

# Dificultades de comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios

Hugo Alvarado Martínez y Lidia Retamal Pérez

**Resumen.** En este trabajo presentamos un estudio de evaluación de la comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios de ingeniería. Un cuestionario en línea formado por diez ítems de opción múltiple y un problema abierto fue aplicado a un grupo de estudiantes de ingeniería después de haber estudiado las distribuciones muestrales. Los resultados indican que los estudiantes no comprenden el efecto de los parámetros sobre la precisión de aproximación y no son capaces de comparar probabilidades aproximadas y exactas para valores de una variable aleatoria con distribución binomial. Otras dificultades se presentan en las aplicaciones de la corrección por continuidad, determinar el tamaño de muestra y la distribución de la suma de variables aleatorias.

**Palabras clave:** Teorema central del límite, evaluación, plataforma virtual Moodle, estudiantes universitarios.

### **Difficulties in understanding the central limit theorem in university students**

**Abstract.** We present the results from a research directed to assess students' understanding of the central limit theorem in engineering undergraduate students. An online questionnaire composed by ten multiple choice items and an open problem was applied to a group of engineering students after they studied the sampling distributions. Results suggest that students do not understand the effect of the parameters on the accuracy of approximation and are not able to compare approximate and exact probabilities for values of a random variable with binomial distribution. Other difficulties are related to applying of the correction for continuity, determining the sample size and the distribution of the sum of random variables.

**Keywords:** central limit theorem, assessment, Moodle virtual platform, university students.

**Fecha de recepción:** 8 de marzo de 2012. **Fecha de aceptación:** 15 de noviembre de 2012

## INTRODUCCIÓN

El teorema central del límite, uno de los fundamentales en estadística, estudia el comportamiento de la suma de un gran número de variables aleatorias, asegurando su convergencia hacia una distribución normal en condiciones muy generales. En inferencia estadística muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación. El teorema se relaciona con otros conceptos y procedimientos (población y muestra, experimento estadístico de muestreo, error de aproximación, determinar tamaños de muestra, uso de tablas estadísticas, etc.), sobre los cuales la literatura describe errores frecuentes de comprensión. Por ejemplo, hay confusión entre los conceptos de estadístico y parámetro en los trabajos de simulación de las distribuciones muestrales (Garfield, delMas y Chance, 2004), en los contrastes de hipótesis (Batanero, 2000), en la distribución normal (Tauber, 2001), intervalos de confianza (Olivo y Batanero, 2007).

Un caso particular de lo que hoy es el teorema central del límite es la aproximación de la distribución binomial a la normal (llamado Teorema de Laplace De-Moivre), pues se puede considerar la distribución binomial  $bin(n,p)$  como la suma de variables aleatorias Bernoulli independientes idénticamente distribuidas  $B(p)$ . Una dificultad es consensuar cuándo  $n$  es suficientemente grande, puesto que la precisión de la aproximación para un  $n$  particular depende de la forma de la distribución original y la sensibilidad del parámetro  $p$  (Alvarado y Batanero, 2007).

Respecto a las Escuelas de ingeniería, existe un gran interés por estructurar sus carreras enfocadas al desarrollo de competencias (Letelier, López, Carrasco y Pérez, 2005) y definir estándares para el currículum de pregrado, siendo uno de ellos los resultados de aprendizaje (ver <http://www.cdio.org>). Específicamente, consideramos este teorema importante en el trabajo del ingeniero, ya que proporciona herramientas metodológicas para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Este trabajo se interesa por analizar la comprensión teórica y práctica del teorema central del límite en estudiantes universitarios, al finalizar una experiencia de enseñanza basada en la simulación. Se ha preparado un cuestionario comprensivo de evaluación de las dificultades de comprensión del teorema central del límite, incluidas las diferentes entidades primarias que lo conforman de

acuerdo con el marco teórico. Se analizan las preguntas *a priori* del cuestionario considerando las investigaciones relacionadas con el tema.

En nuestra investigación hemos intentado completar los estudios sobre el teorema central del límite (Alvarado y Batanero, 2007), y de su relación con la simulación computacional de las distribuciones muestrales (delMas Garfield y Chance, 2004; Inzunza, 2006; Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007).

## **INVESTIGACIONES SOBRE COMPRESIÓN DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE**

Las investigaciones sobre el teorema central del límite son pocas en el contexto universitario; entre ellas destacamos la de Méndez (1991) que identifica cuatro propiedades básicas que deben entenderse para poder lograr una comprensión sólida del teorema: a) la media de la distribución del promedio muestral es igual a la media de la población, cuando el tamaño de la muestra tiende al infinito; b) la varianza de la distribución de la media muestral es menor que la varianza de la población; c) la forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada en la medida que se incrementa el tamaño muestral, y aproximadamente normal, de manera independiente de la forma de la distribución en la población; d) La forma de la distribución muestral crece en altura y decrece en dispersión en la medida que el tamaño muestral crece.

