ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico

Ana María Mántica y Ana Laura Carbó

Resumen: Se analiza la actividad realizada por alumnos de segundo año de una escuela secundaria de Santa Fe en la que se presenta el conflicto entre el infinito actual y el potencial. En el estudio realizado de los registros de los artefactos escritos y las grabaciones, pudo apreciarse que los estudiantes intuyen la existencia de un conjunto de infinitos elementos pero acotado. Se estudian los diálogos de los estudiantes, los cuales permiten apreciar la resistencia de muchos de ellos a aceptar la idea de que un conjunto acotado puede tener infinitos elementos. Se evidencia, además, que la noción de unidad de medida es tan fuerte que no permite a los estudiantes considerar sus partes. Se advierte que las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales.

Palabras clave: investigación-acción, infinito actual, infinito potencial, desigualdad triangular, interacciones.

Abstract: This article analyses the activity carried out by second-year students at a secondary school in Santa Fe in which the actual-potential infinity conflict is introduced. Students' intuition on the concepts of infinitive and bounded sets can be noticed in the study of recordings and written devices records. It can be realized from the students' dialogue how most of them offer resistance to accept the idea that a bounded set can be an infinitive set. It is also showed that the highly consolidated notion of unit of measurement makes it difficult for students to consider its parts. It is realized that notions on intuition basis prevents from the acceptance of formal concepts.

Keywords: research-action, actual infinity, potential infinity; triangular inequality, interactions.

Fecha de recepción: 19 de marzo de 2013; fecha de aceptación: 12 de septiembre de 2013.

INTRODUCCIÓN

Para iniciar a los alumnos en el trabajo argumentativo, consideramos adecuado plantear actividades que les permitan recuperar propiedades ya formuladas en su trabajo en geometría a lo largo de la escolaridad y, a partir de ellas, elaborar nuevas. Itzcovich (2005) sostiene que no es suficiente la presentación de buenos problemas, que es necesario que los estudiantes "se vayan apropiando de ciertos recursos y técnicas que son propios de los procesos de demostración en geometría" (p. 50). La reflexión sobre las argumentaciones que realicen generará condiciones para que vayan construyendo su "propia caja de herramientas" y vayan enriqueciendo sus posibilidades de ganar autonomía frente a la producción de validación de conjeturas y razonamientos.

La secuencia elaborada tiene como objetivo la formulación de los criterios de congruencia de triángulos. El equipo consideró que previamente se trabajaría con un problema que les permitiera a los alumnos la elaboración de conjeturas y la producción de argumentos adecuados sobre la propiedad de la desigualdad triangular referida a los lados de un triángulo. Cuando los alumnos comienzan con el análisis del problema planteado, surge una estrategia que no estaba considerada en la planificación de la actividad, pero que resultó fructífera en cuanto a las discusiones que generó.

> El problema que se discute emerge en el contexto de las interacciones que se promueven, es un problema nuevo, alejado del problema original, aunque surge a partir de él, y da lugar a fértiles e interesantes discusiones desde el punto de vista de la posibilidad que ofrece a los alumnos de producir fundamentos para el trabajo matemático (Sadovsky, 2005, p. 78).

El problema que en particular vamos a analizar en este trabajo tiene infinitas soluciones. Durante el desarrollo de la actividad, se manifiesta, en los alumnos, un conflicto entre las concepciones del infinito potencial y el actual. En matemática se distingue entre estas dos acepciones; la primera está asociada a la ausencia de límites o de fronteras: "Bajo esta significación, el infinito es, literalmente, lo que no tiene fin, lo que siempre (infinito temporal) se puede continuar" (Waldegg, 1996, p. 109). Por su parte, el infinito actual está asociado a la idea de totalidad, de completitud y de unidad. "Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera ahora acabado y los límites, alcanzados" (Waldegg, 1996, p. 110). Moreno y Waldegg (2008a) sostienen que:

> Cuando un estudiante entra por primera vez en contacto con los conjuntos infinitos, uno de los conflictos obvios a los que se enfrenta es tener que aceptar que el todo puede ser igual a una de sus partes. En la raíz de este conflicto, se encuentra el hecho de que los esquemas intelectuales del individuo surgen de la experiencia cotidiana, en donde se hace evidente que el todo siempre es más grande que cualquiera de sus partes (p. 26).

Consideramos importante el análisis de este conflicto, puesto que en el desarrollo de un concepto pueden presentarse puntos de coincidencia entre el razonamiento del estudiante y el proceso histórico sobre estas concepciones: actual y potencial; esto podría ayudar a docentes de matemática a diseñar mejores estrategias para la enseñanza de conceptos relacionados con el infinito. Waldegg (2008) sostiene que la idea no es para que el docente reproduzca en sus "estrategias didácticas las respuestas dadas en la historia, sino para que comprenda ciertos mecanismos de aprehensión de los conceptos que dan racionalidad tanto a la respuesta de sus estudiantes como a las dificultades a las que se enfrentan" (p. 133). Otra cuestión que se debe tener en cuenta es el problema de la unidad de medida.

> El alumno debe construir el concepto de unidad entre otras cosas y hacer uso de la iteración de la misma para asignar un número al objeto que mide. Y la dificultad radica fundamentalmente en que ese número generalmente no es natural y se confunde la medida entera con la medida exacta (Saucedo y Mántica, 2011, p. 91).

Esta cuestión se hace presente en el desarrollo de la actividad propuesta, ya que, al resolverla, los estudiantes emplean la amplitud del ángulo que forman los segmentos dados.

METODOLOGÍA

El método en el que encuadramos el diseño, implementación y análisis de las tareas es el de investigación-acción. Este método

> ...no prescribe reglas que rijan las formas que los profesores han de utilizar para facilitar el desarrollo de la comprensión de los alumnos, pero propor-

ciona una orientación general, en forma de hipótesis, a los docentes que quieran ampliar su comprensión de las situaciones particulares en cuyo seno enseñan (Elliot, 1990, p. 209).

La investigación-acción se relaciona con problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores y puede ser desarrollada por ellos; interpreta lo que ocurre desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema y describe e interpreta lo que sucede con el mismo lenguaje utilizado por ellos.

El proceso incluye, en general, las siguientes fases: el desarrollo de un plan, que debe ser flexible para adaptarse a efectos imprevistos; la actuación para poner el plan en práctica, guiada por la planificación; la observación de efectos de la acción (debe ser cuidadosa para que proporcione documentación útil para la etapa siguiente), y la reflexión sobre los efectos para tomarla como base para una nueva planificación. Las cuatro fases señaladas constituyen un peldaño de una espiral. Cuando se termina la última fase, se pone en marcha el siguiente peldaño, que incluye nuevamente las cuatro fases.

