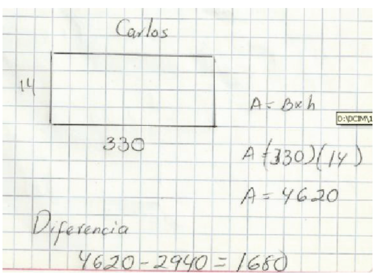
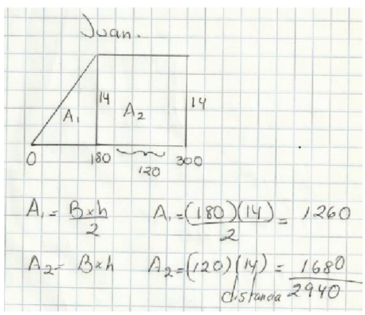
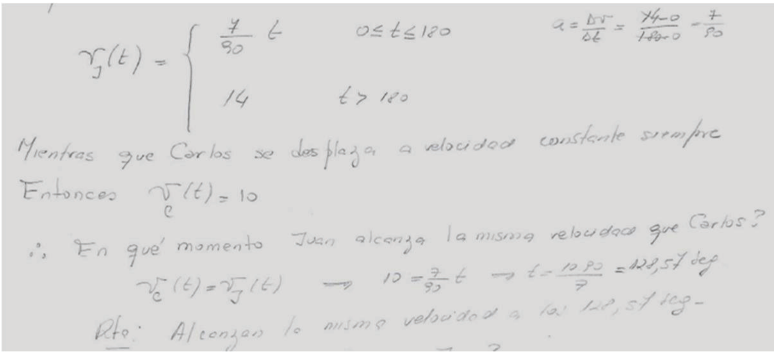


Figura 15. Rosa





Respecto al funcionamiento de las gráficas a través de áreas, presentamos la siguiente variante mediante lo que hace Nadia. Ella primero encuentra las expresiones analíticas para cada recta y el punto donde alcanzan la misma velocidad, se halla mediante la igualación de las expresiones (figura 16):



$$v_J(t) = \begin{cases} \frac{7}{90}t & 0 \le t \le 180 \\ 14 & t > 180 \end{cases} \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{14-0}{180-0} = \frac{7}{90}$$

Mientras que Carlos se desplaza a velocidad constante siempre

Entonces $v_C(t) = 10$

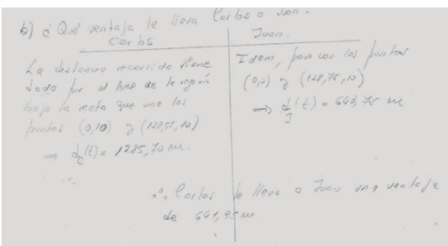
∴ ¿En qué momento Juan alcanza la misma velocidad que Carlos?

$v_C(t) = v_J(t) \rightarrow 10 = \frac{7}{90}t \rightarrow t = \frac{10 \cdot 90}{7} = 128,57$ seg

Rta: Alcanzan la misma velocidad a los 128,57 seg.

Figura 16. Nadia

Identifica que puede hallar la distancia recorrida al punto t=128.57 mediante la región bajo la recta (figura 17). Este es un uso diferente a visualizar figuras geométricas y, en este caso, estaría hablando de áreas bajo la curva. Si bien en ningún momento habla de integración, señala en sus comentarios que la distancia "viene dada por el área de la región bajo la recta…"; es decir, bajo la función velocidad. Este es un uso de las gráficas más ligado a su funcionamiento como representación de una función en la que parece ponerse en juego la noción de integración, aunque solo quede explicitado como área bajo la curva. Esto tiene una relación directa con haber hallado las expresiones analíticas de las rectas en primera instancia: el profesor está pensando en término de funciones.



b) ¿Qué ventaja le lleva Carlos a Juan?

