

El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros

María del Mar Moreno Moreno
Departament de Matemàtica (UdL)
e-mail: (mmoreno@matematica.udl.es)

Resumen:

Los intentos de reforma de la enseñanza del cálculo en los diferentes países han sido muchos y distintos. La mayoría de los programas de renovación comparten los mismos criterios, y creen que los cambios deben afectar a: los currícula vigentes, al desarrollo profesional de la universidad, a la utilización sistemática de la tecnología y de otros materiales, a la formación didáctica y científica de los futuros docentes, etc. En España, cada vez son más numerosas y frecuentes las experiencias puestas en marcha por grupos de trabajo, profesores universitarios interesados y preocupados por la calidad y eficacia de su docencia, etc. La gran mayoría se apilan bajo el epígrafe de “innovación”. A pesar de ello, los cambios apenas se dejan sentir. La cuestión se plantea en términos de: ¿A qué se debe esta persistencia e inmovilismo al cambio? ¿Dónde radica la dificultad de la enseñanza de aplicaciones y de modelos de situaciones próximas a la realidad? ¿Qué pueden aportar las investigaciones de didáctica de las matemáticas al proceso de enseñanza y aprendizaje en el ámbito universitario?

Este artículo pretende ser una reflexión acerca de la situación actual de la enseñanza del cálculo en la universidad, así como una justificación de la necesidad e importancia de las investigaciones didácticas en el ámbito del conocimiento del profesor, como motor del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Abstract

The calculus reform in different countries have been very interesting but quite different. Most of the renewal programs share the same general issues, and most institutions have developed an agenda which includes the changes that must be, that it is: curricula, reward systems for faculty, the kind of space used for instruction in science and mathematics, technology and materials, meaningful connections with real life, etc. In Spain, there are some people interested in new experiences and, at the same time, worried by the quality and the efficient of their teaching. There are experiences of teachers who improve new methodologies in their classrooms, use problem solving or projects to develop the calculus concept, but they are a minority compared with the number of mathematics teachers who teach calculus at university level. The questions are: Why is so difficult the change? Why do not mathematics teachers teach the derivative, differential equations and so on, using real life situations instead of exercises? Why is so difficult the relation between mathematicians and math educators?

This paper is a reflection about the teaching of calculus at university level and an analysis of the calculus reform movement. We also discuss about the importance of the research in the pedagogical content knowledge and the development of professional knowledge for teaching.

Introducción

De entre los ámbitos de estudio de la didáctica de las matemáticas nos preocupa e interesa sobre todo el referido al nivel universitario. Cada vez son más numerosas las investigaciones que buscan su centro de interés en este nivel, y en particular, sobre el papel de la didáctica en la enseñanza de las matemáticas universitarias. El hecho de que, poco a poco, se traslade el foco de interés del estudiante al profesor, o al menos los dos compartan protagonismo, hace pensar a los investigadores lo acertado de la orientación de sus investigaciones, así como de la complejidad que en sí mismo entraña el tema. Esta complejidad no sólo es debida a las características particulares del profesor y de los estudiantes, sino también de la propia asignatura, cada vez más abstracta y formal, y de las características específicas de la Universidad como institución, que condiciona, limita y determina los límites de actuación en ella.

La investigación didáctica en el nivel universitario no es novedosa. Tal como recuerda Artigue (2003), ésta lleva realizándose durante más de 20 años. Tiempo, durante el cual, a parte de intentar mejorar la comprensión sobre las dificultades de los estudiantes y las disfunciones del sistema educativo, también se han intentado encontrar vías para superar estos problemas.

La enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas.

Los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, que acaba siendo rutinaria (Artigue, 1995; Yusof y Tall, 1999), y a menudo intentan inculcar desde los inicios, los tradicionales métodos rigurosos de demostración matemática (Yusof y Tall, 1999). Asimismo, el profesor evalúa las competencias adquiridas por el estudiante en este dominio algorítmico y algebraico, generalmente a partir de ejercicios similares o iguales a los presentados en clase, ejercicios que responden exactamente al mismo esquema de pensamiento.

Como argumenta Artigue (1995) este fenómeno, que comienza en la enseñanza y se continúa con la evaluación, acaba convirtiéndose en un círculo vicioso pues para obtener niveles aceptables de éxito se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, convirtiendo lo evaluado en lo esencial para los estudiantes.

Alguno de los problemas detectados como consecuencia de esta forma de enseñar es que si bien el conocimiento adquirido por los estudiantes les puede ser útil para resolver ejercicios y problemas rutinarios, en el momento en el que se les enfrenta a contextos y situaciones que requieren mayor conocimiento conceptual, la mayoría falla y no saben cómo abordar la situación (Selden, Mason y Selden, 1994). En palabras de Skemp (1980), lo que sucede es que los estudiantes aprenden el “producto del pensamiento matemático” en vez del “proceso”.

Para Artigue (1995), la evidencia de tales dificultades, los problemas detectados en los estudiantes y, en general, la insatisfacción existente tanto entre profesores como estudiantes ha tenido dos consecuencias interesantes:

- Potente desarrollo de las investigaciones didácticas de la enseñanza superior centradas fundamentalmente en el área de cálculo.
- Desarrollo y aparición de numerosos proyectos de innovación de la enseñanza.

El mayor exponente sobre temas de investigación didáctica en temas propios del cálculo queda recogido en el texto “Advanced Mathematical Thinking” (Tall, 1991), aunque se pueden citar otras tantas investigaciones recogidas en revistas como: *Educational Studies in Mathematics*, *Recherches en*

Didactique des Mathématiques, y las monografías de la American Mathematical Society sobre la reforma del cálculo, entre otras.

Por lo que respecta al tema de la innovación, se podrían citar casos como la renovación global del curriculum en Francia y Australia, o como las innovaciones y experimentaciones de Estados Unidos (Artigue y Ervynck, 1992; Lynn, 1993; Page et al., 1993), o los trabajos de innovación en el aula realizados en diversos lugares de España (Gómez i Urgellés, 2000; Llorens, J. L., 1995; Sánchez-Pérez, E.A., García Raffi, L.M. y Sánchez-Pérez, J.V, 1999; Guzmán, 1994, 2000), todos ellos con el objetivo de abordar el aprendizaje de las matemáticas de forma creativa, significativa y constructiva en la universidad.

No obstante, y en contra de lo que sería deseable, el informe Tucker (1991) deja claro el distanciamiento tan grande existente entre el mundo de la investigación y el de la innovación. A modo de ejemplo, en Estados Unidos la mayoría de los proyectos inscritos en el área de renovación del cálculo se han aplicado de forma independiente de los trabajos de investigación existentes.

Investigación vs. Innovación y renovación

Tanto la investigación como la innovación o renovación tienen sus propias dificultades, que quizás hoy por hoy, están lejos de encontrar puntos en común. Tratamos de adentrarnos en el problema, reflexionar sobre el interés de cada una, y la manera de establecer conexiones entre ambas.