En una primera etapa, se diseña e implementa una secuencia didáctica en un primer año de una escuela secundaria de Santa Fe para abordar la desigualdad triangular respecto a los lados de un triángulo, ya que esta propiedad no se trabaja en la escuela primaria, pero sí la propiedad de los ángulos interiores. En la fase de reflexión de este primer ciclo, se determinan cuestiones que permiten reformularla de modo de comenzar nuevamente con el proceso que implica la investigación-acción con un nuevo grupo de estudiantes. Del análisis realizado (Mántica, Carbó y Götte, 2011), se observó que "los alumnos de primer año tienen la noción de infinito potencial pero no la de infinito actual" (p. 587). Hasta el momento de la implementación de la secuencia, los estudiantes no habían recibido una instrucción formal acerca de los temas relacionados con el infinito actual, por lo que sus respuestas se podían interpretar como espontáneas. Por esta razón, se estima conveniente trabajar previamente problemas con más de una solución o sin solución, el compás como instrumento de medición, el conjunto de números reales y su representación en la recta numérica, el concepto de densidad y, de manera intuitiva, la propiedad de completitud de dicho conjunto, para luego trabajar en una situación geométrica. Se reformulan las tareas teniendo en cuenta lo mencionado, así como también algunos inconvenientes detectados en las consignas de éstas.

Teniendo en cuenta esto, se planifica la secuencia que se presenta en el

Anexo I. Se realiza un análisis de cada una de las tareas que la conforman. En el punto análisis de las tareas, exponemos el análisis de la tarea 1 compuesta por tres problemas. En este artículo se presentan, además, la observación y la reflexión de la implementación del primer problema de esta tarea, que es en el que surge el debate que lleva implícito los conceptos de infinito actual y potencial.

Entre los métodos de recolección de datos, mencionamos la observación no participante, artefactos escritos (McKnigh, Magid, Murphy y McKnigt, 2000) y grabaciones en audio y en video. Los estudiantes acceden a colaborar en la realización de las actividades en el marco de un proyecto de investigación, dan su consentimiento para ser grabados durante las clases y consienten en que lo producido sea utilizado en el marco de ésta.

Se trabaja la propuesta en las clases de matemática de un 2° año, de 40 alumnos entre 13 y 14 años, de la escuela secundaria núm. 3109 de la ciudad de Santa Fe, durante un mes. Se forman para esto ocho grupos de cinco alumnos cada uno. La conformación de estos grupos la diseña el docente a cargo del curso con el objetivo de lograr una participación lo más equitativa posible entre los integrantes, de modo que en cada uno de ellos haya estudiantes que normalmente tienen una intervención activa. Se plantea la clase de modo que, en primera instancia, los alumnos trabajen en la tarea propuesta por el docente de manera individual y luego se conforman grupos con el objetivo de que se discutan las soluciones elaboradas individualmente y obtener una conclusión grupal para ser presentada en la puesta en común.

Los grupos se distribuyen en el aula de modo que puedan trabajar de manera independiente y los observadores no participantes registran en un cuaderno lo que acontece, tanto en lo que refiere a las actuaciones de los alumnos como a las intervenciones del docente, indicando en una columna los registros textuales que se producen y en otra las apreciaciones y observaciones subjetivas. Se colocan además grabadores en cada grupo a fin de registrar las discusiones que se produzcan entre los integrantes para obtener las conclusiones que plasman tanto en sus carpetas como en los afiches. El observador no participante además graba y filma la puesta en común de todas las tareas.

Para el análisis del problema 1 correspondiente a la tarea 1 que se presenta en este artículo, se utiliza lo documentado en las carpetas de los estudiantes, lo sintetizado en el afiche como acuerdo del grupo, las anotaciones del observador no participante, las transcripciones de cada uno de los debates acontecidos durante las grabaciones al realizar la tarea indicada y las de la puesta en común, tanto de cada grupo como la del grupo clase. La implementación del problema que se presenta demandó tres módulos de clase consecutivos que equivalen a 120 minutos.

ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Tarea 1

El objetivo de la primera tarea es que los estudiantes logren enunciar la desigualdad triangular, de los lados de un triángulo. Se plantean para esto tres problemas.

Problema 1

Dados estos dos segmentos, usando la regla no graduada y el compás, a) construye un triángulo:

b) Construye otro triángulo distinto del anterior con esos mismos dos segmentos.
c) ¿Cuántos triángulos diferentes se puede construir? ¿Por qué?

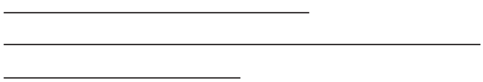
Análisis del problema 1

Teniendo en cuenta que los alumnos no trabajan en general con problemas que tengan más de una solución, es probable que, al encontrar un triángulo que cumpla con los requisitos solicitados, consideren resuelto el problema. En general, cuando los estudiantes resuelven problemas, los datos están dados y se utilizan todos para resolverlo, por esa razón es poco factible que consideren la posibilidad de tomar dos lados y variable el tercero. Las figuras prototípicas de triángulos son isósceles y generalmente con un lado, el que se considera como base, paralelo al borde de la hoja.

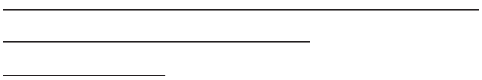
Se consideran además las posibles respuestas de los alumnos, denominando **a** al segmento de mayor longitud y **b** al segmento de menor longitud. Respecto de a), pueden construir un triángulo: isósceles de lados iguales coincidente con **a**; isósceles de lados iguales coincidente con **b**; equilátero de lado **a** o **b**; escaleno donde dos de sus lados sean **a** y **b**. Respecto de b), pueden construir: dos triángulos isósceles de lados iguales coincidentes con **a** o con **b**; equiláteros de lado **a** o **b**; escalenos donde dos de sus lados sean **a** y **b**, dependiendo de lo realizado en el ítem a). Respecto de c), las posibles respuestas son: se pueden construir dos, más de dos, muchos o infinitos.

Problema 2

Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.



Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.



Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

Análisis del problema 2

Generalmente se considera el lado más largo como base, ya que éste es el estereotipo que utiliza la mayoría de los libros de texto. El compás es un elemento no muy utilizado en la clase de geometría, por lo que es probable que los alumnos utilicen la regla para construir los triángulos, aunque en muchos casos la utilicen como un compás, por esta razón se incluye su uso explícitamente en el enunciado.

Por los segmentos considerados en b), puede ocurrir que los alumnos logren construir el triángulo y se resistan a aceptar la imposibilidad de éste, ya que habitualmente no se proponen problemas que no tienen solución. En este caso, el docente podrá trabajar la imprecisión de los instrumentos de medición y de la medición en sí misma con el objetivo de acordar la imposibilidad de dicha construcción, o recurrir a conclusiones obtenidas en el problema 1 si es necesario.

