Impacto de los cursos universitarios en la formación de competencias algebraicas

Abraham Cuesta Borges, Juana Elisa Escalante Vega
y Marco Antonio Méndez Salazar

Resumen: Se analizan aquí las competencias y dificultades de estudiantes universitarios al resolver problemas de determinación de máximos o mínimos de funciones reales enunciados verbalmente o con contexto geométrico, a partir de las actuaciones observadas. La investigación fue motivada por la preocupación de conocer si los cursos de matemáticas en la universidad mejoran la competencia del estudiante para expresar en lenguaje algebraico las situaciones planteadas de forma verbal, lo cual es un prerrequisito para estar en posibilidad de aplicar técnicas de cálculo diferencial. Uno de los hallazgos más relevantes es que los estudiantes fracasan en la comprensión cualitativa del problema y en la transición, no solamente del lenguaje verbal al algebraico, sino también del pensamiento aritmético al algebraico.

Palabras clave: Competencias, dificultades, estudiantes universitarios, lenguaje algebraico, pensamiento algebraico.

Impact of university courses in algebraic skills training formation

Abstract: This article deals with the analysis of competences and difficulties of university students when solving problems of determination of maxima or minima of real-valued functions with a geometrical context or verbal statement. The research has been motivated by the concern about knowing if the university level mathematics courses improve the students' competence of translating verbally stated situations to algebraic language, which is a necessary requisite to apply methods from differential calculus. One relevant finding is the fact that students fail to understand the problem qualitatively; moreover, they fail to transit, not only from verbal to algebraic language, but also from arithmetical to algebraic thinking.

Key words: Competences, difficulties, university students, algebraic language, algebraic thinking.

Fecha de recepción: 12 de septiembre de 2012. Fecha de aceptación: 4 de enero de 2013.

INTRODUCCIÓN

Los programas de estudio de bachillerato de la Secretaría de Educación Pública (SEP) establecen que el estudiante, entre otros aspectos, debe adquirir las siguientes competencias curriculares: "1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales" (SEP, 2011: 10).

Sin embargo, el análisis de los resultados del examen de ingreso a la universidad hace patente que muchos estudiantes no poseen un nivel adecuado de conocimientos. Esta evaluación, realizada por el Centro Nacional para la Evaluación de la Educación Superior (CENEVAL), permite observar que la falta de competencias resulta más grave en las siguientes áreas: a) habilidad verbal, donde se evalúa la comprensión lectora, b) habilidad matemática, donde se evalúa la capacidad para plantear, en términos matemáticos, lo que se le solicita y para aplicar herramientas de aritmética y álgebra, y c) el área de matemáticas, donde se evalúa el conocimiento matemático propiamente dicho.

Investigaciones realizadas en estudiantes que inician la universidad (Cuesta, 2007; Cuesta, Deulofeu y Méndez, 2010) exhiben la existencia de dificultades derivadas del hecho de que el estudiante no ha desarrollado la capacidad de utilizar el concepto matemático de una manera adecuada en situaciones contextualizadas, aun cuando estas formen parte de sus experiencias personales y conocimientos anteriores. La incomprensión del concepto matemático (Ursini y Trigueros, 2006; Escalante y Cuesta, 2012) persiste desde la escuela secundaria hasta el inicio de la universidad. Los estudiantes siguen evitando cualquier acercamiento algebraico y retornan a procedimientos de carácter aritmético, en especial cuando el problema implica cierto nivel de razonamiento sobre las situaciones y los diferentes contextos en que se presenta la tarea.

Lo anterior pone de manifiesto la falta de competencia del estudiante egresado de bachillerato para expresar, en lenguaje algebraico, relaciones planteadas verbalmente o desde un entorno geométrico. Ahora bien, ¿mejora la competencia después de cursar matemática universitaria? Responder a esta interrogante requiere organizar, comparar y analizar información a partir de las actuaciones de diferentes grupos de estudiantes universitarios cuando se enfrentan a la tarea de responder a situaciones sencillas planteadas en diferentes contextos. Por ello, la presente investigación tuvo por objetivo caracterizar las actuaciones y reportar dificultades del estudiante cuando se enfrenta a la tarea de resolver problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal. En concreto, se derivan las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Existen diferencias en las actuaciones de los estudiantes que han transitado cursos universitarios de matemáticas en diferentes niveles?
- ¿Cómo influye el nivel de avance curricular del estudiante en las diferencias observables al abordar problemas con distintos contextos y grados de dificultad?

A partir de esta cuestión se examina la relación entre el problema propuesto (su contexto y grado de dificultad) y la actuación mostrada por los estudiantes de diferentes niveles de avance curricular.

- ¿Existen dificultades para responder de manera algebraica los problemas planteados?

Con esta pregunta se examina si el nivel académico formal y la experiencia previa del estudiante llegan a constituir un obstáculo para expresar algebraicamente los problemas propuestos.

Elementos Teóricos

Existen diversas investigaciones en matemática educativa que abordan el estudio de los problemas en el proceso de transición de la aritmética al álgebra, casi todas ellas orientadas a los niveles preuniversitarios. En efecto, muchos estudios (Kieran, 1981; Booth, 1984; Filloy y Rojano, 1985; Kieran y Filloy, 1989; Ursini, 1990; Radford, 1996) ponen de manifiesto que se recurre al uso de procedimientos aritméticos, en lugar de hacerlo al método algebraico. En ocasiones, la enseñanza privilegia la sintaxis algebraica con énfasis en aspectos manipulativos y numéricos y, consecuentemente, provoca tensiones entre los significados atribuidos a los conceptos algebraicos en vías de construcción y los provenientes de la aritmética (Filloy, 1991).

El trabajo parte de las ideas desarrolladas por Eugenio Filloy sobre el análisis y clasificación de actuaciones del modelo teórico local (MTL). Este constituye un marco teórico metodológico para la observación experimental, el cual explica y da respuesta sobre los procesos que se desarrollan en una situación dada, con contenidos matemáticos específicos y con alumnos concretos. Tiene carácter descriptivo, explicativo y predictivo, lo que no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse mediante otro modelo (Puig, 2006).

El MTL comprende cuatro componentes interrelacionadas: a) la componente de competencia, b) la componente de actuación, c) la componente de enseñanza, y d) la componente de comunicación (Filloy y Rojano, 1984; Filloy, 1999; Filloy, Puig y Rojano, 2008). La componente de actuación constituye un marco propicio para identificar, describir y categorizar las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas contextualizadas que involucran la relación entre variables (Fernández y Puig, 2002; Filloy *et al.*, 2008).