Estas propiedades han sido estudiadas en trabajos recientes de Alvarado (2007) sobre los significados y comprensión del teorema central del límite. En particular, evaluó la comprensión intuitiva del teorema de Laplace De Moivre, asociada a la tercera y cuarta propiedad, y sobre las tres componentes que deben considerarse para una buena aproximación, cualquiera sea la distribución de origen relacionada con la propiedad b). En general, obtuvo mejores resultados, indicando que los estudiantes muestran mejor dominio de vocabulario técnico, y reconocimiento de que la rapidez de convergencia del teorema depende de la distribución de la suma de variables aleatorias, de los valores de los parámetros, y del tamaño de la muestra. En consecuencia, diferencia los siguientes niveles de configuraciones cognitivas: 1) alumnos que consideran el problema de aproximación de la distribución binomial a la normal y de la convergencia de la media muestral como casos particulares del teorema central del límite, e identifican los diferentes enunciados del teorema y condiciones de convergencia, 2) alumnos que no incluyen en el teorema los anteriores campos de problemas, aunque identifican sus diferentes enunciados y las condiciones

de convergencia que se diferencian entre sí por errores en algunos conceptos relacionados, y en la correcta /incorrecta tipificación; es decir, en algunos errores procedimentales, 3) alumnos que, aunque incluyen el caso de la aproximación de la distribución binomial a la normal como un caso particular del teorema, no comprenden las condiciones de la convergencia y confunden los diferentes enunciados.

En general, las investigaciones destacan la falta de comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral y confusión entre la media de la población (parámetro) y la media muestral. Estas mismas dificultades son observadas por delMas, Garfield, y Chance (2004) tras una enseñanza basada en la simulación, utilizando un programa de elaboración propia. Los autores sugieren que la tecnología, por sí sola, no es suficiente para la comprensión, sino que las actividades y la enseñanza de tipo constructivista tienen un papel importante. Otros trabajos recientes relacionados con las distribuciones muestrales son el de Inzunza (2006), que analiza el significado de las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional. Concluye que, a pesar de que el *software Fathom* permite evaluar procesos en la manipulación de parámetros y datos en distintas distribuciones de probabilidades, los estudiantes cometen errores frecuentes en el uso de representaciones numéricas, tienen un manejo superficial de los conceptos y propiedades de las distribuciones muestrales y presentan pocos elementos argumentativos.

Si bien la tecnología se considera un recurso didáctico en la resolución de problemas con distribuciones exactas y aproximadas, son escasas las investigaciones que evalúan la efectividad de la simulación en procesos de aprendizaje del teorema central del límite. Nuestro trabajo intenta contribuir en la solución de este problema, y es una continuación de otros experimentos de enseñanza de las distribuciones muestrales para ingenieros (Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007).

### MARCO TEÓRICO

Al hacer matemáticas emergen objetos matemáticos que son representados en forma escrita, oral, gráfica o incluso por gestos. Se incluye en la idea de objetos personales las concepciones, esquemas, representaciones internas, etc. La actividad matemática queda modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. Font, Godino y D'Amore (2007) señalan que de estas prácticas emergen diferentes tipos de objetos matemáticos primarios, que se denominan "elementos del significado" y corresponden a: situaciones y proble-

mas que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas asociado al objeto, en nuestro caso, el teorema central del límite; procedimientos y operaciones que se realizan en distintos tipos de prácticas que pueden llegar a convertirse en objeto de enseñanza; representaciones materiales utilizadas en la actividad de resolución de problemas (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos); definiciones y propiedades características del objeto y sus relaciones con otros conceptos y proposiciones; demostraciones que empleamos para probar sus propiedades y que llegan a formar parte de su significado. Además, establecen que si las interpretaciones realizadas por los alumnos no son las esperadas por el profesor, se produce un conflicto semiótico, entendido como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (profesor y alumno).

Los elementos de significado están relacionados entre sí, formando configuraciones que Godino, Contreras y Font (2006) definen como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Según los autores, una institución (en este caso la universitaria, donde se recogió la información) dirá que un sujeto “comprende” el significado de un objeto, si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas que configuran el significado del objeto institucional, además de fundamentarlas y de reflexionar sobre el proceso seguido.

En este trabajo, el objeto teorema central del límite surge al estimar la distribución muestral del promedio de la muestra, dar solución a la aproximación en distribución y su relación con la inferencia estadística. Además, se implementan las configuraciones *computacionales* que acrecientan el lenguaje, sobre todo en la variedad de representaciones gráficas dinámicas, se incorpora como procedimiento la simulación y el argumento preferible es inductivo, y *algebraicas* que se caracterizan por el lenguaje simbólico, el procedimiento analítico y la demostración deductiva.

## METODOLOGÍA DE TRABAJO

### MUESTRA Y CONTEXTO EDUCATIVO

La experiencia de enseñanza del teorema central del límite, inserto en la unidad de las distribuciones muestrales, se desarrolló en la asignatura de Estadística de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, con inscripción inicial de 114 estudiantes de ingeniería, y dividido en dos secciones de 62 y 52 alumnos. El tiempo dedicado en el aula al estudio de la unidad fueron tres semanas (12

módulos de 60 minutos); hubo sesiones con uso de pizarra y cañón de multimedia, y dos de laboratorio trabajando con *Excel* y *Applets* de la distribución binomial y de *Poisson*. El material escrito estaba disponible en la plataforma *Moodle* del curso. También, de acuerdo con el tiempo disponible y los conocimientos previos, se han tenido en cuenta las habilidades de los estudiantes para realizar experimentos de variación de parámetros de las distribuciones de probabilidades por medio de recursos informáticos, y las de comunicar con claridad sus resultados provenientes del análisis estadístico.

La implementación del teorema central del límite considera un acercamiento global acerca del teorema, siguiendo el análisis de contenido en una muestra de 16 libros de estadística dirigidos a la enseñanza en ingeniería (Alvarado y Batanero, 2008). De este estudio se seleccionaron los problemas más adecuados para este nivel educativo, así como las propiedades, representaciones y procedimientos, que fueron la base del cuestionario (ver Anexo 1).

### INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

Para recoger los datos se diseñó un cuestionario en línea utilizando la plataforma *Moodle*. La prueba consta de diez ítems, con tiempo controlado por el ordenador de 50 minutos para las respuestas. El estudiante, al momento de responder, debe ingresar con una clave dada por el profesor al inicio de la actividad, y los ítems son asignados a cada alumno en orden aleatorio, al igual que las alternativas. La novedad de esta evaluación fue incorporar en cuatro ítems un enlace web con micro programas escritos en Java, de las distribuciones de probabilidades binomial y de *Poisson*, como una herramienta de cálculo y alcance dinámico de manipulación (ver ejemplo en Figura 1).

El ítem 1 estudia la bondad de aproximación en diferentes valores del rango de la variable. La respuesta correcta sería la (d): mejor aproximación en valores cercanos al valor esperado de la distribución. Los distractores implican esperar mayor exactitud de la convergencia en valores alejados de los centrales.

El ítem 2, valora las condiciones que aseguran la rapidez de la convergencia, que son el aumento del tamaño muestral, forma distribucional de la población y valores de sus parámetros. Por ejemplo, la distribución uniforme discreta converge muy rápidamente y también la distribución *Poisson* se aproxima a la distribución normal a partir del valor de  $\mu > 5$ . Por lo tanto, la opción d) es la correcta.

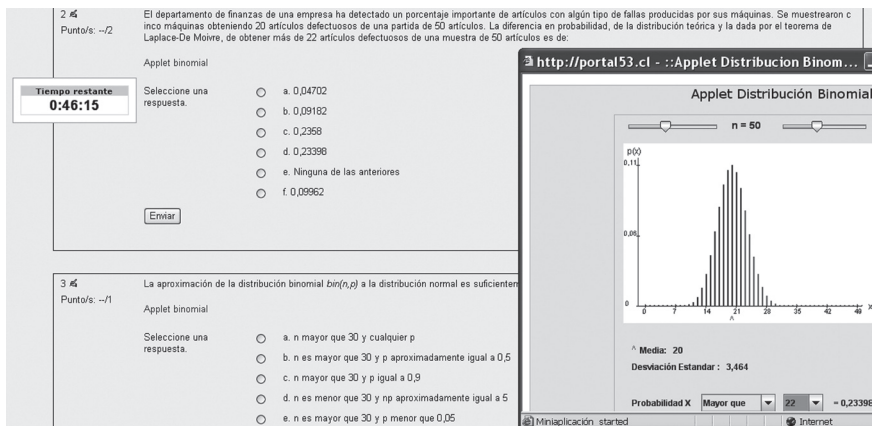


Figura 1. Dos ítems del cuestionario sobre el teorema central del límite

El ítem 3 evalúa la importancia de la forma o distribución de la población original para una buena aproximación, cuando la muestra no sea grande. La convergencia rápida se establece en distribuciones de probabilidades simétricas y en la distribución uniforme, ya sea discreta o continua; es decir, la opción correcta es la (b).

El ítem 4 se refiere a los supuestos y propiedades del teorema central del límite. La respuesta correcta corresponde a una de las aplicaciones del teorema, apartado (d): El teorema surge de situaciones de estimación de la media y otros parámetros de poblaciones no normales, por intervalos de confianza en muestras grandes. Los distractores están asociados a la validez del teorema para muestras grandes, en relación con la desviación estándar de la media muestral (a), a la forma de la población (b), y diferenciar los valores esperados (c), mientras que la varianza (e) para la media muestral y suma de variables aleatorias.

El ítem 5 evalúa la adecuada estandarización de la distribución normal (c y d) y la simetría de la distribución normal (a y b). La opción e) es la incorrecta ya que el valor de la probabilidad es 0.5.

El ítem 6 es una variante del problema de Kahneman, Slovic y Tversky (1982) sobre heurística de la representatividad, donde los sujetos no tienen en cuenta el tamaño muestral al analizar la convergencia de la frecuencia a la probabilidad. Lo correcto es considerar más probable el caso de muestra más pequeña como la de  $n = 15$ . Para hallar esta solución en forma algebraica, se debe

estandarizar la suma de variables aleatorias Bernoulli y utilizar la corrección por continuidad.

El ítem 7, evalúa el reconocimiento de las condiciones que han de cumplir  $n$  y  $p$  para que la aproximación de la distribución binomial a la normal sea suficientemente precisa. El alumno debe razonar acerca de la convergencia como caso especial de un resultado general utilizando el *Applet* de la aproximación binomial. La respuesta correcta sería la alternativa (c), ya que la forma de la distribución es simétrica y cumple las condiciones de muestras de tamaño mayor a 30 y ser tanto  $np$  como  $nq$  mayores a 5 (Walpole, Myers y Myers, 1999).

El ítem 8 se refiere a resolver situaciones de la ingeniería mediante el teorema de Laplace DeMoivre. Los alumnos se apoyan con el *Applet* de la distribución binomial, determinando los parámetros y calculando acertadamente la probabilidad aproximada con la corrección por continuidad (c). En las alternativas a) y b) no utilizan la corrección por continuidad y calculan la probabilidad mayor que 30. Las opciones (e y d) consideran los complementos de las probabilidades (a y c).

También el ítem 9 utiliza la aproximación binomial por la normal y se determina el margen de error de precisión dada correctamente en (e), entre la distribución teórica y la obtenida por el teorema de Laplace De-Moivre. Los distractores son el recorrido de la variable binomial (a), no reconocer el teorema (c) y errores de corrección por continuidad (b y d).

El ítem 10 es un caso particular del teorema central del límite, de la aproximación de la distribución *Poisson* por la distribución normal y uso adecuado de la corrección por continuidad (a). La alternativa (b) corresponde al cálculo de probabilidad exacta, la opción (d) presenta un distractor del recorrido de la variable, al igual que la (c), pero sin aplicar la corrección por continuidad.