Las investigaciones didácticas se han desarrollado atendiendo a diferentes enfoques teóricos y conceden un peso variable a cada una de las tres dimensiones que resultan esenciales: la epistemológica, la cognitiva y la didáctica; pero, además, existe un gran problema: los marcos teóricos que las sustentan. El hecho de no existir un paradigma dominante hace que no se facilite la comunicación entre investigadores, intentando cada corriente de investigación mantenerse en su torre de marfil.

De la misma forma, los intentos por la innovación también resultan problemáticos. Generalmente el entusiasmo de las personas que lo realizan y la necesidad de convencer hace que se dejen a un lado los problemas, y se sobrestimen las potencialidades y virtudes. En este sentido Artigue (1995), y sobre las innovaciones, advierte de la peligrosidad de caer en un discurso ingenuo, donde se toma como análisis cognitivo y didáctico el hecho de que tales herramientas se constituyan como un buen catalizador para forzar la evolución de las prácticas pedagógicas de los profesores y para comprometerlas en un enfoque más constructivista del aprendizaje.

a) Reformas en la enseñanza del cálculo en el nivel universitario:

Las distintas reformas a las que se han visto abocados los diferentes programas de cálculo aunque han sido interesantes, no han acabado con los problemas y las dificultades de los estudiantes. Según Artigue (1995), algunas de las críticas más destacadas hacia los programas de cálculo en Francia fueron: introducción de las nociones básicas desligadas de problemas reales; construcción lineal de los conceptos; escasa relevancia de la resolución de problemas; empleo muy precoz de un lenguaje formalizado; enseñanza muy centrada en el discurso del profesor, etc.

Estos puntos que Artigue señala como críticas a la enseñanza de los años setenta en Francia, son perfectamente equiparables a las consecuencias obtenidas en el estudio Moreno (2001) con profesores de universidad, en el que se detectaba que la forma general de plantear la enseñanza era de acuerdo a muchos de esos principios básicos.

Las reformas actuales recomiendan una revisión de los programas de cálculo, y de hecho los profesores intentan acomodar los programas a las realidades de los estudiantes. No obstante, en el caso español no se ha realizado un debate tan específico como en el caso francés para abordar la problemática de las diferentes áreas de las matemáticas que se tratan en el nivel universitario.

De la misma forma, la mayoría de los proyectos de los Estados Unidos, y ponemos como ejemplo el de Rouche (1992) o Page et al. (1993), desarrollan los conceptos del cálculo a partir de situaciones cotidianas y de problemas. Las ideas principales que se sustentan son que los objetos mentales preceden a los conceptos formales, y que éstos pueden servir para organizar ciertos campos de experiencia, y que los conceptos matemáticos se formalizan únicamente cuando son necesarios o bien útiles para demostraciones.

Muchas de las renovaciones curriculares realizadas, por ejemplo en Estados Unidos, Australia o Francia, son reformas orientadas tecnológicamente. Evidentemente la orientación dada por cada país e incluso por cada universidad puede variar considerablemente. En el caso de Estados Unidos las reformas han tomado dos caminos opuestos, uno radical que intenta una reconstrucción del currículum partiendo de cero, como es el enfoque de la Universidad de Duke; o bien el resto, que buscan una reestructuración de la enseñanza de acuerdo a las consideraciones epistemológicas, cognitivas y tecnológicas (Schwingendorf, 1992).

El caso australiano (Mack, 1992) se ha centrado en desarrollar software que facilite las representaciones gráficas y algebraicas de las nociones de cálculo. Dadas las dificultades producidas por los enfoques tradicionales el gobierno y las instituciones educativas están apoyando aquellos proyectos que produzcan una introducción intuitiva al cálculo a través de la resolución de problemas.

b) Investigaciones didácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las nociones del cálculo en la universidad:

Para Harel y Trgalová (1996), revisando el panorama actual de las investigaciones didácticas en el área de cálculo, es posible entresacar tres ejemplos de tres nuevos enfoques en la enseñanza del cálculo que pueden ser representativos de los movimientos actuales de cambio en diferentes países del mundo:

El primero al que los autores hacen referencia es del denominado “Proyecto de Cálculo en Contexto” (1987) y en el que participa la Universidad de Massachusetts. La idea principal es que el cálculo es un lenguaje (el lenguaje de la ciencia), una red de conceptos y un conjunto de técnicas útiles. El objetivo principal del proyecto es que los estudiantes construyan las matemáticas a través de sus aplicaciones y comprendan las relaciones entre todos los elementos que configuran el cálculo. La instrucción se organiza de forma que los principios generales emergen de los problemas y de las situaciones reales tratadas. Los estudiantes trabajan en pequeños grupos y los problemas se tratan inicialmente con métodos numéricos, con ayuda del ordenador, antes de desarrollar técnicas de obtención de soluciones analíticas (O’Shea y Senechal, 1992).

Otro nuevo enfoque que se está dando a la enseñanza del cálculo se presenta bajo el formato de “Proyecto de Debate Científico” (Legrand, 1992) y su objetivo principal es conseguir que los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos mediante la introducción de diferentes conceptos del cálculo en el contexto de problemas científicos. Los estudiantes formulan preguntas, proponen conjeturas, dibujan sus propias conclusiones de acuerdo a la relevancia y validez de las conjeturas, y discuten y argumentan sus puntos de vista con los compañeros de clase. El mayor obstáculo didáctico de este proyecto es el conflicto existente entre el enfoque científico y los hábitos de aprendizaje establecidos por las instituciones educativas.

El tercer enfoque novedoso al que se refieren los autores es el propuesto por Artigue y sus colaboradores (Artigue 1989, 1991, 1992, 1994; Alibert, Artigue et al., 1989; Artigue, Menigaux y Viennot, 1990; Artigue y Rogalski, 1989) que desarrollan un modelo teórico y de enseñanza denominado ingeniería didáctica. Un ejemplo, lo encontramos en una de las primeras investigaciones realizadas por Artigue (1989) sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, las cuales han acabado enseñándose como si de un catálogo de recetas de solución algebraica en los casos clásicos de funciones integrables se tratara. Para ello la investigadora propone estudiar la viabilidad de un nuevo enfoque de enseñanza que intente desde el principio coordinar los enfoques algebraico, numérico y

gráfico con la solución de la correspondiente ecuación diferencial asociada. Se plantea una investigación en tres fases: análisis e interpretación de la enseñanza; análisis de las restricciones en la enseñanza; diseño de una ingeniería didáctica.

El proceso de enseñanza se lleva a cabo en fases organizadas alrededor de situaciones consideradas claves por los investigadores. Las experimentaciones sucesivas con este modelo han mostrado, no sólo, la viabilidad “teórica” de tal tipo de enseñanza, sino, el interés que puede generar en los estudiantes a pesar del aumento de dificultad. Son muchos los investigadores que han seguido y aplicado los trabajos de Artigue, aplicándolos a diferentes contextos y contenidos de cálculo.