Nos referimos a las actuaciones en cuanto modos de hacer y conducirse; es decir, las acciones observables que realiza el estudiante cuando se enfrenta a las demandas que se le plantean en las tareas. Su análisis "contempla el dominio de conocimientos alcanzado, pero también estudia la riqueza de conexiones que se establecen entre los diversos conocimientos, que muestran su complejidad cuando se movilizan para dar respuesta a las demandas planteadas" (Rico y Lupiáñez, 2010: 17). Las actuaciones de los sujetos reales en un dominio concreto y circunstancias particulares pueden diferir de las que realiza el sujeto ideal (resolutor ideal). De este modo, las actuaciones (competentes o no) muestran las capacidades, los conocimientos alcanzados y, si las hay, las competencias desarrolladas. El término competencia, en cambio, se define como "la habilidad para satisfacer con éxito exigencias complejas en un contexto determinado, mediante la movilización de prerrequisitos psicosociales que incluyen aspectos tanto cognitivos como no cognitivos" (Rico y Lupiáñez, 2010: 22).

Así, la componente de actuación constituye el marco propicio para nuestros objetivos de investigación: identificar y categorizar las actuaciones de los estudiantes, cuando se enfrentan a tareas contextualizadas que involucran la relación entre variables. Precisamente, en Filloy y sus colaboradores (2008) se halla una exhaustiva explicación de todos los elementos e interrelaciones implicados en la competencia que posee el resolutor ideal en la solución de problemas de enunciado verbal. De acuerdo con el método cartesiano, el aspecto fundamental en la solución del problema es el paso del lenguaje natural a una expresión en el lenguaje del álgebra: una ecuación. Por tanto, en la resolución de dichos problemas se hallan implicadas tanto la competencia en ambos lenguajes, como la competencia en el proceso del paso de un texto escrito en lenguaje natural a un texto escrito en el lenguaje del álgebra.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

A fin de analizar la competencia algebraica, se describen las actuaciones del estudiante cuando se enfrenta a situaciones específicas en las que el aspecto crucial radica en la traducción del enunciado del problema a la expresión aritmética o algebraica (Puig y Cerdán, 1990). De este modo, identificar y categorizar las clases de actuaciones y competencias implica, en primer lugar, evaluar las habilidades del estudiante en la lectura e interpretación de enunciados (Arnau y Puig, 2005) para, posteriormente, analizar los procedimientos empleados en la solución, es decir, las conductas observadas en los resolutores reales (Puig, 2008).

SUJETOS DE LA EXPERIENCIA

Se tomó una muestra de 75 estudiantes de la licenciatura en economía, representativa de tres grupos con distintos niveles de avance curricular. Los grupos están diferenciados por el nivel de conocimiento impartido en clases sobre el concepto de valor extremo (máximo y mínimo) de una función y sobre el uso de derivadas para resolver problemas de optimización. Debido a la evidente necesidad de mantener la confidencialidad de los estudiantes, se les asigna un código de referencia (ver Tabla 1).

Tabla 1. Características generales de la muestra

Grupo de:	*Situación al momento de la prueba*	*Número de estudiantes*	*Códigos*
Cálculo I	Estudia cálculo de una variable real, pero no ha estudiado problemas de optimización.	25	$I_1 \ldots I_{25}$
Cálculo II	Recién estudió el concepto de máx. /mín. de funciones de una variable real y su resolución con derivadas. Actualmente estudia funciones de varias variables.	22	$II_{26} \ldots II_{47}$
Econometría	Hace un año estudió problemas de optimización, culminando con optimización restringida de funciones de varias variables por el método del multiplicador de Lagrange.	28	$E_{48} \ldots E_{75}$

El instrumento de evaluación

La prueba escrita aplicada durante la investigación consiste en cuatro problemas contextualizados de determinación de máximo o mínimo, que se caracterizan por la factibilidad de su respuesta, sin necesidad de aplicar los conocimientos de cálculo estudiados en la universidad. Sin embargo, el nivel de interpretación difiere y se incrementa en el orden en que se presentan los problemas.

Problema 1: Encuentra dos números positivos a y b cuya suma sea 30, pero cuya multiplicación sea la máxima posible.

- Para su solución se requiere un nivel muy elemental de interpretación; las cantidades variables que intervienen están explícitamente dadas y las relaciones entre ellas están descritas verbalmente, pero haciendo referencia directa a operaciones aritméticas.

Problema 3: Un rectángulo tiene perímetro fijo de 60 cm. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el área del rectángulo sea lo más grande posible?

- Requiere un nivel elemental de interpretación. Es necesario que el estudiante reconozca las cantidades que determinan el perímetro y el área de un rectángulo, así como la relación entre ellas. De hecho, una vez traducido este problema al lenguaje algebraico, será evidente que equivale al Problema 1.

Problema 4: Con la finalidad de motivar a los automovilistas para que contemplen los paisajes naturales de Veracruz, la Secretaría de Turismo del Gobierno del estado está planeando construir áreas de *camping* al lado de las carreteras. Cada una debe ser rectangular, con una superficie de 5 000 metros cuadrados (ver Figura 1). Por supuesto, el lado frontal adyacente a la carretera no debe estar cercado. ¿Cuál debe ser la longitud del lado frontal a fin de que la cantidad necesaria de malla para cercar sea mínima?

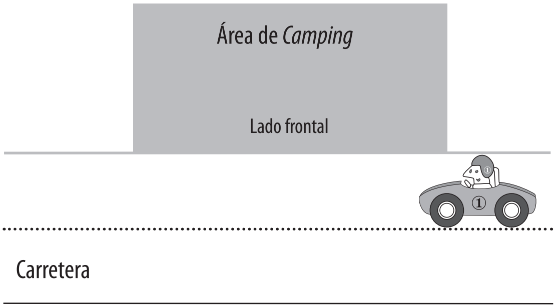

Figura 1

- Este problema incluye los requerimientos del Problema 3, pero las relaciones entre las cantidades involucradas son un poco más complicadas. Adicionalmente, en el enunciado del problema no se mencionan de forma explícita los conceptos geométricos de perímetro y área de un rectángulo, dejando al estudiante la tarea de descubrir la necesidad de utilizarlos después de una interpretación de la situación contextualizada descrita y de la figura auxiliar que se le proporciona.

Problema 2: Una huerta tiene actualmente 25 árboles que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuirá en 15 frutos. ¿Cuántos árboles adicionales deben plantarse para que la producción total de la huerta sea máxima? ¿Es realista tu respuesta? De no serlo, ¿qué decidirías si fueras el dueño de la huerta?

- Es el problema donde se requiere mayor esfuerzo de interpretación y análisis; no está referido a conceptos de la geometría elemental, ni hace referencia directa a operaciones aritméticas, además de que las relaciones entre las cantidades involucradas son más complicadas; sin embargo, está referido a situaciones típicas dentro del área profesional de los estudiantes de economía. Por tal motivo, en principio se espera que los estudiantes con mayor avance curricular (grupo de econometría) muestren mayor nivel de competencia, toda vez que poseen un acervo de conocimientos más amplio, y más experiencia dentro del contexto de sus estudios profesionales.