Carlos	Juan
La distancia recorrida viene dada por el área de la región bajo la recta que una los punto (0,10) y (128.57,10)	*Ídem*, pero con los puntos (0,0) y (128.57, 10)

Figura 17. Área bajo la curva

Sin embargo, ya que la gráfica está funcionando en términos de área, nuevamente es factible desarrollar este argumento hacia suma de áreas (figura 18). Ahora es más evidente que está visualizando figuras geométricas:

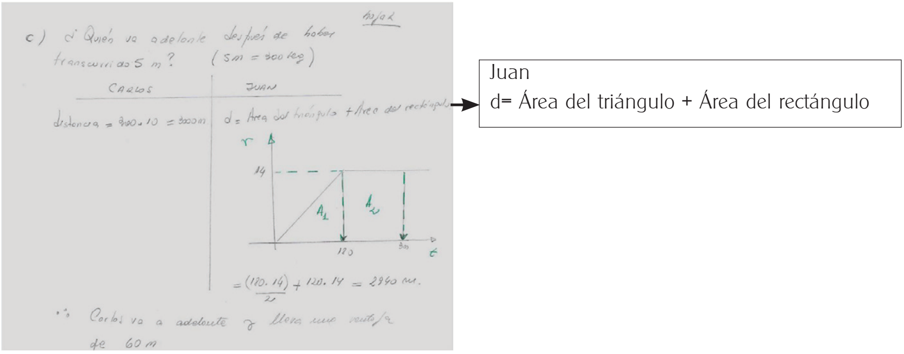


Figura 18. Suma de áreas de figuras geométricas

UNA TERCERA ESTRATEGIA: ANALIZANDO INTERVALOS

Hemos analizado hasta ahora los usos de las gráficas en las dos estrategias más utilizadas al resolver el problema: el empleo de fórmulas y expresiones analíticas y la obtención de áreas. Para terminar, presentamos la estrategia de partir un intervalo la cual, aunque es poco utilizada, permite analizar usos significativos de las gráficas.

En la figura 19, se muestra la respuesta del equipo A (escenario 1).

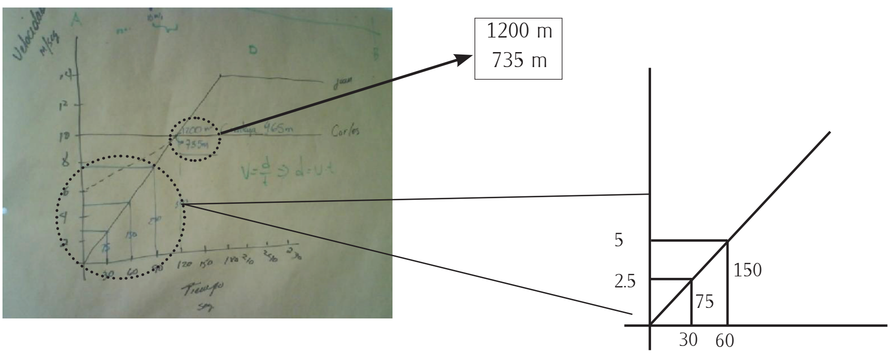


Figura 19. Seccionando un intervalo

Para hallar la distancia de Carlos (recta horizontal), multiplicaron 120 por 10 para obtener la distancia recorrida (1200 metros). Pero para el caso de Juan, el equipo decidió obtener la distancia recorrida partiendo el intervalo del tiempo en sectores a partir de la escala presentada en la figura original. Para el primer intervalo (ver ampliación de la figura 19) en el que han transcurrido 30*s*, se tiene una velocidad de 2.5 *m/s*, por lo que la distancia recorrida, aplicando el referente de la fórmula $d = vt$, es de 75 *m*. Para el segundo intervalo en el que, transcurriendo otros 30 segundos, se tiene una velocidad de 5 *m/s*, por lo que la distancia recorrida es de 150 *m* y así sucesivamente. Finalmente, se acumulan las distancias recorridas en cada intervalo para obtener la distancia total es:

$$75 + 150 + 210 + 300 = 735 \text{ metros}$$

Ya tienen el dato de la distancia recorrida por ambos ciclistas, así que la ventaja que le lleva Carlos es Juan es de 465 metros en el instante $t = 120$:

$$1200 - 735 = 465 \text{ metros de ventaja}$$

Las gráficas funcionan como un medio que sí les permite aplicar una fórmula conocida ($d = v/t$). Sin embargo, dado que la velocidad de Juan va cambiando, la forma de ver globalmente a la línea inclinada se transforma para analizar ahora secciones y poder ver qué ocurre en cada una de ellas. Posteriormente, proponen un argumento de acumulación, a través de una suma de distancias recorridas hasta el $t = 120$. Lo que resulta significativo, e incluso sorpresivo para los profesores, es que la gráfica sea capaz de sostener y desarrollar este argumento para poder hallar las respuestas que se piden en valores de t posteriores.

La forma en la que los profesores interactúan con la gráfica es identificando los pares ordenados que les permiten identificar y distinguir regiones. Sin embargo, los valores numéricos de estos pares ordenados (tiempo-velocidad) se interpretan de manera diferente para dar un significado a la distancia recorrida: para el tiempo, solo se considera el tiempo recorrido –cada 30 segundos– y la velocidad correspondiente, sí se toma directamente del valor de la ordenada señalado al final de cada sección. La gráfica funciona sumando esos valores numéricos representados por la unión de las proyecciones de cada coordenada, la línea vertical y horizontal (⅂); la notación sobre la gráfica, está representando la distancia recorrida en cada región.

DISCUSIÓN

De acuerdo con los números presentados en la Tabla 1, es claro que el marco de referencia que la escuela ha privilegiado para las gráficas inhibe que estas puedan ser consideradas como un medio de argumentación en sí mismas y solo sean la representación de una función; las tareas que los profesores suelen, entonces, favorecer –y enfrentar a su vez–, se restringen a hallar tal función sin desarrollar un lenguaje gráfico rico que los estudios han mostrado como valioso en el pre-cálculo (Cantoral *et al.*, 2006).

Seguramente esta situación es producto de considerar que lo geométrico, lo visual o lo gráfico pertenecen a una categoría sin rigor, que no corresponde ni responde a la obra matemática. Incluso podemos recordar que los estudios de visualización han declarado que el hecho de que esta habilidad no haya sido seriamente reconocida, se debe a que no es factible enseñar a visualizar; así, el hecho de que el mismo profesor reflexione sobre su propia visualización es una tarea compleja (Arcavi, 2003).

Sin embargo, la matemática educativa busca ampliar esquemas explicativos para enriquecer la matemática escolar y que esta se muestre como funcional y articulada. En ese sentido, la Socioepistemología ha propuesto cuestionar no tanto las estrategias didácticas sobre cómo enseñar, sino qué se está enseñando. Su propuesta se sustenta en considerar una base de significación para la matemática escolar que considere el hacer del individuo y de ahí, la importancia epistemológica que se propone dar a las prácticas y al uso del conocimiento.

En el trabajo realizado hasta ahora con el Problema de las Bicicletas hemos hallado al menos tres tipos de estrategias de resolución, en las cuales las gráficas se usan de diferente manera. Con relación a este uso, podemos identificar una forma puntual de trabajar y argumentar con la gráfica, cuando importa identificar puntos clave o significativos, ya sea numéricamente para utilizarlos en fórmulas, o de forma gráfica, para hallar las coordenadas de un punto de intersección; pero también hay formas más globales cuando se reconocen intervalos o áreas. En esta estrategia, la gráfica ha funcionado bajo un argumento de suma de áreas de figuras conocidas, como una acumulación de distancias por intervalos, o reconociendo un comportamiento proporcional.