### RESULTADOS EN ÍTEMS DE OPCIONES MÚLTIPLES

Una vez concluida la lección de las distribuciones muestrales, se aplicó el cuestionario de 10 ítems durante una sesión en el laboratorio de computación, con asistencia de 104 alumnos. Se presenta en cada ítem del cuestionario (Anexo 1) la frecuencia de respuestas de los estudiantes, y el porcentaje de aciertos se obtiene con respecto al total de alumnos, aunque no todos contestaron algunos ítems.

La plataforma virtual EV@, en la sección de resultados del cuestionario, proporciona un resumen cuantitativo de frecuencia de aciertos en los ítems (Tabla 1). El



índice de dificultad (ID) de un ítem es la proporción de sujetos que lo aciertan entre aquellos que han intentado resolverlo. Cuanto mayor es el ID, el ítem es más fácil para los alumnos y ha sido adquirido por una mayor proporción de los mismos. El índice de discriminación es la diferencia en proporción de aciertos entre el grupo que tiene puntuación superior e inferior en el total del cuestionario.

Tabla 1. Índice de dificultad y de discriminación

<i>Ítem</i>	<i>ID (%)</i>	<i>Índice de discriminación</i>
1	77	0.37
2	31	0.71
3	63	0.45
4	52	0.56
5	80	0.34
6	28	0.50
7	73	0.34
8	30	0.61
9	15	0.96
10	36	0.77

Del análisis de los ítems de opciones múltiples podemos señalar que hubo gran variabilidad de dificultad en cada uno; los aciertos fluctuaron de 15% (ítem 9) a 80% (ítem 5). Todos los ítems resultaron discriminativos (índice mayor que +0.3). Los ítems que, en general, fueron bien respondidos por los estudiantes son los 5, 1 y 7, que califican los siguientes aspectos: a) aplicar la estandarización de la distribución normal, b) aproximar una distribución discreta para diferentes posiciones del rango de la variable, y c) bondad de ajuste de la distribución binomial por la normal.

Los errores se deben a la precisión de los cálculos, a utilizar equivocadamente la propiedad de corrección de continuidad o de estandarización. Los más difíciles fueron los ítems 9, 2, 8 y 10, referidos a las aplicaciones del teorema central del límite con los *Applet* de la distribución binomial (ítems 9 y 8) y la distribución *Poisson* (ítem 10), además de la parte conceptual de convergencia rápida (ítem 2).

A continuación, se describe la apropiación de las propiedades más importantes del teorema central del límite y los procedimientos con uso de recursos informáticos, de más fácil a más difícil.

### *Comprensión de procedimientos y propiedades de tipo conceptual*

- Los resultados de los ítems 1 al 6 indican que las siguientes propiedades resultaron sencillas a los estudiantes: 80% reconoce las propiedades de la distribución normal y su correcta estandarización (ítem 5e); la aproximación mejora en los valores centrales de la distribución (ítem 1d); condición de rapidez de convergencia (ítem 3b); circunstancias de aplicación del teorema central del límite (ítem 4d). En el ítem 1d se obtuvieron mejores resultados, en 11%, que los obtenidos en Alvarado y Batanero (2007).
- En cuanto a las fallas más frecuentes: 16% tiene errores de estandarización (ítem 5c y d); 16% espera mejor exactitud en la convergencia en valores alejados de los centrales (ítem 1); 31% reconoce la importancia de rapidez de convergencia del tamaño de la muestra, sensibilidad de los parámetros y de la distribución que se modela, en particular de uniforme continua (ítem 2); 34% no considera la distribución de probabilidad en la aproximación de la suma pequeña de variables aleatorias (ítem 3); 9% confunde esperanza y varianzas teóricas con esperanza y varianzas experimentales respectivas (ítem 4c y e); 30% asocia la aplicación del teorema central del límite con la forma de la distribución poblacional (ítem 4b), y solo 10% considera que crece la desviación estándar de la media muestral cuando aumenta la muestra; en Retamal, Alvarado y Rebolledo (2007) se obtuvo 40% de error. En el ítem 6, 28% consideró más probable el caso de muestra más pequeña; es decir, se presenta en 60% la heurística de la representatividad, sin diferenciar el tamaño de la muestra en el cálculo de probabilidad. Comparando con los resultados de Alvarado y Batanero (2007) hubo una mejora en considerar, además del tamaño de la muestra, los valores de los parámetros de una distribución (ítem 2c) en la rapidez de aproximación de la distribución normal.

### *Comprensión de propiedades y procedimientos con applets*

- Los resultados de los ítem 7 al 10 nos muestran que las propiedades asimiladas fueron: 73% reconoce condiciones de la precisión de aproximación (ítem 7c); obteniendo mejores resultados de Alvarado y Batanero (2007); 30% realiza correctamente el cálculo aproximado con la corrección de continuidad (ítem 8c); solo 15% calculó el error de aproximar

la distribución binomial por la normal (ítem 9d) y 36% aplicó la aproximación de la normal a la *Poisson* calculando correctamente el recorrido de la variable aleatoria, el parámetro del modelo, la estandarización y la corrección de continuidad (ítem 10a).

- Las dificultades encontradas fueron: 14% atribuye el teorema de Laplace De-Moivre solo al parámetro  $n$  (ítem 7d); 13% no utiliza corrección de continuidad (ítem 8a y b); 27% no reconoce el teorema de Laplace De Moivre (ítem 9c); 11% presenta errores de corrección de continuidad (ítem 9b y d) y 26% sobre el recorrido de la variable binomial (ítem 9a); 33% no utiliza la propiedad de aproximación de una distribución discreta por una continua (ítem 10b).