Se espera que, al abordar los problemas propuestos, el estudiante utilice cualquier procedimiento, desde resolver con operaciones aritméticas elementales o con procedimientos algebraicos, hasta utilizar los métodos de optimización estudiados en los cursos universitarios.

Experimento y procesamiento de datos

La prueba escrita se realizó durante dos horas dentro del horario de clases de cada grupo, bajo las siguientes orientaciones: a) utilizar cualquier procedimiento de solución, b) no borrar ninguna respuesta escrita, y c) que, en caso de no responder, se escriban las causas. Posteriormente, se realizó una revisión de las respuestas escritas, con la finalidad de clasificar y comparar las diferentes actuaciones y dificultades de los estudiantes de los tres grupos.

La revisión de las respuestas escritas permitió conocer las diferentes actuaciones (acciones observables) que realizan los estudiantes. Aunque las respuestas serán tratadas en el análisis de cada uno de los problemas propuestos, se clasifican en las siguientes categorías:

Aritmética: Se aborda el problema con procedimientos de tipo aritmético, experimentando con valores que satisfagan las condiciones establecidas, seguido de operaciones elementales que conducen o no a una solución correcta.

Algebraica: A partir del contexto verbalmente planteado o de la solución aritmética, se procura expresar una relación algebraica entre las cantidades desconocidas y las relaciones implicadas en el problema, a partir de la cual se podría llegar a una solución, correcta o incorrecta, por procedimientos de optimización que provienen del cálculo diferencial de una o dos variables.

Incomprensión: La actuación del estudiante manifiesta una total o parcial incomprensión del contexto del problema o de las condiciones y relaciones implicadas.

Cabe destacar que las categorías no son excluyentes; es decir, se encuentran casos de estudiantes que, aun desarrollando una actuación aritmética o álgebraica, manifiestan incomprensión del contexto del problema. También se presentan casos de estudiantes que desarrollan una actuación aritmética y, además, una actuación algebraica.

La entrevista

Se seleccionaron los estudiantes de cada grupo que habrían de participar en las entrevistas individuales. Las entrevistas se realizaron una semana después de la prueba escrita, en un ambiente de intercambio de ideas entre el estudiante y el entrevistador, para analizar las diferentes maneras de abordar los problemas propuestos. El instrumento consiste en un conjunto de preguntas de carácter no estructurado, que tienen por objetivo profundizar en el conocimiento que posee el estudiante sobre los problemas.

Con esta finalidad, se decide elegir, del conjunto de sujetos en estudio, una muestra de solo 16 estudiantes (ver Tabla 2), seleccionada bajo el criterio de que sus respuestas aporten nuevos elementos acerca de sus dificultades y modo de actuar. Las entrevistas fueron grabadas en audio con dos propósitos: en primer lugar, para obtener datos adicionales sobre la actuación utilizada (de acuerdo con la clasificación anterior); y más importante, para conducir al estudiante, en caso necesario, hacia el uso de expresiones algebraicas que le permitan llegar a la solución.

Tabla 2. Cantidad de estudiantes entrevistados por grupo

Grupo de:	*Número de estudiantes:*
Cálculo I	5
Cálculo II	5
Econometría	6
TOTAL	16

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A continuación se describen los principales resultados sobre las actuaciones y dificultades de los 75 estudiantes que participaron en la prueba, complementados con algunas observaciones resultantes de las entrevistas realizadas a 16 de ellos. Por cada problema se muestra una tabla con el porcentaje de aciertos y las actuaciones observadas, con independencia de que conduzcan o no a una respuesta correcta. Los problemas se analizan en orden creciente con respecto al nivel de interpretación requerido, según se estableció en la sección de aspectos metodológicos.

ANÁLISIS DE ACTUACIONES Y DIFICULTADES EN EL PROBLEMA 1

Se observa que, con aritmética elemental, un gran número de estudiantes determina que los números que permiten resolver el problema son $a = 15$ y $b = 15$; sin embargo, se presentan respuestas incorrectas (ver Tabla 3) debido a una interpretación inadecuada de la situación. En efecto, algunos estudiantes no aciertan dado que, en la frase "dos números positivos *a* y *b*", interpretan que ambos números deben ser diferentes y enteros concluyendo, en consecuencia, que $a = 16$ y $b = 14$ o viceversa.

Tabla 3. Porcentajes de aciertos y actuaciones en el Problema 1

Grupo	*Porcentaje de aciertos*	*Porcentaje de alumnos que exhiben la actuación*		
		Aritmética	*Algebraica*	*Incomprensión*
Cálculo I	96	100	0	4
Cálculo II	86.4	100	9	3.6
Econometría	89	100	10.7	11

La mayoría de los estudiantes de los tres grupos respondió de manera aritmética. Durante la entrevista se pregunta: "¿cómo llegas a la conclusión de que los números son $a = 15$ y $b = 15$?", y las respuestas son: "por tanteo", "comprobando con varios cálculos" o "realizando tabla de valores". Algunos estudiantes, después de mostrar una actuación aritmética, recurren a una algebraica. Un ejemplo es la actuación del estudiante II_{26}, quien culmina con una justificación analítica de la respuesta correcta.

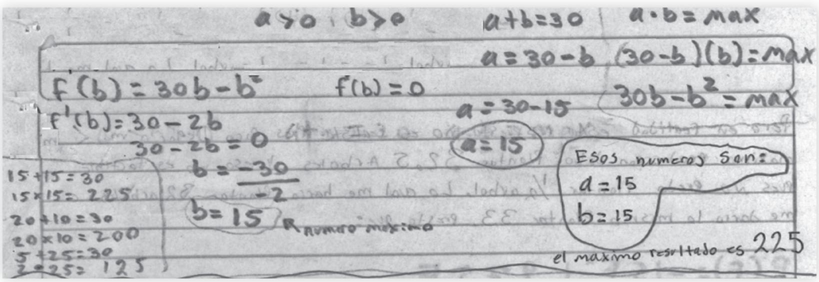

Figura 2. Respuesta del estudiante II_{26} al Problema 1

De los porcentajes de respuestas acertadas se puede inferir cierto grado de homogeneidad entre los tres grupos; sin embargo, los estudiantes de Cálculo I y II presentan porcentajes menores de incomprensión que los de econometría. Esto puede deberse a su cercanía temporal con los estudios preuniversitarios, en los que frecuentemente se abordan situaciones similares a la planteada con herramientas aritméticas elementales; mientras que algunos estudiantes de econometría intentan abordar el problema con procedimientos sofisticados adquiridos en sus estudios universitarios, como se muestra en la respuesta del estudiante E_{54}.