Resulta revelador que, aun bajo la primacía del empleo de fórmulas, los profesores pueden reconocer en el comportamiento de las rectas el referente para decidir cuál fórmula usar; esto también da cuenta de formas y funcionamientos de la gráfica que los profesores no necesariamente reconocen y que, sin embargo, son parte de las herramientas y argumentos que ponen en juego al enfrentar el problema.

Por otra parte, el que no logre reconocerse la gráfica misma como algo más que un dibujo o una ilustración puede provocar situaciones como la ilustrada en la figura 20. En esta respuesta, el profesor identifica claramente –sombreando en su dibujo– un rectángulo y un triángulo rectángulo; sin embargo, la solución que plantea es a través de la fórmula tradicional $d = vt$, la cual aplica para ambos ciclistas. Podemos ver cómo borra el 2 del denominador cuando calcula la distancia de Juan; tal vez era un dato que había visualizado como el área de un triángulo, pero después lo borra, pues no corresponde a la fórmula conocida. Esto lo llevó a una respuesta evidentemente errónea para la pregunta b), pues afirma que no hay ventaja entre los ciclistas.

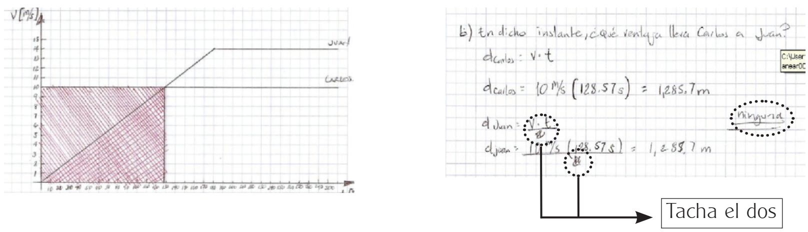


Figura 20. Tachando un denominador

Es interesante que él declare, en su reflexión, que el problema no le causó ninguna duda, lo cual evidencia que la gráfica en realidad no le *dice* nada, pero tampoco el contexto analítico es realmente significativo para él.

Como otro ejemplo, mostramos el comentario de Jorge respecto al trabajo con su alumna; él es el profesor que, en la discusión anterior, identificamos por su manejo confiado en estrategias visuales. Su alumna intentó –sin mucho éxito– buscar la expresión analítica de las rectas. Ante ello, Jorge declara: " Me parece interesante que cometí el error de contestar solo en base a la gráfica y su información en los dos primeros incisos. [...] También me pareció interesante el hecho de que, en lugar de tratar de resolverlo con herramientas más complejas, siempre busque el método más rápido, como en este caso, teniendo errores". Es decir, a pesar de que él contestó correctamente, con base en la visualización de áreas de figuras geométricas conocidas, él otorga a los aspectos analíticos un valor de verdad superior.

El análisis que hemos realizado sobre los usos de las gráficas deja entrever la importancia de considerar la graficación como una práctica institucional, que en su desarrollo escolar, favorece la generación de un saber matemático más rico, funcional y articulado. No solo favorece la construcción –y reconstrucción continua– del propio objeto gráfica, sino que lo hace a través de un proceso de significación continua y simultánea al desarrollo de un lenguaje, herramientas y argumentos gráficos.

Aunque no fue objetivo expreso de este escrito, es factible llevar a cabo una discusión relacionando los usos de las gráficas con conocimientos como la integral, el área de figuras geométricas y otros tópicos de la matemática escolar. Tomando como base de significación el uso de la gráfica, dichos tópicos adquirirían, a su vez, otros significados. De ahí la importancia de reconocer y continuar generando epistemologías de prácticas y usos.

COMENTARIOS FINALES

La profesora Nadia, al final de su documento, comenta la necesidad de que "a los alumnos hay que hacerles relacionar conceptos en distintas asignaturas, porque los tienen, pero les cuesta relacionarlos". Eso es lo que ella sintió cuando compara cómo ella usó la gráfica para resolver el ejercicio y cómo lo hizo su propia alumna.