Otras investigaciones didácticas con interesantes repercusiones en la enseñanza han sido las que han hecho del ordenador el centro de interés. Muchas de estas investigaciones han consistido en el desarrollo de un software especializado para la enseñanza efectiva de conceptos de cálculo (Tall, 1986b; Tall et al., 1990; Koçak, 1986; Hubbard y West, 1990). Por su especial relevancia, destacamos como ejemplo los trabajos de Tall en la línea de potenciar la visualización y las diferentes representaciones de un mismo concepto, como aspectos facilitadores del aprendizaje. Aunque Tall ha dedicado mucho tiempo a los trabajos sobre límites y continuidad, también son interesantes sus aportaciones en el estudio de la derivada, la tasa de cambio y los trabajos sobre visualización en dos y tres dimensiones de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

El software “Graphic Calculus” (Tall 1986a, 1986c; Tall et al., 1990) intenta abordar los conocidos obstáculos conceptuales en la comprensión del concepto de límite, y propone una nueva secuencia de aprendizaje construida sobre la base de la visualización de la “rectitud local” de los gráficos. Usa el gráfico y las posibilidades dinámicas del ordenador para dar una base cognitiva a las nociones de derivada e integral en educación secundaria, y que pueden llevar a formalizaciones posteriores en diferentes ramas del Análisis. La importancia de este software, especialmente diseñado para trabajar con las nociones del cálculo, es que permite a los estudiantes explorar inicialmente las ideas geométricas y numéricas, desarrollar sus propias concepciones y finalmente, conectarlas con los productos de los procesos simbólicos, dándoles una interpretación significativa.

Otro modelo que actualmente utilizan los investigadores para avanzar en el conocimiento de las dificultades de los alumnos con los conceptos matemáticos, y que además, propone secuencias posibles de enseñanza es el modelo APOS desarrollado por Dubinsky (ver Tall, 1991) y modificado posteriormente (Asiala et al., 1996; Dubinsky y McDonald, 2003). APOS no sólo es un marco teórico de referencia sino también un modelo que permite analizar las construcciones mentales utilizadas en el aprendizaje de conceptos matemáticos de nivel superior. Este modelo se basa en las acciones, procesos, objetos y esquemas que cada individuo realiza sobre los conceptos matemáticos que aprende. Los investigadores que trabajan dentro de este modelo teórico, forman un grupo de trabajo e investigación denominado RUMEC, que elaboran descomposiciones genéticas de diferentes conceptos matemáticos enseñados en el nivel universitario, y diseñan secuencias de enseñanza de acuerdo a las descomposiciones genéticas, las cuales son experimentadas y modificadas en lo necesario. Estas secuencias de enseñanza se organizan en lo que se denomina ciclo ACE: actividades para ser realizadas en el ordenador, discusiones de clase y, ejercicios para ser hechos con lápiz y papel. Hoy por hoy, las investigaciones sobre la teoría APOS son un claro referente para cualquier investigador que desee orientar su investigación hacia la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de cálculo en el nivel universitario.

Finalmente, y por tratarse de un ejemplo de investigación con repercusiones en la enseñanza, queremos destacar la interesante contribución del profesor Gómez (2000) al trabajo sobre modelización en el nivel universitario. Dicha investigación fue realizada en el marco de la enseñanza de las matemáticas a futuros ingenieros de la Escuela Universitaria Politécnica de Vilanova i la Geltrú.

Uno de los objetivos del trabajo fue analizar la viabilidad de introducir elementos nuevos de aprendizaje, como es la modelización, y diseñar un currículum innovador, mejorando y evaluando el proceso de aprendizaje.

Para ello se diseñaron unidades didácticas específicas, y se utilizó la metodología de trabajo por proyectos, eligiendo problemas adecuados a los contenidos y a los conocimientos previos de los estudiantes (modelización de un sistema de resortes; el astronauta y las ecuaciones diferenciales, etc.). Los datos e información disponible procedían de grabaciones de vídeo y cassette, y cuestionarios pasados a los estudiantes.

La valoración que el autor hace del trabajo es positiva. La experiencia demostró que los alumnos eran capaces de descubrir el significado de las situaciones propuestas, aprendían a construir modelos y sentían la necesidad de resolver modelos específicos para encontrar la solución. Asimismo, el trabajo por proyectos resultó muy útil, y permitió a las estudiantes lograr un equilibrio entre las matemáticas y la aplicación de éstas a la realidad. Para el autor, los principales obstáculos de la investigación fueron: el tiempo empleado para realizar las prácticas con los estudiantes; el desconcierto de los alumnos habituados a un tipo de práctica rutinaria, y el miedo de los profesores a la pérdida de la tradicional pureza de las matemáticas.

Si bien hay otros grupos de investigación y modelos teóricos de referencia que con sus trabajos e investigaciones contribuyen al desarrollo de la Didáctica del Análisis, hemos hecho esta selección por tratarse de investigaciones que abordan la problemática de la enseñanza de diferentes aspectos del Análisis en el ámbito universitario, y donde el profesor adquiere una gran relevancia.

Es cierto que cada vez las ideas de renovación se van asentando en la enseñanza de las matemáticas de los niveles iniciales universitarios, dejando un poco de lado el formalismo y rigor prematuro propio de las enseñanzas más tradicionales, y abriendo las puertas a la adquisición de ideas y conceptos de forma significativa y profunda. Aunque tal como comentaba Artigue (1995), la enseñanza actual se basa fundamentalmente en el énfasis de las destrezas procedimentales y en la aplicación de reglas, asimismo el estudiante parece sentirse cómodo en ese papel y prefiere tal enfoque frente a otros que supongan un aprendizaje significativo y relacional. Igualmente, Rogalski (1990), considera que los estudiantes no están interesados en observaciones epistemológicas ni históricas sobre las matemáticas, dudan a la hora de realizar preguntas, y prefieren métodos de solución directos frente al intento por parte de algunos profesores de profundizar en los conceptos que aprenden.

El problema de la renovación e innovación no sólo resulta problemático por parte de los estudiantes sino también, a menudo, por parte de los profesores que dudan y no se sienten seguros en las nuevas metodologías de enseñanza, por motivos diferentes. No obstante, y a pesar, de que puedan existir detractores de la utilización de nuevas tecnologías en la enseñanza del cálculo, o bien, profesores que prefieren mantenerse en la postura tradicional de potenciar la enseñanza de los métodos de resolución algebraica muy por delante de los numéricos o geométricos, la realidad es que cada vez más profesores intentan mostrar a los estudiantes las matemáticas como un mundo de exploración y de resolución de problemas.

La cuestión de fondo es preguntarse acerca de lo que está pasando, porque las experiencias innovadoras suelen ser bastante puntuales, y nuestros métodos de enseñanza siguen siendo poco eficaces y no demasiado buenos para enseñar a una población estudiantil universitaria, que en su mayoría, no serán matemáticos y, sin embargo, tendrán que utilizar las matemáticas en sus profesiones.