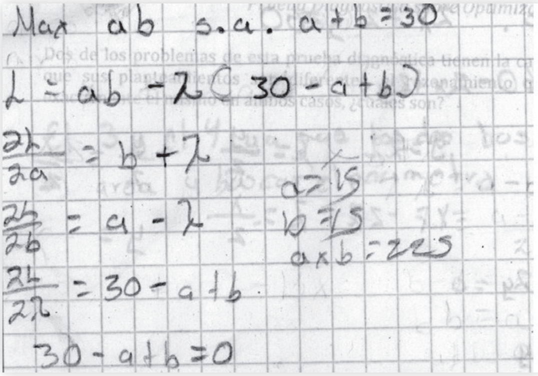

Figura 3. Respuesta del estudiante E_{54} al Problema 1

En el afán de detectar dificultades para responder algebraicamente, durante la entrevista se pregunta: "¿se puede demostrar matemáticamente que los números son a = 15 y b = 15?" o "¿se puede expresar o llegar a la solución de manera algebraica?" Muchos estudiantes, aun teniendo una solución aritmética correcta, no son capaces de transferir dicho conocimiento a una expresión de tipo algebraico. Resultó que, de los 16 entrevistados, solo un estudiante de econometría logra plantear el problema algebraicamente. El resto proporciona respuestas del tipo "no recuerdo", "no entiendo cómo", o "no sé plantearlo", las cuales evidencian la existencia de obstáculos para transferir el problema y su solución aritmética, al lenguaje algebraico. En síntesis, los estudiantes son incapaces de transferir el conocimiento aritmético que tienen acerca del problema a una expresión algebraica, aun cuando en el propio enunciado de este existen elementos discursivos que coadyuvan a la construcción algebraica.

Análisis de actuaciones y dificultades en el Problema 3

Un gran número de estudiantes no acierta a responder.

Tabla 4. **Porcentajes de aciertos y actuaciones en el Problema 3**

Grupo	*Porcentaje de aciertos*	*Porcentaje de alumnos que exhiben la actuación*		
		Aritmética	*Algebraica*	*Incomprensión*
Cálculo I	8	56	0	44
Cálculo II	4.5	54.5	4.5	41
Econometría	11	60.7	3.6	64.3

La primera causa de falencia es, precisamente, la incomprensión del contexto geométrico, de los conceptos involucrados (perímetro y área) o de la relación existente entre ambos. Tales rasgos de incomprensión se ejemplifican en la respuesta del estudiante I_{21}.

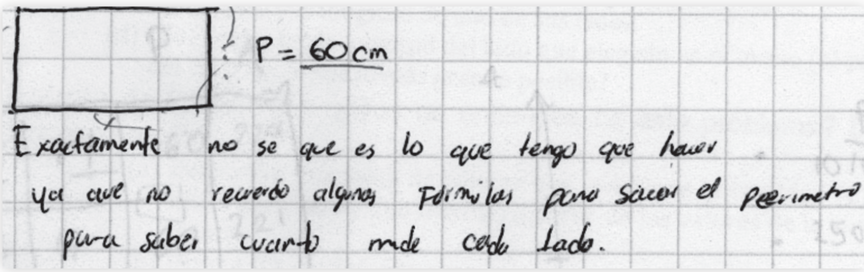

Figura 4. Respuesta del estudiante I_{21} al Problema 3

El mismo sujeto, en el siguiente fragmento de entrevista, muestra algún matiz de actuación algebraica, a pesar de la cual prevalece la incomprensión:

Profesor: ¿Qué no entiendes en este problema?

Estudiante I_{21}: Es que debo checar cuánto mide cada lado, para que el perímetro sea 60 y no recuerdo cómo hacer para sacar cada lado.

Profesor: Tu problema es que no sabes cómo separar 60 en cuatro valores; sin embargo, en el primer problema puedes separar 30 en dos valores. ¿No te parece que básicamente debes hacer como en el Problema 1?

Estudiante I_{21}: Sí.

PROFESOR: Pero tienes otra condición, ¿cuál es?
ESTUDIANTE I_{21}: Que el área sea lo más grande, pero no entiendo cómo.

En segundo lugar, este estudiante, por una actuación aritmética que, si bien surge de la comprensión de los conceptos de perímetro y área, no aporta una respuesta correcta debido a sus concepciones acerca de los rectángulos y los cuadrados. En efecto, el estudiante no reconoce que los valores que maximizan el área son 15 y 15. Resulta interesante que la totalidad de los estudiantes entrevistados responda que los valores que maximizan el área son 16 y 14 (o viceversa), y que durante la entrevista se responda:

PROFESOR: ¿No puede ser 15 en cada uno de los lados?
ESTUDIANTE: No, porque entonces sería un cuadrado, y no un rectángulo, como se expresa en el problema.
PROFESOR: ¿Qué es un rectángulo?
ESTUDIANTE: Una figura con dos pares de lados iguales, pero unos son mayores que otros, o la base mayor que la altura.
PROFESOR: ¿Entonces, un cuadrado es un rectángulo?
ESTUDIANTE: No, porque en el cuadrado todos los lados son iguales.
PROFESOR: ¿Cómo se halla el área de un rectángulo?
ESTUDIANTE: Base por altura.
PROFESOR: ¿Cómo se halla el área de un cuadrado?
ESTUDIANTE: Lado por lado.

Con independencia del grado de avance, las respuestas en los tres grupos ponen de manifiesto que no se tienen definiciones correctas de las figuras, al punto que algunos estudiantes no pueden responder a preguntas como: "¿Qué significa la palabra cuadrilátero?" o "¿qué significa la palabra rectángulo?" Cabe destacar que la dificultad conceptual va acompañada de los prototipos visuales que se tienen sobre el cuadrado ("el que tiene cuatro lados iguales") y el rectángulo ("el que tiene la base mayor que la altura").

En resumen, se pudo comprobar que no se tiene la competencia necesaria para trasladar los resultados obtenidos (aritméticos) a expresiones álgebraicas, porque se desconoce la relación existente entre los conceptos de perímetro y área. Un ejemplo se halla en la respuesta del estudiante I_{18}, confirmado por el subsecuente fragmento de entrevista.

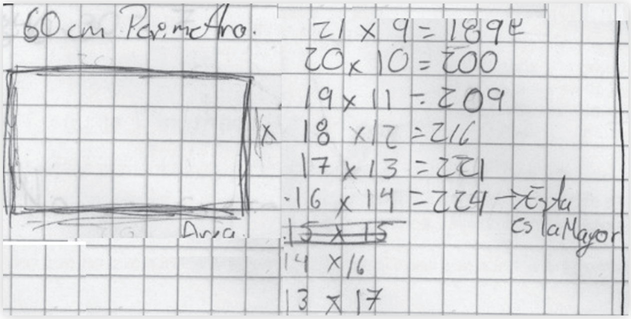

Figura 5. Respuesta del estudiante I_{18} al Problema 3

PROFESOR:	¿Puedes representar algebraicamente las condiciones del problema?
ESTUDIANTE I_{18}:	No, me costaría mucho trabajo.
PROFESOR:	¿Puedes simbolizar cada lado de la figura y tratar de expresar las condiciones? Intenta expresar primero el área y luego el perímetro.
ESTUDIANTE:	Es lo complicado, si tengo valores lo puedo hacer, pero plantearlo me cuesta trabajo.