Se analizan también las posibles respuestas de los alumnos:

Éstos podrán dibujar primero un lado (en general el más largo) y luego ir probando con la regla hasta encontrar el tercer punto, dos lados con un ángulo arbitrario y, en uno de los extremos de uno de los segmentos, dibujar el otro forzando la coincidencia del otro extremo del tercer lado con el libre del primero, también con un ángulo arbitrario, uno de los segmentos dados y transportar sobre éste con el compás (marcando arcos de circunferencia) los restantes, uno de los segmentos dados y trabajar sobre éste con el compás (marcando dos circunferencias de centro cada uno de los extremos del segmentos y de radio cada una de las longitudes de los otros dos lados).

Problema 3

A continuación se proponen longitudes de segmentos. Decidan en cada caso si con ellas se puede o no construir un triángulo.

3 cm	2 cm	1 cm
8 cm	12 cm	5 cm
8 cm	4 cm	4 cm
7 cm	1 cm	2 cm

Con estos segmentos no es posible construir un triángulo: 8 cm, 3 cm, 2 cm. ¿Qué explicación darían de por qué no se puede?

Análisis del problema 3

Las razones por las que se consideran los siguientes procedimientos son similares a las expresadas en el problema 2.

Respecto de las posibles respuestas de los alumnos, se espera que respondan utilizando los procedimientos empleados en el problema dos. Dibujar el triángulo y concluir que no es posible realizarlo por lo acordado en el problema 2, es posible realizarlo en todos los casos, es posible realizarlo en el primer, segundo y tercer caso pero no en el cuarto, o utilizar lo acordado en la actividad anterior y fundamentar que el primero, tercero y cuarto no se pueden construir.

Se espera que al finalizar esta actividad el docente institucionalice la desigualdad triangular respecto de las medidas de los lados de un triángulo.

Explicitamos además los objetivos propuestos para las demás tareas que conforman la secuencia que se encuentra en el anexo I.

El objetivo de la tarea 2 es que los alumnos determinen cuáles son las condiciones necesarias para construir un único triángulo; el de la tarea 3 es que puedan determinar cuáles son las condiciones mínimas para construir un triángulo, y el de la tarea 4 es que los alumnos enuncien los criterios de congruencia del triángulo.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Describiremos la actividad matemática realizada por los alumnos ante la tarea[1] propuesta por el profesor que apunta a trabajar la propiedad de la desigualdad triangular de los lados de un triángulo a partir de problemas que involucran el análisis del conjunto solución y las condiciones de posibilidad de las construcciones. Este tipo de tareas tiene la intención de introducir a los alumnos "en una norma del trabajo geométrico: la insuficiencia de la percepción para 'estar seguros' y la necesidad de justificar" (Broitman e Itzcovich, 2008, p. 64). En este caso se apunta a trabajar un problema con infinitas soluciones donde se necesita algo más que una construcción para convencer al interlocutor de la veracidad de lo que se afirma. Los alumnos deberán ser conscientes de que los dibujos que usan para explorar una propiedad representan una figura particular pero, si se trata de analizar el dominio de validez de dicha propiedad, "deberán transformarse en representantes de un universo de figuras" (Broitman e Itzcovich, 2008, p. 61).

Se intenta que los estudiantes reflexionen en que la validez de sus afirma-

[1] "Vamos a denominar tarea a las propuestas de acción que los profesores plantean a sus estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas [...] Denominaremos actividad al conjunto formado por la tarea y el sistema de actividades cognitivas individuales y/o sociales desarrolladas por el resolutor" (Penalva y Llinares, 2011, p. 28).

ciones no puede establecerse de manera empírica, sino que deben apoyarse en las reglas del debate matemático. Se pretende que, a partir del dibujo, el estudiante ponga en juego relaciones de proposiciones que, si bien pueden asociarse a un trazado particular, le permitan considerar que la comprobación de estas propiedades sobre el dibujo no es suficiente para validar la proposición que se está estudiando.

Tarea

a) Dados estos dos segmentos, usando la regla no graduada y el compás, construye un triángulo de modo que dos de sus lados sean los siguientes:

b) Construye otro triángulo distinto del anterior de modo que dos de sus lados sean los segmentos dados en a).
c) ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir? ¿Por qué?

Análisis de datos

Se entrega la consigna para el trabajo en forma individual durante 15 minutos, luego se conforman los grupos y se analizan y confrontan las producciones de los integrantes con el objetivo de acordar una respuesta grupal para la situación.

En función del análisis de los debates realizados por los ocho grupos podemos clasificar los datos según lo expresado en relación con el conjunto solución encontrado. Para el estudio, se toma en primera instancia lo realizado por todos los estudiantes en el trabajo individual; para esto se analiza lo plasmado en las carpetas de los estudiantes y lo discutido en el grupo, examinando las transcripciones de los debates realizados en cada caso.[2]

[2] En el Anexo II se presenta la síntesis de lo expuesto por cada grupo como conclusión.

Conjunto solución	
Infinito	G3,[3] G4, G5, G8
Finito	G1, G2, G6, G7

Tomaremos para este estudio lo precisado por cuatro de los grupos que abordaron la discusión desde distintos aspectos: dos que manifiestan que el conjunto solución es infinito y dos que consideran que es finito. Reflexionaremos sobre los debates realizados por cada grupo y los de la puesta en común, poniendo especial atención en los argumentos que dan los estudiantes para justificar sus afirmaciones sin mucha preocupación por la corrección matemática de éstas.

Grupo 3

Se presenta una parte del diálogo del G3 cuando se reúnen para trabajar lo resuelto de manera individual y acordar conclusiones con respecto al conjunto solución del problema dado.

Ladislao: Todo está entre es infinito o no es infinito.
Marisel: No, para mí no es infinito.
Profesor: ¿Por qué?
Marisel: Porque tenemos un límite para poder armar un triángulo, tenés desde el grado 0 hasta el grado 179, 59 minutos 59 segundos, creemos nosotros, y no hay más posibilidades.
Profesor: ¿Y no hay más posibilidades de 59 segundos te parece a vos?
Florencia: Y sí, tenés 59.01,... décimas, centésimas, milésimas...

Parece que Florencia intenta establecer una relación entre la posible amplitud del ángulo y los números reales, expresando que es posible considerar subdivisiones de los submúltiplos conocidos.

Los alumnos continúan la discusión respecto a las limitaciones del instrumento de medición, referidas a la graduación de éste, que no transcribimos en el artículo. Superada esta instancia, el diálogo continúa del siguiente modo.