## RESULTADOS EN UN PROBLEMA ABIERTO

Como parte de la prueba final del semestre académico, se propuso a 114 estudiantes un problema abierto a fin de examinar las estrategias de resolución y argumentación del teorema central del límite, para el caso de la aproximación de la distribución binomial por la normal, así como valorar la probabilidad de pensamiento de más alto nivel (Gal, 1997). Las respuestas se indican en la Tabla 2.

Problema 1. Un gerente de crédito ha descubierto que 28 de los 80 usuarios de tarjeta no paga el monto completo de la deuda durante un mes dado.

- a) Determine la probabilidad aproximada de que, al seleccionar 30 cuentas de manera aleatoria, se obtengan entre 6 y 14 cuentas no pagadas. Comente sobre el cálculo de probabilidad obtenida.
- b) Compare con el valor exacto de la probabilidad anterior, determinada mediante la probabilidad binomial, que es 0.9115.
- c) Calcule la probabilidad aproximada de obtener, en una muestra aleatoria de 90 cuentas, al menos 40% de tarjetas no pagadas.
- d) Calcule el tamaño de muestra necesario para que la estimación difiera de la verdadera probabilidad en menos de 4.5% con probabilidad al menos 0.96.

La solución correcta en el apartado a) sitúa que los estudiantes deben definir la variable aleatoria en estudio  $S_n = \sum X_j$ : el número de usuarios de tarjeta que no paga el monto completo de la cuenta en una muestra de 30 cuentas, e identificar la distribución de probabilidad (binomial), determinando los parámetros  $n=30$  y  $p=0.35$ : proporción de usuarios de tarjeta que no paga el

monto completo de la deuda. Debido a que la muestra es grande, y se cumplen los supuestos ( $n$  grande,  $np > 5$ ), se puede aproximar mediante una distribución normal de media  $np$  y varianza  $npq$ , es decir  $\sum X_i \approx N(np, npq) = N(10.5, 6.83)$ . Para calcular la probabilidad estimada hay que estandarizar y aplicar la corrección de continuidad, esto es:

$$P(5 \leq \sum X_i \leq 14) \approx P(5.5 \leq \sum X_i \leq 14.5) \approx P\left(\frac{5.5 - 10.5}{\sqrt{6.825}} \leq Z \leq \frac{14.5 - 10.5}{\sqrt{6.825}}\right) = P(Z > 1.53) - P(Z < -1.91) \approx 0.9089$$

Además, se espera que el estudiante considere la probabilidad alta, ya que la  $E(X) = 10.5$  se encuentra entre los valores 6 y 14.

En el apartado b) se pretende que el estudiante compare los valores del cálculo aproximado y exacto de las probabilidades de la suma de variables aleatorias  $S_n = \sum X_i$ ; justificando el teorema para valores grandes de los tamaños muestrales y la convergencia rápida de la aproximación para valores de  $p$  cercano a  $1/2$ .

En el apartado c), se espera que el estudiante reconozca el estimador de la proporción  $p$  como promedio muestral; obtener la distribución aproximada del estimador de la proporción  $\hat{p}$ ; justificar el teorema mediante la demostración algebraica de que la distribución aproximada es la normal; determinar la esperanza y varianza del estimador  $\hat{p}$ . Es decir, considerar la muestra de  $n_2 = 90$  cuentas de tarjetas no pagadas; aplicando el teorema central del límite, sustituir  $\sum_{i=1}^{90} X_i = S_2 \approx N(31.5, 20.475)$ . Estandarizar el estimador  $\hat{p}$  y calcular la probabilidad pedida.

El procedimiento de análisis pretendido por los estudiantes en la resolución es el siguiente:

$$P(S_2 \geq 36) \approx P(S_2 \geq 35.5) \approx P\left(Z \geq \frac{35.5 - 31.5}{\sqrt{20.475}}\right) \approx P(Z \geq 0.88) = 0.1894$$

Por último, en el apartado d) hay que expresar el error  $e = 0.045$  y el nivel de confianza de  $1 - \alpha = 0.96$ . Se pide estimar el tamaño muestral adecuado mediante la expresión:

$$P\left(|Z| < \frac{0.045}{\sqrt{0.35 \cdot 0.65/n}}\right) = 0.96 \Rightarrow 0.094346 \cdot \sqrt{n} = 2.05 \Rightarrow n = 473$$

Tabla 2. Resultado de cada apartado del problema ( $n = 114$ )

Apartado	Pasos correctos en la resolución del problema	n	%
<b>a</b>	Identificar la distribución de probabilidad binomial	72	63
	Cálculo correcto de la media y varianza de la normal aproximada	85	75
	Aproximar $S_n = \sum X_i$ a la distribución normal	85	75
	Estandarizar la v. a. $S_n = \sum X_i$ en una normal estándar	80	70
	Aplicar correctamente la corrección por continuidad	51	45
<b>b</b>	Comparar los valores aproximados y exacto de $S_n = \sum X_i$	73	64
	Justificar el TCL para valores grandes de n	42	37
	Justificar la convergencia del teorema para valores de p cercano a 1/2	4	4
<b>c</b>	Determinar la esperanza y varianza de $\hat{p}$	86	75
	Estandarizar el estimador $\hat{p}$	80	70
	Calcular probabilidades con calculadora	64	56
	Reconocer el estimador $\hat{p}$ como el promedio muestral	31	27
	Estimador de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal	23	20
	Demostración formal algebraica y/o deductiva	13	11
<b>d</b>	Reconocer y expresar el error en valores de 0 a 1	46	40
	Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria	16	14
	Identificar el valor de probabilidad	13	11