En cambio, la actuación algebraica se halla en las respuestas de pocos estudiantes (ver Tabla 4); un ejemplo es la respuesta del estudiante II_{26}.

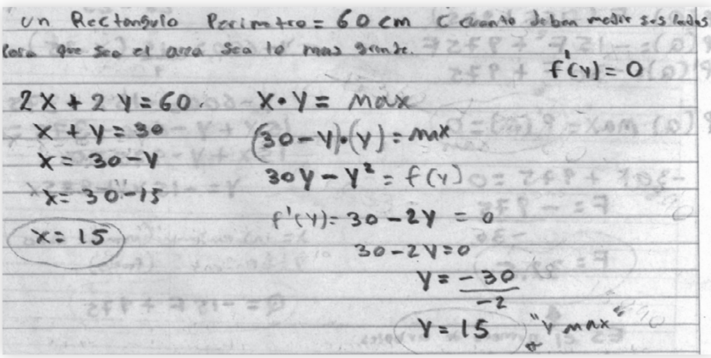

Figura 6. Respuesta de II_{26} al Problema 3

Los porcentajes de incomprensión muestran lo complicado que resulta a los estudiantes de los tres grupos entender el contexto geométrico de este problema. En los estudiantes avanzados (grupo de econometría) se halla el más alto promedio de aciertos, pero son ellos quienes manifiestan también el mayor porcentaje de incomprensión (ver Tabla 4), debido quizás a que se encuentran más alejados, temporalmente, de los cursos (en secundaria y bachillerato) en los que se suelen abordar situaciones geométricas de este tipo. Esta situación se complica por la tendencia del estudiante avanzado a utilizar herramientas sofisticadas estudiadas en la universidad que, independientemente de su pertinencia, no siempre fueron bien comprendidas.

Así, el nivel académico formal no ha implicado un aprendizaje significativo; el nuevo conocimiento adquirido en los cursos avanzados se transforma más bien en un obstáculo para la comprensión del contenido de los problemas y para el tránsito de los lenguajes (común y aritmético) al algebraico.

Análisis de actuaciones y dificultades en el Problema 4

En la actuación de muchos estudiantes (ver Tabla 5) se observa incomprensión de las condiciones verbalmente planteadas.

Tabla 5. Porcentajes de aciertos y actuaciones en el Problema 4

Grupo	*Porcentaje de aciertos*	*Porcentaje de alumnos que exhiben la actuación*		
		Aritmética	*Algebraica*	*Incomprensión*
Cálculo I	4	12	0	88
Cálculo II	36.4	27.4	9	63.6
Econometría	31	50	8	42

A causa de una lectura inadecuada del enunciado, o por el desconocimiento sobre los conceptos implicados en la tarea, surgen respuestas como:

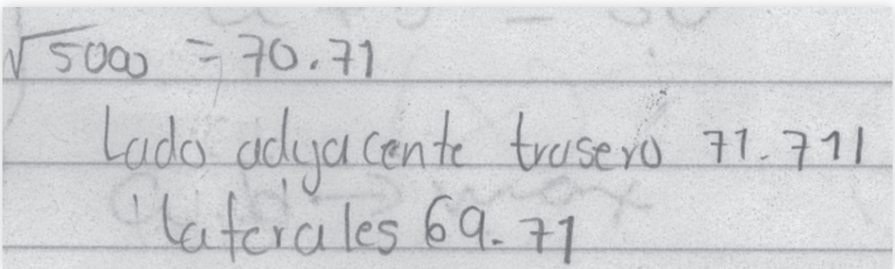

Figura 7. Respuesta del estudiante II_{37} al Problema 4

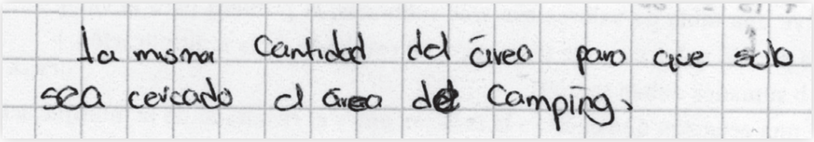
la misma cantidad del área para que solo sea cercado el área del camping.

Figura 8. Respuesta del estudiante I_{21} al Problema 4

Tendencia que luego se manifiesta otra vez en este fragmento de entrevista al estudiante I_{21}:

ESTUDIANTE I_{21}: Se supone que son 5 000 metros cuadrados [señala la Figura 1]... el lado frontal no se debe cercar.

PROFESOR: No, no se puede cercar.

ESTUDIANTE I_{21}: Es un rectángulo... ¿Se puede decir que su área es de 5 000 metros cuadrados?

PROFESOR: Sí.

ESTUDIANTE I_{21}: No, no entiendo.

PROFESOR: Observa, se desea colocar malla a estos tres lados [señala la Figura 1], pero se desea que la cantidad de malla sea la menor posible; si el área debe ser 5 000 metros cuadrados, ¿qué valores podrían ser?

ESTUDIANTE I_{21}: No sé.

PROFESOR: Bien, supongamos que damos valores de 1 000 al lado frontal y 5 al lado lateral, ¿cómo calculas el perímetro?

ESTUDIANTE I_{21}: Lado por lado.

En otros casos, la actuación se limita a una operación aritmética, consistente en proponer dos valores cuya multiplicación sea 5 000, y no más; esta situación es causada por la desconexión existente entre los conceptos de perímetro y área. Se pudo comprobar que 7 de los 16 estudiantes entrevistados responden, acertadamente, que el lado frontal debe ser de 100 metros y el ortogonal de 50 metros, pero solo dos pueden verificar (de manera aritmética) que la cantidad necesaria de malla sea mínima. Un ejemplo es la respuesta del estudiante II_{28}.

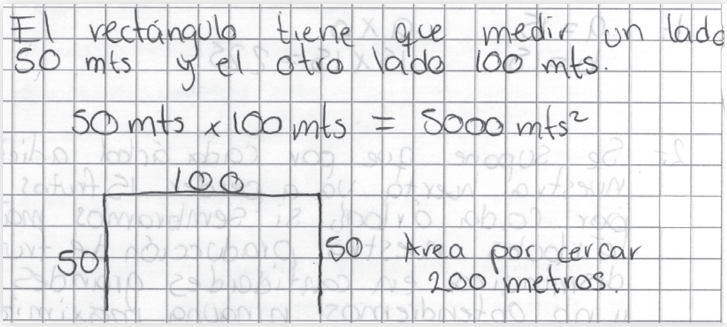

Figura 9. Respuesta del estudiante II28 al Problema 4

Este estudiante luego manifiesta en la entrevista:

PROFESOR: ¿Cómo llegas a esta respuesta?

ESTUDIANTE II$_{28}$: Multiplicando con la calculadora, para que me diera 5 000, tomé algunas variantes.

PROFESOR: ¿Pero cómo determinas que deben ser 100 y 50?