La respuesta no proviene de un único lugar, y es evidente que hay muchos factores que deben tenerse en cuenta. Este trabajo pretende captar la atención de los lectores hacia uno de los elementos, que desde nuestro punto de vista, es clave para el éxito, y necesario para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tenga su origen en la investigación: el profesor. Hablar del profesor implica hacerlo del conocimiento y del desarrollo profesional. Una de las componentes que tanto Benedito et al. (1995), desde el ámbito de la pedagogía, como Cooney (1998) desde la didáctica de las matemáticas, consideran inseparables del término profesionalización, son las creencias y los

conocimientos¹. Desde nuestro punto de vista, las creencias juegan un papel muy importante en todo lo que se relaciona con el profesor y la toma de decisiones en su ámbito profesional, por lo que cualquier intento de implementación de la calidad docente debería pasar por detectar, identificar, analizar e interpretar cuáles son esas concepciones y creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la materia en sí misma en su contexto específico de enseñanza.

Desde una perspectiva de enseñanza y aprendizaje constructivista, Benedito (1995) caracteriza la figura del profesor universitario en término de lo deseable:

[...] El profesor universitario debería provocar procesos de aprendizaje en el aula, conocer la dinámica de la misma, seleccionar, organizar los contenidos, facilitar el surgimiento y formulación de interrogantes, alimentar la discusión y el debate, establecer relaciones positivas, evaluar el trabajo de los alumnos y facilitar la búsqueda y construcción con sus alumnos del conocimiento científico. El profesor ha de comprender cómo se utiliza y elabora o reconstruye el conocimiento científico, se resuelven situaciones inciertas y desconocidas, se elaboran o modifican rutinas, se toman decisiones, se experimentan hipótesis de trabajo, se utilizan técnicas, instrumentos y materiales nuevos o conocidos, se recrean estrategias, se inventan procedimientos, tareas y recursos, se realizan las tareas de evaluación, se modifican sus teorías previas en contraste con la realidad, etc.” (Benedito et al., 1995)

Todas las acciones a las que se refiere Benedito, están condicionadas por esas creencias específicas del profesor, por lo que cualquier cambio resulta muy complejo, y no suele producirse a menos que el propio profesor, tal como apunta Cooney (2001), sienta la duda y vea la evidencia de que el cambio es necesario y puede reportar beneficios. Si no hay motivo para dudar de las creencias propias, tampoco hay razón para cambiarlas. En este sentido, nos parecen muy interesantes las reflexiones de Cooney sobre este elemento de “la duda” que, bien se puede sembrar en el propio profesor, o simplemente surge espontáneamente, y es el punto central para promover el cambio.

Desde nuestra experiencia como investigadores, estamos convencidos de la necesidad de una detección previa de las concepciones y creencias del profesor, como punto de partida para poder incidir e implementar el desarrollo profesional del profesor. En este sentido, nos gustaría detenernos en la investigación que realicé en el 2001 con matemáticos de diferentes universidades españolas, para así poder argumentar por qué las concepciones y creencias sobre el profesor deberían ser el punto de inicio de cualquier investigación sobre el profesor y su desarrollo profesional.

Un ejemplo de investigación sobre creencias de profesores de matemáticas en el nivel universitario

Para identificar y detectar las concepciones y creencias de algunos profesores de matemáticas universitarios sobre la enseñanza y aprendizaje de algunos aspectos del cálculo², decidimos realizar una investigación que así nos lo permitiera (Moreno, 2001). Para realizar esta investigación contamos con la inestimable colaboración de seis profesores de universidad, matemáticos especialistas en matemática aplicada, y que impartían docencia no sólo en facultades de matemáticas sino también en facultades como química, biología o veterinaria. Entre todos los profesores había tanto expertos como novatos, pero al menos todos tenían un mínimo de 6 años de experiencia docente en la universidad.

¹ Las definiciones y discusión que aceptamos para los términos concepciones y creencias se corresponden con los explicados detalladamente en Moreno, M. (2002) El pensamiento del profesor. Evolución y estado actual de las investigaciones. En G.A. Perafán y A. Aduriz-Bravo (Eds.) *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales*, p. 61-78, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

² La investigación a la que nos referimos, Moreno (2001), versaba sobre ecuaciones diferenciales y el problema de la modelización; sin embargo, hemos empleado la expresión genérica “conceptos/nociones del cálculo” porque los aspectos que resaltamos de la investigación en este capítulo, pueden hacerse extensivos a cualquier noción de cálculo. Básicamente nos interesa mostrar al lector una manera de aproximarnos a las creencias de los profesores de universidad y la posterior utilización de toda la información obtenida.

El instrumento diseñado para la recogida de datos pretendía que surgiera la duda y la autorreflexión de los profesores participantes sobre su propia actuación docente. El cuestionario constaba de cuatro tareas, todas ellas elegidas de textos propuestos habitualmente por los profesores en las asignaturas impartidas a los químicos, biólogos y veterinarios. Salvo la primera tarea, que fue calificada por la mayoría de los profesores como estándar, por el hecho de ser muy habitual y fácilmente identificable por los estudiantes; las otras tres cuestiones rompían con los esquemas de trabajo clásicos en estos cursos.

A partir de todos los datos procedentes, tanto de los materiales disponibles de cada profesor (programas asignatura, hojas de ejercicios y problemas, bibliografía recomendada...), como de las respuestas de los profesores al cuestionario (respuestas recogidas en una entrevista grabada en audio), realizamos un doble análisis. El primer análisis tenía carácter global y su finalidad era proporcionar una visión muy general sobre las concepciones y creencias, que mayoritariamente manejaban los profesores de nuestra investigación, sobre aspectos de enseñanza, aprendizaje y modelización. El segundo análisis lo denominamos particular pues pretendía dar una caracterización individual de cada profesor, destacando incoherencias, si era el caso, entre aspectos de bloques diferentes pero relacionados entre sí, o bien, evidenciando la coherencia mantenida en la mayoría de sus respuestas. Asimismo, este análisis nos permitió hablar del grado de permeabilidad de las creencias y concepciones de cada profesor, y la posibilidad de que, bajo determinadas circunstancias, todos o alguno de ellos pudieran encontrarse en disposición de evolucionar o, simplemente modificar algunas de las creencias y concepciones mantenidas por ellos respecto a la materia y, a su enseñanza y aprendizaje.

Si bien, ambos análisis no pueden verse independientemente, en este trabajo vamos a centrarnos en el análisis particular de los datos, pues en cierta manera, es el que nos aporta información acerca de la importancia de la investigación sobre creencias como paso necesario a la profesionalización de los profesores universitarios y al establecimiento de conexiones entre la innovación y la investigación didáctica.

El análisis particular proporcionó una caracterización de cada profesor atendiendo a tres aspectos: las concepciones sobre los conceptos matemáticos; la práctica docente que interpretamos que realiza cada profesor a la vista de los datos disponibles; las creencias de cada profesor sobre lo que piensa que debería ser su propia práctica docente. Un análisis más detallado de los resultados lo podemos ver en Moreno y Azcárate (2003).