[3] Los grupos se enumeraron en forma correlativa del 1 al 8. Lo expresaremos en el trabajo con el número correspondiente.

Ladislao: Es que entre el grado 1 y el grado 2 va a haber infinitos grados.
Florencia: Porque yo digo que pueden ser infinitos, si lo medimos con el transportador claro que no lo vas a tener, o sea, si vamos por cada...
Marisel: No, obvio que no lo vas a ver, pero vos tenés un límite para armar un triángulo.
Florencia: Claro, pero dentro de ese límite... tenés infinitas posibilidades.
Marisel: Sí ya sé, pero son limitadas.
Florencia: ¿Por qué limitadas?
Lucía: Como decía Ladislao, o sea, porque hay algún momento que se corta, lo podés ir corriendo, corriendo, pero hay un momento en que se corta y se cierra.
Florencia: Claro, pero ¿de a cuánto lo vas a ir corriendo? ¿Adentro no hay más?
Lucía: Y sí hay...
Florencia: ¿Cuántos hay?
Marisel: Y sí, infinitas.
Lucía: En algún momento se corta, llega.

Florencia parece manejar la idea de infinito actual e intenta explicarla al resto, pero ellos se resisten a considerar que el conjunto acotado pueda tener infinitos elementos. El docente que supervisa las discusiones de los grupos intenta que encuentren alguna relación con temas tratados anteriormente y que permitan a Florencia validar su conjetura, pues en un momento parece ponerla en duda.

Profesor: Flor, ¿vos que decís?
Florencia: Y sí, no sé, estoy en duda, porque llegamos a la conclusión de que hay un final...
Marisel: Que hay un tope...
Profesor: Ahora yo les pregunto: ¿se acuerdan cuando dimos los reales en la recta? ¿Qué decíamos? Que entre 1 y 2 ¿cuántos números hay?
Lucía, Marisel, Ladislao: Infinitos.

El docente toma la decisión de intervenir en la discusión porque es su "responsabilidad orientar a los alumnos en la búsqueda de relaciones equivalentes que demuestren lo que se quiere demostrar" (Itzcovich, 2005, p. 54); si bien lo que se pretende es que puedan validar las relaciones que establecen, este entramado de relaciones no es evidente para los alumnos. Al identificar que los alumnos tienen puntos de vista contradictorios, con sus intervenciones, el docente les está diciendo implícitamente que no se pueden plantear cuestiones contradictorias cuando se trabaja en matemática y en la demanda de justificaciones está expresando: es necesario argumentar lo que se afirma.

Dentro de esas decisiones, el docente analiza los conocimientos que disponen los alumnos y los necesarios para abordar la tarea propuesta, una vez resuelto esto determina qué tarea es conveniente para comenzar con la producción de conjeturas (entre 1 y 2 ¿cuántos números reales hay?) y cómo resolver los problemas didácticos que surgen cuando los alumnos han entrado en el juego de la deducción.

Lucía: Llega a un punto, pero entre la distancia hay infinitos, o sea, se pueden armar infinitos triángulos. Entonces, ¿cuál es la respuesta?
Marisel: Hay infinitos triángulos, pero hay un tope, pero, pero hay infinitos, pero hay un tope... ¡las dos cosas!
Ladislao: Pero entonces no hay infinitos triángulos si hay un tope de triángulos.
Marisel: O sea, hay infinitas medidas, nosotros sabemos que entre un grado y otro hay infinitas medidas.
Ladislao: Y tenías infinitos triángulos.
Marisel: Pero hay un tope porque no podés hacer un ángulo de 0 grados y de 180 grados.
Florencia: Pero entre uno y dos también hay un tope, pero también hay infinitos entre medio.

Se plantea en los alumnos el conflicto entre el infinito actual y el potencial. Esto puede visualizarse en el siguiente diálogo: "*hay infinitos triángulos, pero hay un tope, pero hay infinitos, pero hay un tope... ¡las dos cosas!*" y "*pero entonces no hay infinitos triángulos si hay un tope de triángulos*". Notemos que cuando dicen que hay infinitos pero con un "tope" están dando la concepción de totalidad, de unidad, del todo, hay un atisbo del infinito actual, puede notarse en los diálogos que se presentan más claramente en Marisel, Lucía y Florencia. Pero además, están dejando deslizar que, si bien el conjunto es infinito, el conjunto de sus elementos está entre algunas cotas. Están intuyendo la existencia de un conjunto de infinitos elementos pero acotado.

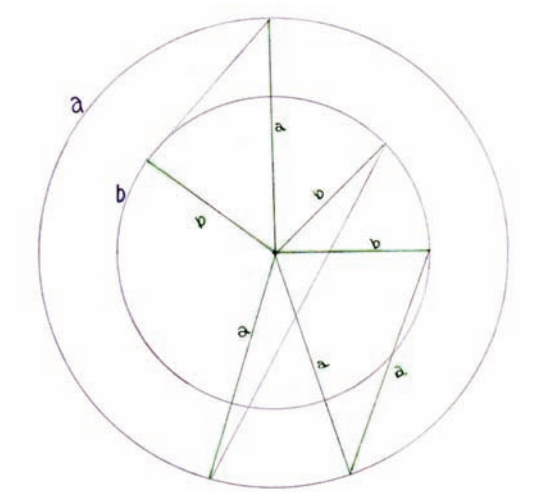
De estas dos acepciones del infinito, el potencial aparece muy temprano, tanto en la evolución histórica de las ideas, como en el desarrollo intelectual del individuo. Además del infinito asociado al conteo, los niños, desde pequeños, son capaces de advertir que hay eventos cíclicos, como la sucesión del día y la noche, que se repiten indefinidamente sin que parezcan tener fin. Más tarde, a partir de las operaciones prácticas de medir, comienza la preparación del camino para la noción de variación continua. "Este infinito aparece muy pronto en el decurso del desarrollo conceptual sin que se manifiesten conflictos graves con la intuición y permanece largo tiempo sin evolucionar. No hay experiencias escolares elementales que favorezcan un cambio a una nueva conceptualización" (Waldegg, 1996, p. 110).

Cuando los alumnos expresan "*hay infinitos triángulos, pero hay un tope*", logran establecer la relación que les permite conjeturar que son infinitas las posibilidades. Descubren la noción de que el conjunto acotado puede ser infinito.