Efectivamente, la propuesta de analizar el conocimiento en uso de los profesores tiene como objetivo que ellos mismos reconozcan que, en cualquier estrategia de resolución del problema es factible usar las gráficas considerando sus diferentes formas y funcionamientos. Estos usos reflejan, al menos, quién es ese profesor: el tipo de formación y el nivel escolar en el que suele dar clases. Pero también al cambiar el foco de análisis de lo que sabe el profesor hacia cómo lo usa, es factible considerar las herramientas y los argumentos provenientes de diversos contextos (disciplinas, niveles educativos) que se ponen en juego y se vuelven fuentes de significación.

Al analizar el conocimiento en uso, es posible reconocer que una gráfica puede anteceder a la función misma y usar una gráfica no requiere que se la conozca en toda su complejidad o precisión propias de la estructura matemática. Una vez que el argumento de naturaleza gráfica se pone en juego, es factible desarrollarlo para sostener las respuestas siguientes y lograr, a la vez, complejizar el conocimiento alrededor de la gráfica misma. Esto, consideramos, plantea un marco de referencia mucho más amplio y significativo para el conocimiento matemático.

RECONOCIMIENTO

Este escrito recibió apoyo del IPN a través del Proyecto SIP 20121671 titulado "Análisis del papel de las gráficas en la construcción del conocimiento matemático escolar". La autora agradece a Heidy Chavira, Isabel Tuyub y Miryán Trujillo por los comentarios y aportes recibidos.

DATOS DE LA AUTORA

Gabriela Buendía Ábalos

Programa de Matemática Educativa.
CICATA. Legaria-IPN
gbuendia@ipn.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (2003) "The role of visual representations in the learning of mathematics". En *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 52, pp. 215–241.

Bowen, G., Roth, W M., McGinn, M. (1999). "Interpretations of Graphs by University Biology Students and Practicing Scientists: Toward a Social Practice View of Scientific Representation Practices". En *Journal of Research in Science Teaching*, Vol. 36, núm. 9, pp. 1020-1043.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). "Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study". En *Educational Studies in Mathematics*. Vol 58, Núm 3, pp. 299-333.

Buendía, G. (2011). "El uso de las gráficas en la matemática escolar: una mirada desde la Socioepistemología". En *Premisa*. Vol. 48, pp. 42-50.

Camacho, A. (2006) "Socioepistemología y prácticas sociales". En *Educación Matemática* Vol. 18, núm. 1, pp. 133-160.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). "Socioepistemología y representación: algunos ejemplos". En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, 83-102.

Cantoral, R. Farfán, RM., Montiel, G., Lezama, J., Cabañas, G., Castañeda, A., Martínez-Sierra, G., Ferrari, M. (2008) *Matemáticas. Tercer grado*. México.

McGraw-Hill.

Cordero, F. (2006). "El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica". En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), I*nvestigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México, D. F., México, Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010) "Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato". En *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 13, núm. 2, pp. 187-214.

Doorman, L., y Greveijer, K. (2009) "Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity". En *ZDM Mathematics Education*, núm. 41, pp.199-211.

Duval, R. (1988). "Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres". En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, pp. 235–255

Montiel, G. (2010). "Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar". En *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (4-I) , 69-84.

Montiel, G. y Buendía, G. (2011). "Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica". En Sosa, Rodriguez y Aparicio (Eds.). *Memorias de la Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, pp. 443- 454. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Lezama, J. (2003). "Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas". Tesis de doctorado, no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2008). "Docencia en Matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva de la socioepistemología". En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, pp. 889-900.

Montiel, G. (2010). "Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar". En *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 13, núm. 4(1), pp. 69-84.

Radford, L. (2009). "No ¡He starts walking backwards!: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance". En *ZDM Mathematics Education*.

Suárez, L. (2008). "Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico". Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav-IPN.