Prácticamente todos los profesores sostienen una visión platónica de la existencia de los objetos matemáticos y están convencidos de tratar con una realidad objetiva, si bien explícitamente mantienen una concepción formalista de las matemáticas. Tan sólo el profesor C muestra cierta tendencia instrumentalista, y el profesor F, aún con su marcado carácter formalista, hace ciertos guiños al intuicionismo, y no está en total desacuerdo con dicha escuela de pensamiento.

Cuando el análisis se centra en lo que los investigadores hemos interpretado como la práctica docente de cada profesor, las diferencias comienzan a surgir. Los profesores A, C y F son claramente instrumentalistas (no sólo por lo que ellos dicen que hacen y creen acerca de la enseñanza y aprendizaje, sino que tales creencias coinciden con la interpretación que los investigadores hemos realizado teniendo en cuenta toda la información disponible de cada profesor); el profesor B también lo podemos calificar de instrumentalista aunque con tendencia a lo pragmático-constructivista; el profesor D claramente lo calificamos de dogmático-conservador (idea que como en el caso de los profesores instrumentalistas, es una conclusión a la que llegamos los investigadores y coincide totalmente con las creencias personales del profesor y los datos disponibles); finalmente, el profesor E entra en una contradicción pues aunque la creencia personal de este profesor sobre su docencia le hace enmarcarse en la categoría de pragmático-constructivista, el análisis de los datos disponibles para los investigadores y de los materiales proporcionados por el propio profesor, nos hace calificar su actuación docente como una mezcla de dogmático-conservador e instrumentalista.

Nuevamente, cuando analizamos las creencias de cada profesor sobre lo que cada uno piensa que debería ser su práctica docente, vuelven a aparecer las diferencias: los profesores A, B y E creen que deberían actuar más como pragmáticos-constructivistas; el profesor F se inclina más hacia el intuicionismo con matizaciones y ligera tendencia hacia lo pragmático-constructivista; el profesor C claramente se define instrumentalista; mientras que el profesor D se mantiene en la línea dogmático-conservadora.

A pesar de la aparente homogeneidad entre los seis profesores, fuimos capaces de agruparlos en tres grupos, atendiendo a la concepción que tienen de la matemática, a cómo creen que debería ser su docencia y, a cómo hemos interpretado los investigadores que es su práctica docente (a la luz de los materiales y datos recogidos de cada profesor): I (profesores A, B y F), II (profesores C y D) y III (profesor E). En esta tipificación es donde tienen un gran valor las creencias y concepciones de cada profesor, y donde más allá de que algunas de éstas puedan ser diferentes, se pueden encontrar elementos comunes unificadores.

Ahora bien, ¿qué es lo que nos ha conducido a tipificar así a los profesores? ¿Qué diferencia, desde el punto de vista de las creencias, a los profesores de los diferentes grupos?

Esta tipificación se debe, en gran medida, al estudio del nivel de coherencia mostrado por los profesores, y al grado de permeabilidad o consistencia de sus creencias. Asimismo, la posibilidad de disponer de mucha información complementaria sobre las creencias y concepciones particulares de cada uno de los profesores del estudio con todo tipo de matizaciones, permitió no solo la tipificación más general, sino también, los informes particulares y detallados de cada profesor.

Los profesores del grupo I son, desde nuestro punto de vista, los menos coherentes y consistentes en sus concepciones y creencias. Este grupo es el más reflexivo y autocrítico consigo mismo, y es precisamente, de la reflexión de su práctica docente y de sus creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje, donde surgen contradicciones entre lo que creen que se debería hacer y lo que realmente hacen. La realidad dominante es que se acaba haciendo un ejercicio de docencia muy instrumentalizado, donde la resolución de tipos de ecuaciones diferenciales, problemas estándar y la casi ausencia de conceptos teóricos demasiado complejos son los protagonistas de la materia. Estos profesores están convencidos que sería necesario buscar la parte más significativa de las ecuaciones diferenciales, aproximarse más a los intereses de los estudiantes y de las profesiones en las que se están formando. Asimismo, piensan que sería más importante que el estudiante tuviera una idea global y más completa de las ecuaciones diferenciales, aunque fuera más intuitiva y menos formal de lo que cabría esperar de dicho conocimiento para un matemático.

El problema, según los profesores, es que, ni se dispone del tiempo ni de los medios apropiados para ello; y, además, carecen de la formación adecuada para progresar como docentes.

En el otro extremo tenemos a los profesores del grupo II, que podrían ser calificados como los más coherentes y consistentes en sus concepciones y creencias, a pesar de una práctica docente tan diferente. Mientras que el profesor C es claramente instrumentalista, el profesor D lo es dogmático-conservador. A ambos les une la fuerte convicción de que su actual práctica docente es la única posible y la que debe ser. El profesor C cree que dado el pobre nivel de competencia de los estudiantes, su desmotivación natural hacia la materia, etc., la única posibilidad de enseñanza con estos colectivos de químicos y biólogos es utilizando ejercicios, técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales, y tipos de situaciones modelizables bajo modelos previamente explicados por el profesor en clase, y que se ajusten perfectamente a dichos modelos. Por su parte, el profesor D, está convencido de la necesidad de no perder los valores propios de las matemáticas, la importancia de mostrar la belleza de una demostración, etc.; y la obligación de los estudiantes, aunque no sean futuros matemáticos, de ser conscientes de la dificultad que en sí misma entrañan muchos conceptos matemáticos de nivel superior.

La propia firmeza en las concepciones y creencias de los profesores del grupo II, elimina cualquier

atisbo de duda sobre su práctica docente, y aleja cualquier expectativa, por parte de los investigadores, de cualquier tipo de cambio o puesta en práctica de una experiencia de innovación. En ningún momento se plantean que su forma de enseñar no sea la más adecuada ni eficaz; tampoco hay, en principio, argumentos suficientemente convincentes que les lleven a creer que los estudiantes pueden mejorar sus aprendizajes bajo contextos o circunstancias diferentes.

El caso del profesor E (grupo III) es totalmente distinto al del resto de los profesores, a pesar de que, desde el punto de vista del análisis de la consistencia o permeabilidad de las creencias, el resultado es similar al del grupo II. Este profesor se siente muy cómodo con su modo de enseñar, considera que ha alcanzado el objetivo perseguido por muchos profesores, como es el de ser constructivista (en un sentido muy genérico de la palabra); y, además, cree que los estudiantes aprenden y están muy conformes con su manera de enseñar. En este profesor hay, asimismo, un factor de inconsciencia que distorsiona lo que como investigadores pensamos que es la realidad de su enseñanza.

Como en el caso del grupo II, la ausencia de duda justifica la ausencia de motivos para el cambio; sin embargo, en este caso, llamamos la atención en la incoherencia del discurso de este profesor, que se podría justificar por cómo el profesor E presenta los temas en clase (a veces recurre a ejemplos de la realidad), la utilización de un discurso eminentemente didáctico y, su preocupación por los estudiantes y, en general, por la enseñanza. El resultado de los análisis de los materiales proporcionados por el profesor E muestran los equilibrios que hace para mantenerse entre las posturas más dogmáticas-conservadoras (no perder el valor ni naturaleza del conocimiento matemático) y las instrumentalistas (una práctica excesivamente mecánica que acabará proporcionando un conocimiento parcial de las ecuaciones diferenciales, y de unas cuantas técnicas de resolución). Este profesor muestra muchas contradicciones entre su discurso y lo que los investigadores creemos que hace. El hecho de que este profesor no sea consciente de tal contradicción nos lleva a pensar en la dificultad de incidir en su desarrollo profesional..