Grupo 5

> *Julia: Llegamos a la conclusión de que, a través de un círculo, se pueden hacer millones, o sea, muchos, pero para mí no son infinitos o sea, el círculo tiene un límite, pero para ellas sí son infinitos.*

Figura 1



Milagros: Porque marcamos el segmento con el compás y nos dimos cuenta de que, si haces todo el círculo o circunferencia, la raya puede ir para cualquier lado (considera la circunferencia con centro en un extremo del segmento de menor longitud y de radio dicho segmento) *y, haciendo el segmento más grande, haces la otra parte del triángulo* (considera una circunferencia concéntrica con la anterior y de radio el otro segmento) *y se forman varios, pero no sabemos si millones o infinitos, para mí son infinitos, porque imagínate que con la regla se pueden acá, entre este espacio y este espacio* (considerando dos puntos de la circunferencia, la de menor radio y señalando el arco que éstos determinan) *hacer infinitos y se pueden hacer distintos segmentos para cualquier lado.*
Profesor: ¿Y por qué para vos no son infinitos, Juli?
Julia: Para mí el círculo tiene un límite, o sea, tiene un final, para mí son muchos millones pero no infinitos.

Nuevamente surge la duda con respecto al infinito actual. "En este caso, el infinito potencial es un obstáculo para comparar dos conjuntos" (Waldegg, 1996, p. 118). Cuando se plantea "entre este espacio y este espacio hay infinitos", algunos integrantes no pueden establecer que, entre los extremos del arco de circunferencia considerado, hay infinitos puntos que permiten por tanto construir infinitos triángulos. Puede advertirse que los integrantes del grupo no lograron llegar a una respuesta única. En función de lo realizado por los estudiantes en su trabajo individual, podemos inferir, por lo que sostiene Milagros, que estarían advirtiendo que el conjunto de los números reales y los conjuntos de números reales acotados tienen el mismo cardinal.

Grupo 2

Lautaro: Acá estuvimos haciendo bastante debate y llegamos a un acuerdo.
Profesora: A ver.
Lautaro: Son miles de triángulos diferentes que se pueden hacer, porque supongamos que el ángulo éste lo hiciéramos de 1º y lo podés hacer de 2º, de 3º, de 4º, ... y hasta 179, ... y así miles de veces.
Profesora: ¿El resto está de acuerdo?
Micaela: Pero tampoco son infinitos, porque en algún momento se van a terminar las formas, o sea, pueden variar, pero...

Virginia: Primero pensamos que eran tres, después infinitas y, por pensamiento lógico, después vimos que no.
Micaela: Tomas dos segmentos y los vas abriendo y cerrando y te quedan infinitas, en algún momento se van a terminar los ángulos para variar.
Profesora: ¿Por qué miles? ¿Cómo hacen para determinar los miles?
Lautaro: Se pueden hacer bastantes, miles, no los contamos.

La idea que los estudiantes manifiestan sobre los conjuntos infinitos está plagada de contradicciones, pues hablan de miles e infinitos como si fueran expresiones equivalentes. Como sostienen Moreno y Waldegg (2008a), cuando los estudiantes hablan de conjuntos infinitos, lo hacen sobre una idea constructivista que es generadora de la noción potencial de infinito.

Grupo 7

Julieta: Nosotros dijimos que puede haber un montón de triángulos, pero que no superen a 180 grados, porque si lo llegan a superar, queda una línea recta, un segmento, claro tenés que mover el segmento hasta llegar a distintas medidas moviendo el segmento y pueden hacer un montón de triángulos, pero que no se interpongan, porque si no, queda plano (haciendo referencia a que los segmentos considerados no estén contenidos en semirrectas opuestas).
Yamila: Que no queden segmentos superpuestos (haciendo alusión al caso de que los segmentos considerados estén incluidos en la misma semirrecta).
Julieta: O sea, no hay un número exacto de todos los triángulos que se puedan armar, no podemos llegar, pero...
Matías: No son infinitos, que es otra cosa, o sea, llegan hasta cierto punto. No son infinitos.

Los estudiantes poseen una serie de intuiciones locales al respecto del infinito que aplican según la situación. Waldegg (1996) sostiene que "Un conjunto acotado, sobre todo si está encuadrado en un contexto geométrico, difícilmente se acepta que tiene un número infinito de elementos" (p. 119).

La decisión de no intervenir del docente tiene que ver con que en el grupo no se plantea la posibilidad de existencia de infinitos triángulos.

Los estudiantes del grupo 2 y del grupo 7 no logran visualizar que los conjuntos acotados pueden ser infinitos. Las respuestas de los estudiantes parecen manifestar que, para poder afirmar que un conjunto es infinito, hace falta "que los conjuntos posean una 'estructura de fila', a fin de que se pueda disponer de un espacio ilimitado para 'colocar' los elementos del conjunto" (Waldegg, 1996, p. 116).

Puesta en común

Transcribimos lo expuesto por el grupo 7, pues a partir de esto se genera una interacción entre los alumnos referida a las distintas conjeturas formuladas individual o grupalmente. Lo ocurrido se presenta a continuación.

Grupo 7

> *Inés: Nosotros llegamos a la conclusión de que no hay infinitos triángulos, de que hay un número determinado de triángulos, depende de la mirada, por ejemplo, los grados solamente puede haber de 0 grados a 180 grados, depende de la variación de minutos y segundos, como dijo Manuela, pero en forma sí puede haber infinitos, porque depende de cómo vos lo pongas, o sea, la inclinación del triángulo, puede llegar a haber infinitos, pero nosotros llegamos a la conclusión de que no hay infinitos, de grado no.*

Podríamos decir que el desacuerdo que se manifiesta en lo presentado por Inés tiene que ver con que los integrantes del grupo hacen referencia al aspecto potencial del infinito. Waldegg (1996) sostiene que un ejemplo de este aspecto del infinito "es la serie de los números naturales (los números 'para contar'), en donde siempre es posible hallar el sucesor de un número dado, no importa qué tan grande sea este número, aunque siempre el número y el sucesor son finitos" (p. 110).

> *Sol: ¿Y por qué no hay infinitos? ¿Cómo te diste cuenta, qué proceso hiciste para determinar que no hay infinitos?* (Plantea una alumna del grupo clase.)

Sol, con esta última pregunta, intenta que Inés fundamente lo que afirma. Para favorecer este tipo de trabajo en el aula, es necesario que el docente gestione

> ... situaciones de enseñanza que devuelvan la responsabilidad matemática de las producciones a los alumnos, es decir, que en cierto sentido, el docente "no participe" de la toma de decisiones durante la resolución del problema propuesto, favoreciendo la construcción de pruebas autónomas por parte de los alumnos (Chemello y Crippa, 2011, p. 67).