ESTUDIANTE II$_{28}$: Realicé algunas variantes, incluso con números no enteros, y fui calculando la cantidad de malla. Al final llegué a la conclusión que debe ser la respuesta correcta.

Los resultados ponen en evidencia que no existe una mejora en el porcentaje de aciertos de los estudiantes de econometría (31%) en relación con los de Cálculo II (36.4%), aunque ambos grupos mejoran en relación con el de Cálculo I (4%). Si bien es cierto que la incomprensión disminuye con mayores niveles de avance curricular (ver Tabla 5), no se incrementa en igual medida el porcentaje de actuaciones algebraicas. Se pudo constatar que los estudiantes que comprenden, sin importar cuál sea su nivel académico, exhiben actuaciones aritméticas. Resulta relevante que, de los 16 entrevistados, solo un estudiante (el sujeto I$_{22}$ del grupo de Cálculo I) logra, guiado por las preguntas del entrevistador, una expresión algebraica del tipo $C = (500 / x)(2) + x$.

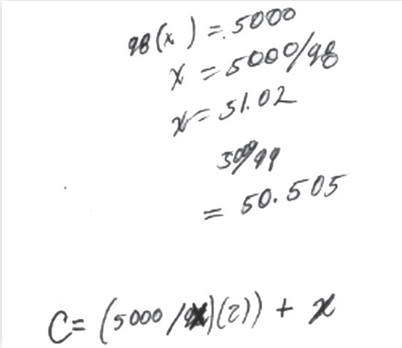

Figura 10. Respuesta del estudiante I22 al Problema 4 (fragmento)

Análisis de actuaciones y dificultades en el Problema 2

Una situación latente en las respuestas escritas es la incomprensión del enunciado o de las condiciones del problema (ver Tabla 6). La inmensa mayoría de los estudiantes puede determinar que la producción total actual es de 1 500 frutos (resultado al que arriban mediante la multiplicación 600 x 25), pero se genera un serio conflicto que inicia con la total incomprensión de la frase "por cada árbol adicional plantado, la producción de cada uno disminuirá en 15 frutos", e incluye la inadecuada interpretación de la naturaleza de la dependencia de la producción total con respecto al número de árboles plantados.

Tabla 6. Porcentajes de aciertos y actuaciones en el Problema 2

Grupo	*Porcentaje de aciertos*	*Porcentaje de alumnos que exhiben la actuación*		
		Aritmética	*Algebraica*	*Incomprensión*
Cálculo I	28	36	4	68
Cálculo II	36.4	31.8	9.1	50
Econometría	39.3	32.1	7.1	46.4

En el grupo de econometría se halla el mayor nivel de aciertos, porque la situación planteada y las relaciones que en ella se establecen son más familiares y cercanas al estudiante avanzado de esta materia, que a los estudiantes de Cálculo I y II. Además, el estudiante de econometría debería poseer, debido a su avance curricular, más herramientas para dar solución al problema. Obsérvese que el nivel de comprensión no mejora de manera significativa en los estudiantes avanzados, como tampoco resultan estos ser los más competentes en la aplicación de procedimientos algebraicos.

La realidad es que existe un alto nivel de incomprensión en los tres grupos de estudiantes, provocado por la falta de competencia en el lenguaje común y en el lenguaje propio del campo de estudios profesionales, tal y como se muestra en las respuestas de los estudiantes E_{48} y II_{28}.

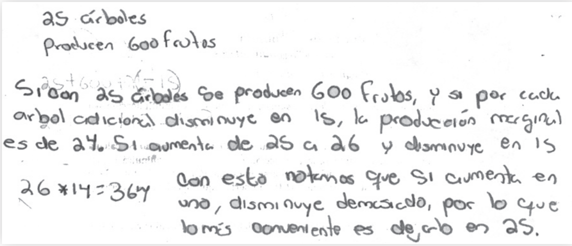

Figura 11. Respuesta del estudiante E_{48} al Problema 2

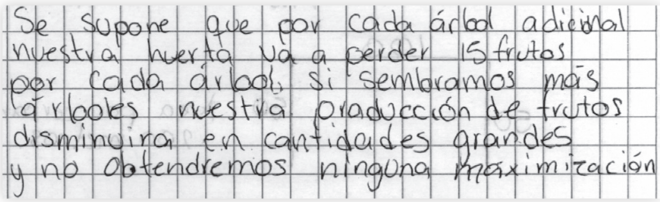

Figura 12. Respuesta del estudiante II_{28} al Problema 2

En otros casos, y como resultado de una comprensión del contexto y de las condiciones del problema, la actuación utilizada es aritmética (ver Tabla 6). Un ejemplo es la respuesta del sujeto II_{34}.

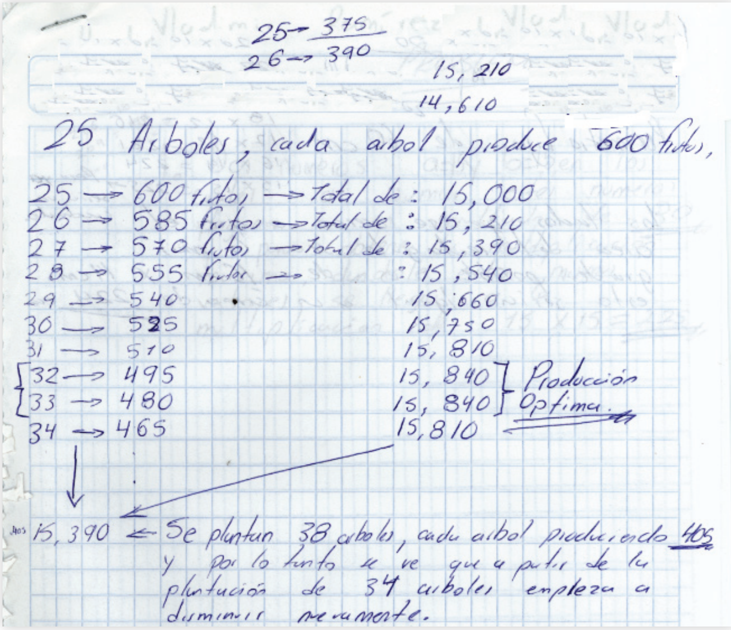

Figura 13. Respuesta del estudiante II_{34} al Problema 2

Ahora bien, la cuestión relevante es: ¿poseen estos estudiantes la competencia para trasladar dicho conocimiento aritmético a una expresión algebraica? Durante la entrevista, solo cuatro estudiantes logran, bajo la guía del entrevistador, escribir la expresión algebraica del tipo $P = (25 = x)(600 - 15x)$. Para el resto, la tarea de trasladar el conocimiento que se tiene sobre el problema a una expresión algebraica derivó en un serio conflicto, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

PROFESOR: ¿Cómo expresar algebraicamente los resultados aritméticos?

ESTUDIANTE II_{34}: Con una regla de tres.