Mirada a dos casos particulares: los profesores A y D

La visión del perfil particular de cada profesor y la comparativa entre grupos nos proporciona pistas de cuáles serían aquellos aspectos más interesantes sobre los que actuar, detectar los puntos débiles de los profesores, los elementos de duda que se explicitan y suelen ser punto de partida y motor del cambio, etc. Mostraremos a modo de ejemplo, parte de un análisis entre dos profesores de dos grupos diferentes, y así ilustrar al lector y dar una idea de cómo puede ser la actuación posterior una vez detectadas e identificadas estas creencias de los profesores y analizado el grado de consistencia o permeabilidad de éstas, así como las coherencias e incoherencias internas.

Un elemento fundamental para el análisis particular fue la lista de descriptores elaborada durante la investigación en la fase del análisis de los datos. Estos descriptores, como los hemos denominado, proceden de las sucesivas reducciones de datos realizados a lo largo de las siete fases en las que tuvo lugar el proceso de análisis. La lista de descriptores esta organizada en torno a tres grandes bloques: aprendizaje, enseñanza y modelización. A su vez, cada uno de estos bloques incluía varios apartados directamente relacionados con los bloques en los que estaban incluidos. Por mostrar un ejemplo: dentro del bloque aprendizaje se incluyeron 4 apartados: respuestas y razonamientos de los estudiantes-dificultades y errores-percepción modelos de ecuaciones diferenciales-grado de formalización; dentro del de enseñanza incluimos 5 y, dentro del de modelización 4. La riqueza de esta lista de descriptores es que en cada uno de los apartados correspondiente a cada uno de los tres grandes bloques identificados inicialmente, se recogían prácticamente todas las respuestas diferentes y matices que los profesores proporcionaron al reflexionar sobre los diferentes temas tratados.

De esta forma, basta con aplicar la lista de descriptores a cada profesor para obtener el perfil de cada uno de ellos, y conocer exactamente las creencias sobre las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de diferente tipo, como por ejemplo: de resolución de problemas tipo estándar, otras de tipo no estándar, problemas que parten de un planteamiento gráfico, o bien tareas de carácter eminentemente teórico. Al igual que sobre dificultades, podríamos hacer lo mismo con cualquiera de

los muchos apartados que aparecen en la lista. Esto nos proporciona una radiografía bastante exacta de cada profesor, en términos de concepciones y creencias sobre un aspecto matemático concreto, sin olvidar la importancia del contexto y los condicionantes que ello supone. Igualmente nos permite, con cierta sencillez, comparar perfiles de profesores, global o parcialmente; detectar creencias coincidentes y diferentes; etc. En resumen, contamos con una vasta información que puede ser reutilizada con cierta sencillez y que puede ponerse al servicio de los profesores de cara a su desarrollo profesional.

Para desarrollar este apartado hemos elegido dos profesores: el profesor A perteneciente al grupo I, y el profesor D del grupo II.

Fijémonos, por ejemplo, en las concepciones y creencias de cada profesor respecto al “formalismo exigido y esperado de los estudiantes”, apartado incluido en el bloque de aprendizaje. Mientras que el profesor A cree que no se debe exigir excesivo formalismo matemático, y que sería suficiente que los estudiantes fueran capaces de comprender lo que se les pregunta y fueran capaces de explicarlo de forma inteligible. El profesor D piensa que es necesario transmitir a los estudiantes el valor de los objetos matemáticos y sus significados, y exigir rigor y bastante grado de formalismo tanto en las definiciones como teoremas explicados en clase. Al mismo tiempo, la respuesta del profesor A en el apartado “dificultades y errores cometidos por los estudiantes”, también del mismo bloque, entra en contradicción con la creencia anteriormente manifestada, al afirmar que en una definición matemática hay ausencia de dificultad, pues se trata de una tarea que no requiere comprensión sino sólo memorización. El profesor D confirma el nivel de coherencia en sus respuestas, tal como quedó patente, al considerar que las dificultades de los estudiantes suelen relacionarse con la comprensión del enunciado y su redacción bastante abstracta, y la falta de conocimientos.

Veamos algo sobre otro bloque como es el de enseñanza. Si analizamos las creencias sobre la enseñanza en el apartado “definiciones, teoremas y demostraciones”, volvemos a encontrar diferencias considerables entre ambos profesores. El profesor A elige definiciones sencillas y ausentes de formalismos, suele enunciar teoremas en clase y trabaja sobre su significado, y no demuestra nada, tan sólo se intenta usar el sentido común para comprenderlos. Por el contrario, el profesor D, coherente con sus concepciones sobre las matemáticas y sus creencias sobre la enseñanza confirma que: elige aquellas definiciones que surgen como ‘consecuencia de’ y también aquellas que sean matemáticamente relevantes; se enuncian teoremas y se trabaja sobre su significado, pero al contrario que el profesor A, hace todas aquellas demostraciones que sean constructivas y cuya técnica de demostración sea adaptable a otras situaciones de interés matemático.

Dentro del mismo bloque nos fijamos, a modo de ejemplo, en el apartado “profesionalización y formación”, por tener éste bastante interés para los investigadores. Mientras que el profesor A asume la deficiente formación inicial alejada de los modelos químicos o biológicos, y la influencia que ésta tiene sobre su enseñanza pues le impide dar explicaciones convincentes de algo que ni domina ni conoce suficientemente; el profesor D, aún asumiendo la deficiente formación inicial, piensa que la formación inicial como matemáticos proporciona herramientas suficientes como para superar cualquier laguna de conocimiento.

Cuando dentro de este mismo apartado se aborda el tema de las repercusiones de cara a la docencia, el profesor A revela cierta sensación de vacío de conocimiento específico aplicado a estas disciplinas, y siente que explica contenidos carentes de interés para los estudiantes. Asimismo, justifica la deficiente y mediocre preparación de sus clases por la falta de textos y otros materiales didácticos adecuados. Por el contrario, el profesor D cree que todo profesor, según sus concepciones y creencias personales, se ve obligado de alguna manera a optar por la parte más instrumental o más aplicada de las ecuaciones diferenciales debido a la dificultad conceptual de conciliar ambas. Además, cree que la formación específica del profesor no repercute en modo alguno en la docencia, ya que el bajo nivel de conocimiento del alumnado impide al profesor mostrar su propio desconocimiento del tema.

La riqueza de estas creencias y pensamientos evocados por estos profesores es grande, y proporciona información valiosísima que nos permite desenmascarar dos profesores que aunque en apariencia y en

muchos aspectos son similares, y en la práctica su enseñanza puede llegar a ser muy parecida, sus creencias ocultas destapan dos personalidades muy diferentes, con inquietudes y creencias distintas sobre la enseñanza, y con actitudes contrarias sobre lo que su formación puede o no repercutir en su docencia.