Grupo clase

A continuación se expone la discusión del grupo clase:

Inés: Porque hay un número determinado, porque dice de 0 grados varía de minutos a segundos hasta 180 grados, menos de 180 hasta 179 grados con minutos y segundos no hay infinitos entonces.
Sol: Sí, pero las milésimas y las décimas...
Marisel: No, pero lo que dijo Ladislao de que no se incluye al 180, pero sí hay infinitos...
Ladislao: Entre el segmento de los 179 de inclinación hasta los 180 grados va a haber infinitos grados de inclinación, pero mientras que no supere los 180 grados, podés tener infinitos segmentos que no lleguen a los 180 grados de inclinación.
Profesor: ¿Y el grupo qué dice?
Julieta (del mismo grupo que Inés): *Nosotros pensamos que, como ahí te está dando el grado y un triángulo tiene que ser hasta 180, pensamos que no hay infinitos porque se sabe que hasta donde...*

Julieta se resiste a considerar que un conjunto acotado pueda ser infinito, son cuestiones que van contra la intuición que acepta que los conjuntos infinitos tienen una "estructura de fila" que no es posible visualizar en los conjuntos acotados.

Marisel: Pero entre el grado uno y el grado dos hay infinitas medidas, hay un tope, pero nunca se llega porque hay infinitas medidas.

Sol: Entonces entre grado y grado hay infinitos números, hay milésimas y milésimas, pero, si vos decís que hasta 180 se alcanza, es como que tiene un fin y no... no sé si me entienden. En grado es no más, se mantiene hasta 180, pero los minutos y segundos y todo eso tenés infinitos para hacer triángulos.

Sol logra visualizar que, si bien los valores de los números aumentan temporalmente en la serie numérica, la representación espacial corresponde a puntos cada vez más cercanos. De este modo, es posible comenzar a desestabilizar el pensamiento intuitivo y producir un acercamiento a resultados más "absurdos" como los que propone el análisis matemático.

Ladislao: Porque no puede llegar hasta 180 porque ya no podés hacer un triángulo, te queda un llano, una línea recta.
Profesor: ¿Y entonces?
Inés: Y puede, o sea, tomando los grados no sé si hay infinitos, pero formas sí puede llegar a haber... o sea, teniendo dos segmentos, sí podés hacer miles y miles con distintas medidas.
Profesor: ¿Y por qué no infinitas?
Inés: Depende del grado, no creo que haya infinitos porque ya hay una medida establecida de 0 hasta 179 grados.

Puesto que existen infinitas posibilidades para determinar un triángulo, dados dos segmentos, la dificultad que se les presenta a los alumnos es que el ángulo que deben formar estos dos segmentos debe ser menor que 180°; al ser acotado el conjunto, tienen dificultad para determinar que tiene infinitos elementos. Waldegg (1996) sostiene que

> La comparación entre dos conjuntos infinitos se hace más difícil si un conjunto es acotado y el otro no. En este caso, el infinito potencial es un obstáculo para comparar dos conjuntos. El infinito potencial se hace evidente en el conjunto no acotado que permite disponer de las posiciones necesarias para continuar un proceso. Al contrario, este infinito permanece oculto en el conjunto acotado, produciendo con ello una parálisis ante el problema (p. 119).

Profesor: ¿Y entonces? ¿Por qué ella dice una cosa y el resto dice otra? Tenemos que acordar una respuesta entre todos.
Santiago: Y hacemos fácil: te preguntamos a vos y ¡listo!
Ladislao: Traemos una compu, buscamos en google o wikipedia y ¡listo!

En general, es el docente quien asume la responsabilidad de legitimar el conocimiento, esto hace que los alumnos consideren que no tienen que hacerse cargo de validar sus producciones.

Profesor: ¿Por qué no lo pensamos y lo razonamos entre todos? Busquemos una respuesta entre todos... ¿quién le puede contestar que piense diferente de Inés?

En este caso el docente devuelve la responsabilidad a los alumnos sobre la validación de lo que afirman. Interviene durante el desarrollo de la clase para que los alumnos fundamenten sus afirmaciones utilizando argumentos matemáticos trabajados anteriormente, podríamos decir, tal como plantea Itzcovich (2005), que "se está intentando 'acercar' a los alumnos a una visión más próxima del resultado, muy probablemente por suponer que los alumnos estarían en condiciones de interpretar un tratamiento deductivo" (p. 46).

Sol: Para mí hay infinitas milésimas, pero no infinitos grados, por algo te dice que tenés 180 grados, milésimas hay infinitas, grados hasta 180...

Se manifiesta en los alumnos un problema con la unidad de medida "*para mí hay infinitas milésimas pero no infinitos grados*", desconocen o se resisten a trabajar en el sistema mixto (sexagesimal y decimal) de medición de ángulos, es decir, no pueden reconocer que la amplitud de un ángulo puede expresarse como una parte entera en grados sexagesimales y las partes conmensurables.

Ladislao (contestándole a Sol): *Eso, para hacer un triángulo. Porque tenés 360 grados en la circunferencia, en total hay 360.*
Yamila: Pero si te pasas de 180, para abajo también podés armar un triángulo.
Ladislao: Pero si le das vuelta, te queda un triángulo del mismo grado de inclinación.

Se observa que los alumnos reconocen que los triángulos simétricos, por ser iguales, no influyen en el conjunto solución del problema.

Profesor: ¿Y entonces?
Julieta: Hay infinitos.
Profesor: ¿Inés, qué decís?
Inés: Ahí sí, si lo tomas así, sí se pueden formar infinitos triángulos que tengan grados, minutos y segundos.
Profesor: ¿Y segundos nada más?
Inés: Y lo que sigue, décimas y eso...
Profesor: Los demás integrantes del grupo de Inés, ¿qué piensan?
Julieta: Sí, que de grados no hay infinitos porque hay un tope, hasta 179.

Nuevamente se manifiesta la idea de que, si un conjunto es acotado, no puede ser infinito. Los estudiantes tienen la idea incorrecta de pensar lo infinito como lo no acotado. La concepción del infinito como lo que no tiene "fin", en el sentido de límite.

Profesor: ¿Hasta 179 grados nada más?
Julieta: No debe superar los 180, pero 179 con minutos y segundos...
Profesor: ¿Y minutos y segundos nada más?
Julieta: Y milésimas y centésimas...
Federico: Y milésimas de segundo y décimas de segundos.
Yamila: No hay infinitos grados, pero hay infinitas centésimas y milésimas hasta 180 grados...

Nuevamente puede verse que los alumnos se resisten a trabajar con submúltiplos del grado.

Profesor: Pero la consigna no pregunta hasta cuántos grados de inclinación se pueden construir, pregunta cuántos triángulos se pueden construir.
Varios alumnos: Infinitos.
Profesor: ¿Y la opinión del grupo 7?
Julieta: Y, porque nosotros tomamos del punto de vista de los grados nada más, no los minutos y los segundos y las milésimas y centésimas, eso no lo tomamos, tomamos los grados.