En la Tabla 2 se presentan los resultados de los porcentajes de aciertos respecto al total, siguiendo la secuencia de desarrollo, donde cada paso requiere del anterior. Se observa que 63% de los estudiantes identifica la distribución de probabilidad binomial y expresa la probabilidad a calcular en el apartado a), aunque se producen algunos errores en reconocer los valores de n y p. Debemos destacar que 75% de los estudiantes es capaz de aproximar la suma de v. a. que conduce a la distribución normal y realiza el cálculo correcto de la media y la varianza. Los principales errores se producen para el cálculo correcto de la probabilidad, porque los estudiantes olvidan realizar la corrección de continuidad. Además, solo 11 estudiantes (10%) realizaron comentarios sobre la probabilidad obtenida, de los cuales ocho consideran la probabilidad alta justificando que la  $E(x)=10.5$  se encuentra entre los valores 6 y 14. En resumen, en el apartado a) hubo 64 respuestas correctas de procedimientos, de las cuales 51 (45%) llegaron al cálculo de probabilidad aplicando bien la corrección por continuidad.

En el apartado b), 64% compara el valor aproximado y exacto de la probabilidad, indicando correctamente su buena aproximación, aunque solo 37% comenta que la excelente aproximación se debe al valor de la muestra (30), y tan solo 4% comenta la influencia del parámetro  $p$  cercano a  $\frac{1}{2}$ .

En el apartado c), 75% de los estudiantes determina bien la media y la varianza de la distribución muestral de la proporción, y 70% logra estandarizar de manera correcta, de los cuales 56% calcula la probabilidad pedida. De ellos, solo 20% hace referencia explícita a la distribución normal aproximada de la proporción, y 11% justifica explícitamente el uso del teorema central del límite. Además, solamente 27% de los estudiantes hace referencia a la proporción como promedio.

Los resultados del apartado d) indican que debemos dedicar más tiempo a las situaciones de obtener tamaños de muestras adecuados. De los participantes, 40% representa el error en valores de 0 a 1, 14% ha logrado calcular el tamaño de la muestra y 11% identifica el valor de  $p$ . La Tabla 3 muestra un resumen de los aciertos en los apartados.

Tabla 3. Resultados correctos en cada apartado del problema

	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentajes (n = 114)</i>
Parte a)	51	45
Parte b)	73	64
Parte c)	64	56
Parte d)	16	14

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestros resultados indican que los estudiantes logran familiarizarse con los recursos informáticos presentados, y que incluso son capaces de simular experimentos y de utilizar más propiedades y procedimientos de manera correcta en las actividades de tipo conceptual. Cabe destacar que, a pesar del tiempo limitado, se observa una alta implicación de los alumnos en las distintas actividades efectuadas, pese a sus características de ingreso a la universidad, con competencias matemáticas débiles que, en alguna medida, inciden en las tasas de reprobación y desmotivación de los alumnos.

En relación con la comprensión de propiedades, 50% de los participantes comprenden el efecto de los parámetros sobre la precisión de aproximación, forma de

la distribución, sensibilidad de los parámetros y variabilidad para distintos tamaños muestrales. Hay que reforzar la aplicación de la corrección por continuidad.

Respecto a la comprensión de procedimientos, son capaces de comparar probabilidades aproximadas y exactas para valores de la variable aleatoria, y se presenta una mejor comprensión en el estudio de la aproximación a la distribución binomial. Sin embargo hay errores, especialmente en el cálculo de la probabilidad aproximada, que llevan a una solución incorrecta.

Los resultados muestran variabilidad en las respuestas, poniendo de manifiesto que los ítems de tipo conceptual son los más alcanzados por la mayoría de los alumnos participantes, tales como la estandarización de la suma de variables Bernoulli (ítem 5) y la bondad de aproximación en diferentes intervalos (ítem 1). No obstante, hubo solo 31% de alumnos que han asimilado que la convergencia depende tanto del tamaño muestral, como de la distribución y de sus parámetros (ítem 2). Se observó que la heurística de la representatividad no mejoró en estos estudiantes respecto de lo descrito en Kahneman, Slovic y Tversky (1982). Sin embargo, hubo un aumento leve de 18% con los resultados de Alvarado y Batanero (2007).

Las aplicaciones del teorema central del límite con apoyo informático presentaron una serie de dificultades, para el caso particular del teorema de Laplace De-Moivre (ítem 9), debido, principalmente, a que no aplicaron la propiedad de corrección por continuidad, aunque mejoraron en el problema abierto. También resultó difícil el cálculo algebraico de la aproximación de la binomial por la normal (ítem 8) y la aproximación a la distribución Poisson (ítem 10). Sin embargo, se obtuvo 73% de aciertos en reconocer las condiciones de la aproximación a la binomial (ítem 7). Cabe señalar que, en los textos consultados por los estudiantes, no todos concuerdan con la regla práctica respecto al valor de  $n$ . Montgomery y Runger (1996: 303) señalan "Si  $n > 30$ , se puede usar el teorema central del límite", lo que puede conducir a que los estudiantes utilicen el teorema sin considerar la naturaleza de las variables, su distribución y pensar que siempre bastaría una pequeña muestra de 30 observaciones. No obstante, Walpole, Myers y Myers, (1999: 217) indican, para el caso particular, que "la aproximación normal a la distribución binomial será buena si  $np$  y  $n(1-p)$  son mayores o iguales a 5", y para Devore (2001: 232) que "En la práctica, la aproximación es adecuada siempre que  $np \geq 10$  y  $nq \geq 10$ ". Estas dos afirmaciones, aunque no concuerdan en la cota inferior, apuntan a que el tamaño muestral necesario para una buena aproximación depende del valor de  $p$ . Por lo tanto, es conveniente explorar las representaciones gráficas a partir de la simulación,

entendida como experimento estadístico de muestreo, y conducir a los estudiantes a verificar la calidad de convergencia en distribución por medio del estudio de la sensibilidad de los parámetros.