Aunque a modo de ejemplo, la comparativa entre las creencias de estos dos profesores justifica la pertenencia a dos grupos diferentes el I y el II, respectivamente; y cómo las dudas, la autocrítica y las propias contradicciones internas en las que a menudo cae el profesor A, son el germen de duda al que se refería Cooney (2001) que pone al profesor en situación de cambio de creencias, por sentirse incómodo en las suyas, o al menos, ser consciente de la necesidad de encontrar otro “algo” no sólo que le llene más como docente, sino también a sus estudiantes. Por el contrario, el caso del profesor D, perteneciente al grupo II, muestra la otra cara de la moneda, y es la del profesor muy coherente, seguro y convencido de su actuación como profesor y matemático, y sin sentir ningún tipo de carencia en su formación profesional. Este es el caso de la persona que tiene unas creencias firmes, seguras y muy arraigadas, y que al no sentir duda, tampoco siente ninguna necesidad de cambiar nada. Desde su perspectiva como docente y matemático el cambio no tiene sentido, las cosas funcionan de manera aceptable; la palabra cambio no tiene cabida en su vocabulario.

Conclusiones y retos futuros:

Aunque la dificultad conceptual de la modelización y el bajo nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes sea una realidad; la sencillez de la enseñanza de técnicas frente a la dificultad de enseñar a resolver problemas acaba imponiéndose; y el profesor sienta miedo a la pérdida de “las matemáticas de verdad” en favor de unas “matemáticas aplicadas”; sean, entre otros, motivos reales, finalmente, acaban sirviendo a los profesores para justificar la persistencia de los métodos, a menudo, tan poco eficaces en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos de nivel superior. Los resultados de esta investigación permite que confirmemos la hipótesis de partida que hablaba de la necesidad de ir más allá de las evidencias, que la experiencia personal y la práctica docente nos hacen percibir sin necesidad de grandes investigaciones, y reafirma esta línea de investigación que concede:

- Importancia a las creencias y concepciones de los profesores como punto clave de la mayoría de toma de decisiones como docente.
- Evidencia la necesidad de una detección previa de las creencias de los profesores, y del grado de coherencia y permeabilidad de ellas.
- Valor al análisis de las concepciones y creencias fuente de incoherencia, y de las que son poco consistentes como punto de partida de cualquier intervención que pretenda modificar, cambiar o simplemente mejorar la formación profesional del docente universitario.
- Interés a la necesidad de contar con instrumentos de detección de concepciones y creencias completos, eficaces y sencillos de utilizar que no supongan un esfuerzo extra por parte de los investigadores para investigar y desarrollar otros aspectos relacionados indirectamente con las creencias de los profesores.

El otro tema importante al que hicimos referencia al comienzo, es la desconexión entre la práctica de aula y los resultados de las investigaciones; lo que no debería ser así, y como apunta Ponte (2001), ignorar las contribuciones de las investigaciones didácticas sería dejar de lado un conjunto de poderosas perspectivas para la educación y un conjunto de conceptos básicos sobre los que intervenir y analizar en las situaciones prácticas. Igualmente, los procesos de desarrollo profesional tienen sus propios ritmos y dinámica, hecho que tampoco pueden olvidar los investigadores. El desarrollo profesional implica una madurez gradual de las potencialidades de cada profesor, la construcción de nuevo conocimiento, todo ello marcada por el contexto social y colectivo en el que se produce la actividad del profesor. Que la investigación y la práctica no establezcan puentes de unión, significaría malgastar un importante capital de experiencia e investigación, que el propio profesor puede utilizar

en beneficio del estudiante.

Por lo tanto, ¿por qué pensamos que, efectivamente, la investigación didáctica sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesor puede ser un dinamizador de los procesos de cambio? Porque nos permite tener un conocimiento muy vasto de las ideas más profundas del profesor, y hasta cierto punto intuir los compromisos que está dispuesto a asumir, el interés o no que para cada profesor pueda tener su desarrollo profesional y su disposición a crecer profesionalmente tanto en el terreno didáctico como en el conceptual. También, ese conocimiento de las creencias y concepciones del profesor informa sobre cómo conviven los aspectos didácticos y conceptuales en cada profesor: si se solapan total o parcialmente, si por el contrario son totalmente independientes, si para un profesor sólo existe el plano de los contenidos, etc. Porque podemos aprovechar la riqueza de las creencias de cada profesor para acercarnos más a su realidad y sus preocupaciones, y poder dar respuestas más ajustadas a sus necesidades. Porque la detección de “las dudas” y aspectos deficitarios, o simplemente menos desarrollados de su perfil profesional nos pueden permitir romper esa barrera que habitualmente existe entre el docente y el investigador, precisamente porque somos capaces de ofrecerle aquello que sin necesidad de demandarlo explícitamente, aparece como tal demanda implícita en lo más profundo de sus pensamientos. De esta forma, y por ejemplificar algo, si como en el caso del profesor A de nuestro estudio, parte de su demanda surgía de la falta de materiales adecuados para alumnos y profesores, un buen punto de partida puede ser presentarle diversos materiales desarrollados por investigadores para trabajar las nociones de cálculo, y trabajar conjuntamente en la utilización de éstos, la adaptación al contexto de enseñanza, a las necesidades de los estudiantes, etc.

En definitiva, el conocimiento con cierto detalle de esa parte oculta de los profesores puede permitirnos ir un paso por delante de ellos, y estar en una buena posición de trabajar con los profesores partiendo de sus necesidades, con la ventaja de poder acercarlos a la didáctica y aprovechar gran parte del conocimiento, que actualmente la didáctica puede ofrecer a los profesores universitarios sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo, en su beneficio y desarrollo profesional.

Asimismo, y parte de la clave del éxito en la intervención con el profesor es que, el investigador tiene que ser capaz de transmitir al profesor que sus métodos de enseñanza o las actividades propuestas en determinadas situaciones de enseñanza no son buenas o malas en sí mismas, sino más bien, es el propio contexto, los alumnos, etc., los que las hacen ser efectivas o no. En este sentido, pensamos que la mejor manera de concretar los resultados de esta investigación en la práctica sería la posibilidad de promover grupos de trabajo interdisciplinares, a varias bandas, que permitan poner sobre la mesa los problemas de los profesores, situaciones muy diversas de enseñanza, etc., sobre los que todos los miembros implicados puedan reflexionar, analizar, discutir y aportar puntos de vista, para así generar situaciones que provoquen esa “duda” a la que hicimos referencia anteriormente y que activa los procesos de cambio en los profesores, con los subsiguientes cambios y repercusiones en la enseñanza.