Profesor: O sea, ustedes piensan en un grado o dos grados, no tienen en cuenta que entre un grado y dos...
Inés: Hay infinitos.

La discusión que se genera al confrontar colectivamente el trabajo personal de los alumnos da lugar al planteo de un nuevo problema no planificado en el diseño de la propuesta: la existencia de un conjunto infinito acotado, que si bien se manifestó en algunos grupos, otros no se plantearon esta posibilidad. El papel del docente regulando la discusión es fundamental, tanto para que surja el problema como para su tratamiento.

> Si el discurso del docente no se apoyara en la problematización que surge a partir de las discusiones y de los intercambios, cambiaría completamente de sentido para los alumnos, ya que no estaría respondiendo a preguntas que han tenido la oportunidad de formularse ni se basaría en conocimientos que han tenido la posibilidad de elaborar (Sadovsky, 2005, p. 90).

Profesor: ¿Cuántas posibilidades hay entre un grado y dos?
Varios alumnos: Infinitos.
Lautaro: No, no... porque hay un tope.
Santiago: Sí, hay infinitos.
Lautaro: No, porque puede haber billones de billones, pero algún límite tiene que tener.
Santiago: Y es lo mismo que los números que tenés infinitos y vos podés seguir contando y contando...

Santiago y Lautaro, están usando lo que Waldegg (1996) denomina argumentos infinitistas, que "se refieren principalmente a un infinito potencial, en el que predomina la idea de un *proceso* que se puede repetir o continuar indefinidamente" (p. 111).

Profesor: Yo les pregunto, ¿cuando trabajamos los números reales en la recta, entre uno y dos, cuántos números reales podemos encontrar?
Varios alumnos: Infinitos.
Profesor: ¿Y hay un tope y llegas al dos y, sin embargo, cuántos hay entre uno y dos?
Varios alumnos: Infinitos.

Profesor: ¿Y entonces?
Alumnos:...

Las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales, si bien todos los estudiantes comparten que entre el real 1 y el real 2 hay infinitos números reales, frente a una situación análoga como entre un ángulo de 1° de amplitud y uno de 2° de amplitud no reaccionan de manera similar.

Profesor: Con la circunferencia que hicieron las chicas, si vos tomás el segmento de recta y construís la circunferencia, a lo mejor se visualiza mejor.
Varios alumnos: Sí hay infinitos.

REFLEXIONES

Analizando el diálogo que se establece en la puesta en común, se puede conjeturar que, si bien los alumnos aceptan y responden que hay infinitas soluciones, permanece la resistencia a aceptar la idea de que un conjunto acotado puede tener infinitos elementos. Moreno y Waldegg (2008a) sostienen que

> Detrás de la noción de los estudiantes sobre los "conjuntos infinitos" sólo está la idea constructivista que da origen al **infinito potencial** que, debido a sus propias características, implica un proceso **irreversible** y genera una obstrucción para la actualización del proceso (pp. 27-28).

Como se expresó anteriormente, el problema del estudiante al enfrentarse con los conjuntos infinitos es aceptar que el todo puede ser igual a la parte, lo que supone para el alumno una verdadera contradicción.

> Los conjuntos infinitos ofrecen la posibilidad de establecer una biyección entre dos de ellos cuando uno es subconjunto propio (completamente contenido) del otro. Esta característica, que hoy nos sirve para definir los conjuntos infinitos, tiene como consecuencia lógica la negación del axioma *El todo es siempre mayor que la parte*, ya que, a partir de la correspondencia uno a uno se puede establecer la igualdad del todo y la parte (Waldegg, 1996, p. 112).

Otro conflicto que se evidencia es que la noción de unidad de medida es tan fuerte que no les permite a los estudiantes considerar sus partes. El trabajo con los grados como unidad de medida imposibilita que los alumnos consideren la medición como un proceso continuo, pues aún está ausente en ellos el significado entre las transiciones de grados a radianes a reales.

La divisibilidad de la unidad tiene sus raíces en el contexto de los procesos de medición, mediante los cuales un número se halla asociado a una magnitud. Saucedo y Mántica (2011) sostienen que "hay que trabajar la medición con las aproximaciones y los encuadramientos para evitar de este modo que los alumnos crean que las medidas son enteras" (p. 91). Desde el punto de vista griego, pensar en la división de la unidad era algo que no tenía sentido, ya que perdería su esencia.

> La imposibilidad de dividir la unidad señala la esencia de la cantidad discreta, como fue definida por Aristóteles. Las subdivisiones de una cantidad discreta no podrían ir más allá de la unidad y, como resultado de ello, solamente se podría subdividir un número finito de veces (Moreno y Waldegg, 2008b, p. 47).

Del análisis de lo actuado, podríamos decir que algunos estudiantes son conscientes de la inestabilidad de sus fundamentaciones y saben que, en muchos casos, llegan a situaciones contradictorias. Por ejemplo, considerar que son millones de triángulos y afirmar por tanto que son infinitos, o bien afirmar que son infinitos, para luego remarcar que hay uno y otro y otro triángulo considerando discreto el conjunto obtenido.

El grupo 5, cuando utiliza el arco de circunferencia para tratar de convencer al resto de la clase de sus conclusiones, utiliza una relación que "supone una idea abstracta de un punto sin dimensión, y la generalización de la construcción dada a todos los casos posibles" (Moreno y Waldegg, 2008a, p. 34). El contexto geométrico basado en la verificación empírica parece impedir la necesidad de un mayor nivel de conceptualización.

En cambio, el grupo 3 intenta establecer una relación entre los puntos de la recta y los números reales considerando el intervalo (1, 2). En este caso, puede expresar el concepto actual de infinito, pero cuando intenta llevar este razonamiento al problema, considera lo que ocurre entre 1° y 2° y, en este caso, algunos estudiantes no pueden establecer una conexión con el razonamiento anterior porque éste está "anclado a la percepción de la representación geométrica" (Moreno y Waldegg, 2008a, p. 34), agravada esta situación por la noción de discrecionalidad que le proporciona la unidad de medida. Una comparación que depende de los métodos empíricos de verificación muestra uno de los rasgos de la etapa en la que no se tiene la categoría actual del infinito. Parece que la intuición sobre el infinito se modifica al cambiar el contexto en el que se presenta.

Coincidentemente con el estudio realizado por Waldegg (1996), podemos observar que hay factores que tienen una fuerte influencia en la comprensión de los conjuntos infinitos, y es que la comparación entre dos conjuntos infinitos se hace más difícil si un conjunto es acotado y el otro no. También existe un rechazo a usar el criterio de la biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, aun en el caso de que haya instrucción al respecto.