El trabajo proporciona información sobre las dificultades observadas en un grupo de estudiantes de ingeniería en el teorema, lo que nos ayudará a mejorar la enseñanza y a establecer un modelo de actuación docente adecuado. Se considera un avance poner de manifiesto alternativas de evaluación. Por un lado, al replicar los ítems 1, 6 y 7 (Alvarado y Batanero, 2007) en nuestro cuestionario con uso de informática, hemos tenido mejores resultados acerca de la bondad de la aproximación según el intervalo de probabilidad (11%) y para la aproximación de la distribución binomial (13%). Además, contar con la posibilidad de utilizar un medio informático mediante el que los alumnos puedan simular diferentes fenómenos estocásticos, ayuda a tener más seguridad y a reducir la ansiedad epistemológica (Wilensky, 1997). Se establecieron conexiones entre la obtención experimental del teorema e investigar el comportamiento asintótico de la distribución de estadísticos cuando cambian los parámetros; exploración de la variación de parámetros y experimentación; utilización de las propiedades de aproximación normal en distribuciones clásicas y efecto de los parámetros sobre la aproximación.

Sin embargo, como lo señala Inzunza (2006) en su experimentación del tema con un *software* específico, si bien los alumnos han presentado cierta evolución de los significados de las distribuciones muestrales, muchos no logran comprender adecuadamente el efecto del tamaño de muestra y el valor de las probabilidades. El uso de medios, como la plataforma virtual, aumenta las posibilidades de trabajo y amplía las representaciones conectando los modelos de probabilidad con la experimentación, aunque hay que tener presente el esfuerzo cognitivo de los estudiantes (delMas, Garfield y Chance, 2004).

### AGRADECIMIENTOS

Al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, mediante el Proyecto de Iniciación Fondecyt N° 11080071.

### DATOS DE LOS AUTORES

Hugo Alvarado Martínez y Lidia Retamal Pérez  
Departamento de Matemática y Física Aplicadas  
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile.  
alvaradomartinez@ucsc.cl; lretamal@ucsc.cl



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarado, H. (2007). Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería, Tesis doctoral, Universidad de Granada.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). "Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial". En *Números*, 67.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). "Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística". En *Estud. pedagóg.*, vol. 34 (2), pp. 7-28.
- Batanero, C. (2000). "Controversies around significance test". En *Journal of Mathematics thinking and Learning*, vol. 2, núms. 1-2, pp. 75-98.
- DelMas, R., Garfield, J., y Chance, B. (2004). "Using assessment to study the development of students' reasoning about sampling distributions", Trabajo presentado en el *American Educational Research Association. Annual Meeting*. California.
- Devore, J. (2001). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (5ª ed.). México, Thompson.
- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. En *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 2-7.
- Gal, I. (1997). "Assessing students' interpretations of data: Conceptual and pragmatic issues". En B. Phillips (Ed.), *Papers on Statistical Education presented at ICME-8* (pp. 49-58), Universidad Tecnológica de Swinburne.
- Garfield, J., delMas, R. y Chance, B. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds), *The Challenge of developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Netherlands. Kluwer Academic Publishers.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. En *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Inzunza, S. (2006). Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica, Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV).
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York. Cambridge University Press.
- Letelier, M., López, L., Carrasco, R. y Pérez, P. (2005). "Sistema de competencias

- sustentables para el desempeño profesional en ingeniería". En *Rev. Fac. Ing.* Vol. 13(2), 91-96.
- Méndez, H. (1991). Understanding the central limit theorem. Tesis Doctoral, Universidad de California. UMI 6369.
- Montgomery, D. y Runger, G. (1996). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería* (3<sup>a</sup> ed.). México. Mc Graw Hill.
- Olivo, E., Batanero, C. (2007). "Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios". En *Educación Matemática*, vol. 20, pp. 5-32.
- Retamal, L, Alvarado, H., y Rebolledo, R. (2007). "Understanding of sample distributions for a course on statistics for engineers". En *Ingeniare*, vol. 15, pp. 6-17.
- Tauber, L (2001). Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.
- Walpole, R, Myers, R, y Myers, S. (1999). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (6<sup>a</sup> ed.). México. Prentice Hall, Pearson.
- Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety. En *Educational Studies in Mathematics*, 33, 171-202.