El momento actual de cambios que vive la Universidad debido al proceso de convergencia europea en el que estamos inmersos y la adaptación a los ECTS, está provocando la necesidad en muchos profesores de repensar su metodología de enseñanza, buscar alternativas que involucren más al alumno, etc. Es un buen momento para trabajar con los profesores e incidir en su desarrollo profesional y desarrollar vías de investigación como pueden ser los grupos interdisciplinares de trabajo, a los que hacía referencia en el apartado anterior que, además, favorezcan la reflexión, el aprendizaje, el desarrollo del conocimiento, la colaboración y las interacciones entre miembros de diferentes áreas de conocimiento, pero con intereses comunes.

Finalmente, para acabar con este apartado de conclusiones, nos gustaría recordar que se trata de una investigación abierta, muy novedosa y reciente en nuestra comunidad investigadora, por lo que debemos trabajar para profundizar en las múltiples cuestiones abiertas que aún quedan por responder, mejorar los métodos de investigación y de aproximación a las creencias y concepciones de los profesores universitarios, desarrollar e implementar propuestas concretas de formación en los niveles requeridos por los profesores, planteándonoslo como un trabajo en etapas, que no tiene por qué ser lineal y ni continuo en el tiempo, aunque sí profundo y duradero. Lo esencial es: primero sembrar la

semilla de la duda, después establecer puentes de conexión entre la matemática y la didáctica de la matemática, comenzar a trabajar al ritmo requerido, fijar metas a corto plazo, y objetivos muy concretos, claros y concisos, y esperar que los resultados obtenidos permitan mantener vivo el espíritu del crecimiento personal e intelectual.

Referencias bibliográficas

- Alibert, A.; Artigue, M. et al. (1989). *Différentielles et procédures différentielles au niveau du premier cycle universitaire*. Research Report. Ed. IREM, Paris VII.
- Artigue, M. (1989). *Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire*. Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, Edition IMAG.
- Artigue, M. (1991). Analysis. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 67-198.
- Artigue, M. (1992). Functions from algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. En Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.), *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy*. MMA 25.
- Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En Bieller, R. et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Press. 27-39.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. 97-140.
- Artigue, M. (2003). The teaching and learning of mathematics at university level. En D. Holton et al. (Eds.), *An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp. 207-220.
- Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.) (1992). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*. ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá.
- Artigue, M. y Rogalski, M. (1989). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG première année. En *Enseigner autrement en DEUG scientifique*, Publication Inter-IREM.
- Artigue, M.; Menigaux, J. y Viennot, L. (1990). Some aspects of student's conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of Physics*, Vol. 11, pp. 262-272.
- Asiala, M.; Brown, A.; De Vries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for the research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 1-32.
- Benedito, V.; Ferrer, V.; Ferreres, V. (1995). *La formación universitaria a debate*. Barcelona: Universitat de Barcelona.
- Cooney, T. (1998). Conceptualizing the professional development of teachers. *Proceedings of ICME-8*, Sevilla, pp. 108-124.
- Cooney, T. (2001). Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. En Lin, F.-L. y Cooney, T. (Eds.) *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, 9-31. 2001 Kluwer Academic Press, Netherlands.
- Dubinsky, E. y McDonald, M.A. (2003). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate

- Mathematics Education Research. En D. Holton et al. (Eds.), *An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp. 275-282.
- Gómez i Urgellés, J. (2000). *Per un nou ensenyament de les matemàtiques*. Barcelona: Ediciones CEAC.
- Guzmán, M. (1994). El ordenador en la educación matemática. *Vela Mayor, Revista de Anaya Educación*, 3, pp. 33-40.
- Guzmán, M. et al. (2000). *Curso: laboratorio de matemáticas*, Versión en la red: <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm>
- Harel, G. y Trgalová, J. (1996). Higher mathematics education. En Bishop, A.J. et al. (Eds.). *International handbook of mathematics education, Part Two*, pp. 675-700. Netherlands: Kluwer Academic Press.
- Hubbard, J. H. y West, B. (1990). *Ordinary differential equations* (with software for the Macintosh computer). New York: Springer-Verlag.
- Koçak, H. (1986). *Differential and difference equations through computer experiments*. New York: Springer-Verlag.
- Legrand, M. (1992). Débat Scientifique en Cours de Mathématiques. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*. ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 59-60.
- Llorens, J. L. (1995). *Complementos sobre la resolución de ecuaciones diferenciales*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.
- Lynn, A. (Ed.) (1993). *Calculus for a new century*. Mathematical Association of America, United States of America.
- Mack, J. (1992). Report from Australia and some neighbouring countries. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 101-113.
- Moreno, M. (2001). *El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos*. Tesis Doctoral. Bellaterra: UAB.
- Moreno, M. (2002). El Pensamiento del profesor. Evolución y estado actual de las investigaciones. En G.A. Perafán y A. Adúriz-Bravo (Eds.) *Pensamiento y Conocimiento de los Profesores. Debate y Perspectivas Internacionales*, pp. 61-78, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.
- Moreno, M. y Azcárate, C. (1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos. *Enseñanza de las Ciencias, Vol. 15 (1)*, pp. 21-34.
- Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 21(2)*, pp. 265-280.
- O'Shea, D. y Senechal, L. (1992). Student learning difficulties and calculus in context. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 53-55.
- Page, W.; Bushaw, D. et al. (Eds.) (1993). *Resources for calculus collection*. Mathematical Association of

- America, United States of America.
- Ponte, J. P. (2001). Investigating mathematics and learning to teach mathematics. En Lin, F.-L. y Cooney, T. (Eds.) *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, 53-72. 2001 Kluwer Academic Press, Netherlands.
- Rogalski, M. (1990). Quels étudiants, quels objectifs d'enseignement?. *En Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*. Principes et Réalisations, Brouchure de la Commission Inter-IREM Université, pp. 4-8.
- Rouche, N. (1992). Le projet AHA d'introduction à l'analyse élémentaire. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*. ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 61-62.
- Sánchez-Pérez, E.A; García Raffi, L. M. y Sánchez-Pérez, J.V. (1999). Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas. *Enseñanza de las Ciencias, Vol. 17 (1)*, pp. 119-129.
- Schwingendorf, K. (1992). Calculus reform in the U.S.A.: a closer look at the purdue project. . En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*. ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 96-100.
- Selden, J.; Mason, A. y Selden, A. (1994). Even good calculus students can't solve non-routine problems. En Kaput, J. y Dubinsky, E. (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning*. MAA 3, pp. 19-26.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata. Madrid.
- Tall, D. (1986a). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using computer graphics*. Ph. D. Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.
- Tall, D. (1986b). *Graphic calculus I, II, III* (BBB Compatible Software). Glentop Press, London.
- Tall, D. (1986c). Lies, damm lies and differential equations. *Mathematics Teaching, Vol. 114*, pp. 54-57.
- Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Press, Netherlands.
- Tall, D.; Blokland, P. y Kok, D. (1990). *A graphic approach to the calculus* (I.B.M. Compatible Software). Sunburst, Pleasantville NY.
- Tucker, T.W. (1991). *Priming the calculus pump: innovations and resources*. MMA 17.
- Yusof, M. y Tall, D. (1999). Changing attitudes to university mathematics through problem solving. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 37*, pp. 67-82.