PROFESOR: ¿Cómo podemos llegar al resultado con una regla de tres?

ESTUDIANTE II_{34}: Por 25 árboles se producen 600 frutos… Se me dificulta encontrar la cantidad.

PROFESOR: Observa la primera columna de tus resultados aritméticos; estás incrementando la cantidad de árboles de uno en uno, mientras que en la segunda columna disminuyes de 15 en 15. Y después multiplicas los resultados de ambas columnas. ¿Podemos, de cada columna, obtener una expresión matemática y luego multiplicar?

Estudiante II$_{34}$: Sí.

Profesor: ¿Cómo? ¿Por qué no llamamos *x* a la variable incrementada?

Estudiante II$_{34}$: No, no sé cómo hacerlo.

En otros casos, los estudiantes intentan proponer una solución de tipo algebraica, que no refleja comprensión del problema, como se muestra en la respuesta del estudiante E$_{54}$. En él puede observarse una inclinación hacia el uso de formalismos a los que ha estado expuesto durante sus cursos universitarios de matemática y economía, pero con una completa incomprensión del significado de los mismos.

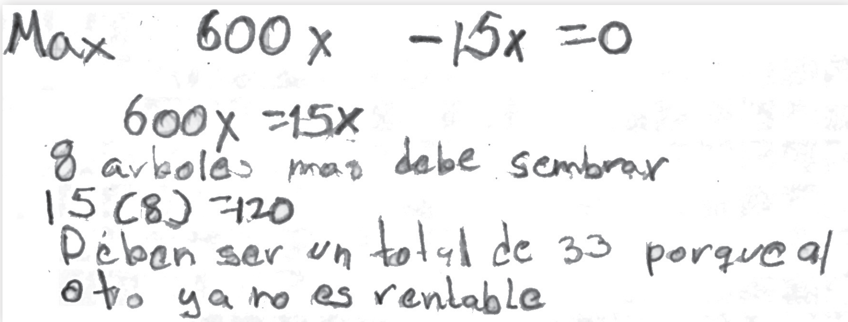

Figura 14. Respuesta del estudiante E$_{54}$ al Problema 2

En el siguiente fragmento de entrevista obsérvese, primero, la incomprensión de la situación verbalmente planteada y, posteriormente, la dificultad para trasladar el conocimiento aritmético a una expresión algebraica.

Profesor: En tu respuesta escrita, ¿qué significa *x* ?

Estudiante E$_{54}$: La cantidad de árboles adicionales, menos 15 que disminuye por cada árbol adicional.

Profesor: ¿Cuál sería la producción si se plantan *x* árboles adicionales?

Estudiante$_{54}$: Según yo, debe ir disminuyendo la producción.

Profesor: Por ejemplo, ¿si se plantan 26 árboles?

Estudiante$_{54}$: Sería 26 x 585.

Profesor: ¿Si se plantan 27?

ESTUDIANTE$_{54}$: Sería 27 x 570.

PROFESOR: Observa que, a medida que incrementas un árbol, la producción disminuye en 15; la pregunta es, ¿cómo se puede expresar algebraicamente?

ESTUDIANTE$_{54}$: Sería como... [No responde].

PROFESOR: Bien, llamemos x a la cantidad de árboles adicionales.

ESTUDIANTE$_{54}$: [Escribe la expresión: $25 + x = 600 - 15x$].

PROFESOR: ¿Por qué igualas tales expresiones? Estás igualando cantidad de árboles a cantidad de frutos.

ESTUDIANTE$_{54}$: [No responde].

PROFESOR: Tienes que $25 + x$ es la cantidad de árboles, ¿qué debemos hacer para obtener la producción total?

ESTUDIANTE$_{54}$: Este... [Señala la expresión $600 - 15x$]... El número de árboles.

PROFESOR: ¿Por qué lo debemos multiplicar?

Estudiante$_{54}$: Por $25 + x$.

PROFESOR: Muy bien, observa que la expresión [escribe $(25 + x)(600 - 15x)$] satisface los cálculos anteriores.

ESTUDIANTE$_{54}$: Sí, ya entiendo.

PROFESOR: ¿Cómo calcular la producción máxima? Es decir, ¿cuántos árboles adicionales maximizan la expresión?

ESTUDIANTE$_{54}$: Sacando el valor de x.

En resumen, el análisis de los cuatro problemas arroja evidencias de que la competencia para plantear algebraicamente las situaciones no puede atribuirse a los cursos de matemáticas recibidos en la universidad. En lo relativo al nivel de comprensión de las situaciones verbalmente planteadas, no existen diferencias significativas entre los grupos; cursar matemáticas avanzadas en la universidad no garantiza que se comprenda mejor la naturaleza de las relaciones existentes entre los datos y las incógnitas.

Los cursos universitarios resultan en ocasiones insuficientes, debido a que el estudiante arriba a ellos sin un conocimiento consolidado de la matemática elemental, y sin haber desarrollado la capacidad de utilizar el nuevo conocimiento de manera flexible en situaciones o problemas que formen parte de sus experiencias personales y conocimientos anteriores. Se manifiesta la tendencia a imaginar determinados prototipos visuales que resultan contraproducentes si no se tiene una construcción adecuada del concepto.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES ADICIONALES

El estudio tuvo como objetivo analizar las actuaciones y competencias algebraicas de tres grupos de estudiantes universitarios con diferentes niveles de avance formal dentro de la misma licenciatura. Aun cuando analizar las dificultades de comprensión lectora no fue uno de los propósitos de investigación, se constató que la primera dificultad emerge, precisamente, de la incomprensión del enunciado o del contexto del problema, situación que varía dependiendo del nivel de complejidad de los problemas propuestos y del instrumental matemático que el estudiante considera disponible y pertinente.

En los problemas que requieren un nivel elemental de análisis (problemas 1 y 3), el estudiante menos avanzado (de los grupos de Cálculo I o II) muestra, de manera relativa, mayor comprensión que el estudiante más avanzado (del grupo de econometría) a causa de que se utiliza aquello que se recuerda mejor: a) el menos avanzado, lo que estudió hace relativamente poco tiempo (de 3 a 6 meses) en los cursos preuniversitarios, y b) el estudiante avanzado, las herramientas sofisticadas estudiadas recientemente en la universidad que, a causa de la propia incomprensión, no le permiten llegar a una solución.

Contrastando con esto, en los problemas que requieren de "más conocimiento" (problemas 2 y 4), se invierten los resultados. El estudiante del grupo de econometría obtiene mejores resultados debido al uso de algunos procedimientos algebraicos estudiados en la universidad, lo cual no significa que necesariamente comprenda mejor los problemas; tan solo que se vale de más recursos de carácter procedimental.