## ANEXO 1. RESULTADOS EN LOS ÍTEMS PROPUESTOS A LOS ALUMNOS.

Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en los diez ítems (n = 104)

<i>Ítem 1. La aproximación normal mejora cuando el intervalo a calcular en probabilidad:</i>		
	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
a) Se acerca al extremo superior de valores de la distribución binomial	10	10
b) Se aparta del término central de valores de la distribución binomial	4	4
c) Se acerca al extremo inferior de valores de la distribución binomial	2	2
<b>d) Se acerca al término central de valores de la distribución binomial</b>	<b>80</b>	<b>77</b>
e) Ninguna de las anteriores	8	8

<i>Ítem 2. La rapidez con la que la suma de variables aleatorias se aproxima a la distribución normal depende: (¿Cuál de las afirmaciones es incorrecta?)</i>		
	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
a) De las distribuciones de las v.a. $X_i$	10	10
b) Del tamaño de la muestra n	15	14
c) De los valores de los parámetros	6	6
<b>d) Del estimador de la media poblacional</b>	<b>32</b>	<b>31</b>
e) Si la población de datos tiene distribución uniforme continua	41	39

<i>Ítem 3. La aproximación a la normal es buena para valores pequeños de n en variables aleatorias con distribución:</i>		
	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
a) Asimétrica	5	5
<b>b) Simétrica</b>	<b>66</b>	<b>63</b>
c) Poisson	20	19
d) Sesgada	4	4
e) Binomial	6	6

<i>Ítem 4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre distribuciones muestrales es CIERTA?</i>		
	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
a) La desviación estándar de la media muestral aumenta a medida que crece el tamaño de la muestra.	10	10
b) La media muestral tiene una distribución aproximadamente normal cuando n es suficientemente grande, dependiente de la forma que tenga la población.	31	30
c) El valor esperado de la distribución muestral de la suma de variables aleatorias es igual a la media de la población.	6	6

<b>Ítem 4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre distribuciones muestrales es CIERTA?</b>		
	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
<b>d) El teorema central del límite surge de situaciones de estimación de la media y otros parámetros de poblaciones no normales por intervalos de confianza en muestras grandes.</b>	54	52
e) La varianza de la suma de variables aleatorias independientes es igual a la varianza poblacional.	3	3

<b>Ítem 5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la distribución normal es incorrecta?</b>		
	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
a) Si una variable está distribuida normalmente, los casos extremos son poco frecuentes.	3	3
b) En la curva normal, la media es igual a la moda.	1	1
c) El número de artículos con fallas de una máquina tiene una distribución normal con media 6 y varianza 16. El valor estandarizado de 12 artículos con fallas es de 1.5.	9	9
d) El número de chips defectuosos de dispositivos semiconductores tiene una distribución normal de media 1 y desviación estándar 1. Si el valor estandarizado es 3, entonces el número de chips defectuosos es 4?	7	7
<b>e) El riesgo individual de reclamos de seguro automotriz de una empresa aseguradora en Chile tiene una distribución normal de media 3 y desviación estándar 0.255. La probabilidad de que reclamen a lo más 3 clientes es de 0.975.</b>	<b>83</b>	<b>80</b>

<b>Ítem 6. En una empresa de seguro de vida la probabilidad de que reclame un cliente es de 50% ¿Cuál de estos casos te parece más probable?</b>		
	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
<b>a) Que entre los próximos 15 clientes seleccionados 10 o más reclamen a la empresa.</b>	<b>29</b>	<b>28</b>
b) Que entre los próximos 150 estudiantes seleccionados 100 o más reclamen a la empresa.	13	13
c) Los dos casos anteriores son igual de probables.	62	60

<b>Ítem 7. La aproximación normal a la distribución binomial <math>\text{bin}(n,p)</math> es suficientemente buena cuando (Utilice el Applet de la distribución binomial):</b>		
	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
a) $n$ es menor que 30 y $np$ aproximadamente igual a 5	6	6
b) $n$ es mayor que 30 y $p$ menor que 0,05	2	2
<b>c) <math>n</math> es mayor que 30 y <math>p</math> aproximadamente igual a 0.5</b>	<b>76</b>	<b>73</b>
d) $n$ mayor que 30 y cualquier $p$	15	14
e) $n$ mayor que 30 y $p$ igual a 0,9	2	2

*Ítem 8. Un ingeniero ha comprobado que 40 de los 120 accidentes industriales en su planta en los últimos cinco años, se deben a que los empleados no siguen las instrucciones. La probabilidad aproximada de que de 84 nuevos posibles accidentes, a lo menos 30 se deban a negligencia de los empleados es de (Utilice el Applet de la distribución binomial):*

	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
a) 0.2981	6	6
b) 0.3707	7	7
<b>c) 0.3409</b>	<b>31</b>	<b>30</b>
d) 0.6591	4	4
e) 0.7019	1	1
f) Ninguna de las anteriores	47	45

*Ítem 9. El departamento de finanzas de una empresa ha detectado un porcentaje importante de artículos con algún tipo de fallas producidas por sus máquinas. Se muestrearon cinco máquinas obteniendo 20 artículos defectuosos de una partida de 50 artículos. La diferencia en probabilidad, de la distribución teórica y la dada por el teorema de Laplace-De Moivre, de obtener más de 22 artículos defectuosos de una muestra de 50 artículos es de (Utilice el applet de la distribución binomial):*

	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
a) 0.09182	27	26
b) 0.09962	5	5
c) 0.23398	28	27
d) 0.2358	6	6
<b>e) 0.04702</b>	<b>16</b>	<b>15</b>
f) Ninguna de las anteriores	17	16

*Ítem 10. Se supone que X, el número de accidentes por mes en un cruce de carreteras dado, tiene una distribución Poisson con  $\mu = 2$ . Si el número de accidentes durante seis meses es mayor a 10, se deberá reconstruir el cruce debido a un programa otorgado por el estado. La probabilidad aproximada de que el cruce en cuestión sea considerado en el programa de emergencia del estado es de (Utilice el applet de la distribución Poisson):*

	<i>Frecuencia</i>	<i>Porcentaje</i>
<b>a) 0.6664</b>	<b>37</b>	<b>36</b>
b) 0.65277	34	33
c) 0.71904	4	4
d) 0.7642	2	2
f) Ninguna de las anteriores	20	19