Una segunda dificultad es causada por las concepciones sobre los conceptos geométricos de cuadrado y rectángulo. Muchos estudiantes se caracterizan por asociarlos a las imágenes visuales (prototipos) que se han utilizado en el proceso de enseñanza como ejemplos clarificadores para exponer un modelo sobre dichos conceptos, pero el resultado es que los estudiantes universitarios entienden por rectángulo: "una figura con dos pares de lados iguales, pero unos son mayores que otros, o la base mayor que la altura" y por cuadrado: "el que tiene todos los lados iguales, o la base igual a la altura". De este modo, la propia figura se ha constituido en un obstáculo para la construcción adecuada del concepto.

En tercer lugar destaca el uso generalizado de procedimientos aritméticos, de naturaleza instrumental y memorística, sin la competencia para transferir dicho conocimiento (sobre el contexto y su solución aritmética) a una expresión algebraica. Sin importar el nivel de avance en la universidad, se recurre por igual al uso de estos procedimientos con una fuente de significado muy limitada, que no resulta suficiente para aplicar procedimientos de generalización algebraica. En las entrevistas a varios estudiantes se observaron conflictos para trasladar las ideas expresadas en lenguaje aritmético al lenguaje algebraico, precisamente porque no se tiene la habilidad para establecer la relación entre los diferentes sistemas de representación; en algunas situaciones (por ejemplo en el Problema 2) se genera un serio conflicto –incluso recibiendo el estudiante sugerencias directas del profesor– para llegar a una solución de tipo algebraica.

Así, y con independencia de los propósitos educativos de la SEP y de la propia universidad, se hallaron indicios relevantes sobre la existencia de dificultades comunes en los tres grupos de estudiantes. Los hechos observados son:

- El estudiante no posee competencia para comprender textos aritmético-algebraicos de enunciado verbal; es decir, no existe una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduzca a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades, coincidiendo con lo encontrado por Filloy y sus colaboradores (2008).
- El nivel de conocimiento sobre el contexto geométrico es tan elemental, que se desconoce incluso la relación existente entre las magnitudes (perímetro y área) a que se hace mención en algunos de los problemas.
- No se muestra la competencia para transferir la solución aritmética del problema al lenguaje algebraico.
- No se muestra la competencia para expresar, en lenguaje algebraico, las relaciones planteadas verbalmente o desde el entorno geométrico.
- Existe una tendencia a utilizar formalismos de tipo algebraico, descontextualizados y no comprendidos, que no son útiles al estudiante en la solución de los problemas.

Los estudiantes de econometría presentan los mismos problemas de comprensión lectora que los estudiantes de Cálculo I y II salvo en el Problema 2, en el cual responden ligeramente mejor, porque están más familiarizados con el contexto. Los resultados comparativos entre los estudiantes de los tres grupos ponen de manifiesto un hecho: el nivel académico formal no ha implicado un aprendizaje significativo; el uso de las nuevas herramientas, adquiridas en los cursos avanzados, no implica que exista mayor comprensión del contenido de los problemas, como tampoco es determinante en la competencia para transferir de los lenguajes común y aritmético al algebraico.

Los resultados son similares con los reportados por otras investigaciones situadas en el marco del MTL. Existen coincidencias, por citar algunas, con Filloy y Rojano (1985); Kieran y Filloy (1989); Ursini (1990) y Radford (1996), que resaltan el uso de procedimientos aritméticos en lugar del método algebraico; con lo expuesto en la investigación de Filloy y Rojano (1991) sobre las dificultades en la transición de la aritmética al álgebra y en la traducción del lenguaje natural al algebraico; también hay coincidencia con la investigación de Fernández y Puig (2002) sobre las implicaciones que tiene la forma de interpretar el problema en las actuaciones del estudiante, y con Butto y Rojano (2009) respecto al nivel de pensamiento prealgebraico de los estudiantes, que no permite procesos de generalización significativos.

Cabe mencionar que las investigaciones antes referidas se realizaron en los niveles preuniversitarios. En este trabajo se muestra que los estudiantes universitarios presentan dificultad para comprender la estructura general del problema a partir de las cantidades (conocidas y desconocidas). Y pone de manifiesto que el nivel de avance curricular en la propia universidad no mejora el proceso de transferencia de ideas expresadas en lenguaje aritmético al lenguaje algebraico.

En resumen, las actuaciones y dificultades mostradas en esta investigación ponen de manifiesto la existencia de un problema relacionado con el nivel de conocimiento con el que los estudiantes ingresan a la universidad. Más allá de las carencias relativas a las técnicas, se constata que conceptos fundamentales no han sido construidos de manera satisfactoria en la propia universidad, lo cual constituye un obstáculo para abordar analíticamente el estudio de la matemática universitaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnau, D. y Puig, L. (2005). Análisis de las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. En Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM*, Córdoba, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), pp. 153-162.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*, Windsor, England, NFER-Nelson.

Cuesta, A. (2007). El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía: análisis de una innovación educativa. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

Cuesta, A., Deulofeu, J. y Méndez, M. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. En *Educación Matemática*, 22 (3), pp. 5-20.

Escalante, J. y Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. En *Educación Matemática*, 24 (1), pp. 5-30.

Fernández, A. y Puig, L. (2002). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En Murillo, J., Arnal, P. M., Escolano, R. y Gairín, J. M. (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM*, Logroño, SEIEM, pp. 29-46.

Filloy, E. (1991). Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning. En Furinghetti, F. (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, Genova, Italy, pp. 48-55.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. En *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 26, pp. 327-341.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought (A clinical study with 12-13 year old). En *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education-North American Chapter,* 1, pp. 51-56.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985). Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies. En Streetland, L. (Ed.), *Proceedings of the IX Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, Holanda, pp. 154-158.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. En *Educational Studies in Mathematics*, 12 (3), pp. 317-326.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. En *Enseñanza de las Ciencias*, 7, pp. 229-240.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En Bolea, P., González, Mª. J. y Moreno, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Huesca, Instituto de Estudios Altoaragoneses/Universidad de Zaragoza, pp. 107-126.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En *PNA*, 2, pp. 87-107.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En Filloy, E. y Rojano, T. (Eds.), *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* Cuernavaca, PNFAPM, pp. 35-48.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. En Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Dordrecht, Kluwer, pp. 39-53.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2010). Objetivos y competencias en el aprendizaje de los números naturales. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática*, 54, pp. 14-30.

Secretaría de Educación Pública (2011). Matemáticas II. Serie Programas de Estudios. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_2osem/MATEMATICAS-II.pdf. Fecha de acceso, 9 de julio de 2012.

Ursini, S. (1990), El lenguaje aritmético-algebraico en un ambiente computacional, En *Cuadernos de Investigación*, 15 (IV), pp. 149-156.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? En *Educación Matemática*, 18 (3), pp. 5-38.

Datos de los autores

Abraham Cuesta Borges.
Facultad de Economía.
acuesta@uv.mx

Juana Elisa Escalante Vega.
Facultad de Estadística e Informática.
jescalante@uv.mx

Marco Antonio Méndez Salazar.
Facultad de Economía.
marcomendez@uv.mx

Universidad Veracruzana, México.