En coincidencia con Waldegg (1996), encontramos que los estudiantes poseen algunas intuiciones respecto al infinito que aplican según la situación y que las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales. Aun cuando el pensamiento intuitivo es resistente a los cambios, podemos apreciar que, cuando los estudiantes sostienen que "entre grado y grado, hay infinitos", o "que tienen un fin y no" o cuando sostienen "hay un tope, pero nunca se llega, porque hay infinitas medidas" o "dentro de este límite tenés infinitas posibilidades", se están aproximando a la idea de que "los valores de los números aumentan temporalmente en la serie numérica y la representación espacial corresponde a puntos cada vez más cercanos" (Waldegg, 1996, p. 119). Podríamos decir que se produce en los estudiantes un acercamiento a la idea de infinito actual.

De lo expuesto por los integrantes de los grupos 3 y 5, que como se expuso anteriormente están más próximos a la idea de infinito actual, podemos decir que las discusiones se centran principalmente en dos cuestiones: decidir si un conjunto acotado puede ser infinito, y si el conjunto de los reales y los reales acotados tienen el mismo cardinal. En el primer caso, algunos estudiantes logran conjeturar que los conjuntos acotados pueden ser infinitos; respecto a la segunda cuestión, podemos decir que sólo una estudiante logra un atisbo de ésta.

El infinito es un objeto matemático bien definido, pues en el siglo XX y lo que va del XXI, muchos matemáticos se han dedicado a ello, si bien esto no significa que el concepto se ha vuelto más accesible para el estudiante, "El infinito, potencial o actual, es una construcción intelectual que implica un alto grado de abstracción" (Waldegg, 2008, p. 111). La comprensión de las estructuras conceptuales previas de los estudiantes no propicia la construcción de estos conceptos, por el contrario, es un obstáculo para ello. Por esa razón, consideramos que debe ser objeto de enseñanza, debe tenerse en cuenta que hay muchos puntos de coincidencia en el desarrollo del concepto en el estudiante y en su desarrollo histórico. El infinito no siempre se incluye explícitamente en los programas de enseñanza de la matemática en la escuela secundaria; sin embargo, muchos conceptos de la aritmética, el cálculo y el análisis podrían entenderse mejor si se discutieran las diversas formas en que el infinito subyace.

Por lo expuesto, consideramos importante continuar esta línea de trabajo; por ejemplo, estudiando lo presentado por cada grupo como conclusión,[4] teniendo en cuenta la primera categoría realizada según el conjunto solución del problema, observando lo fundamentado por cada uno de los cuatro grupos que afirman que se pueden construir infinitos triángulos y analizando, en cada caso, la concepción de infinito puesta en juego. En una primera aproximación, que requiere una profundización en función de los diálogos y lo expuesto en la discusión del grupo clase, se podría pensar en dos categorías: por un lado, los grupos que logran una aproximación local al infinito y, por otro, aquellos que, a pesar de considerar que el conjunto solución es infinito, por el modo de justificarlo puede verse que se refieren a un infinito potencial, en el que predomina la idea de proceso que se puede repetir o continuar indefinidamente.

Los grupos 3 y 5 utilizan en un caso un segmento y, en el otro, un arco de circunferencia, es decir, trabajan en un contexto geométrico para validar sus afirmaciones, "los conjuntos que se van a comparar son continuos, lo que significa que los métodos de 'conteo' usados para los conjuntos discretos no se pueden emplear" (Moreno y Waldegg, 2008a, p. 30). Podríamos decir que, en estos casos, estamos más próximos a la idea del infinito actual, ya que "La situación geométrica nos lleva a razonar de modo diferente al empleado en el contexto de los conjuntos numéricos" (Moreno y Waldegg, 2008a, p. 30). No obstante, como el contexto geométrico está basado en la verificación empírica, no permite un nivel más formal de validación.

Por el contrario, los grupos 4 y 8 lo que hacen es una generación efectiva de los elementos del conjunto. En este caso, los estudiantes construyen una secuencia con la que producen los elementos del conjunto. Sostienen que "se pueden construir infinitos triángulos; si movemos uno de los segmentos, siempre vamos a tener otro triángulo; si lo movemos nuevamente, vamos a tener otro y, si lo inclinamos un poco, otro más". El otro grupo dice "según el ángulo que vos le des a los triángulos con los segmentos que te dieron", es decir, van generando

[4] Véase el Anexo II.

un triángulo y luego otro y otro.... Moreno y Waldegg (2008a) sostienen que "una concepción basada en un proceso de generación efectiva de los elementos de un conjunto impide una aproximación 'actual' al problema del infinito" (p. 30).

> La resistencia que presentan estas concepciones ante distintos intentos instruccionales muestra que estamos ante un obstáculo didáctico con raíces epistemológicas. Evidentemente, no se puede concluir de ahí que, con la sola "maduración", el estudiante alcanzará un nivel de conceptualización conforme al cuerpo teórico de la matemática. Es necesaria la intervención de procesos didácticos bien planificados que tengan en cuenta los obstáculos que el estudiante tiene que vencer (Waldegg, 1996, p. 119).

Es conveniente que, a partir de la actividad de los estudiantes, generada por la tarea propuesta por el docente, surjan interrogantes no previstos. Consideramos que es importante tenerlos en cuenta, ya que esto hace que el alumno se sienta productor de conocimiento, aunque no tenga las herramientas suficientes para resolverlos o darle una respuesta definitiva según las normas de rigor de la comunidad matemática, que considere la actividad matemática no como mirar y descubrir, sino como crear, producir, fabricar.

AGRADECIMIENTOS

A directivos, docentes y alumnos de la comunidad educativa de la escuela número 3109, Sagrada Familia, de la ciudad de Santa Fe, por su aporte al trabajo de investigación. A la Dra. Liliana Nitti por las lecturas y comentarios que contribuyeron al enriquecimiento del trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Broitman, C., y H. Itzcovich (2008), "La geometría como medio para 'entrar en la racionalidad'. Una secuencia para la enseñanza de los triángulos en la escuela primaria", en *Enseñar Matemática. Nivel Inicial y Primario*, vol. 4, pp. 55-86.

Chemello, G., y A. Crippa (2011), "Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible?", en A. Díaz (coord.), *Enseñar matemáticas en la escuela media*, Buenos Aires, Biblos.

Elliot, J. (1990), *La investigación-acción en Educación*, Madrid, Morata.

Itzcovich, H. (2005), *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Mántica, A., A. Carbó y M. Götte (2011), *Indagar y persuadir... ¿Cómo convencernos y convencer?,* ponencia presentada en el 3er. Congreso Uruguayo de Educación Matemática, Montevideo, publicado en actas, pp. 581-589.

McKnight, C., A. Magid, T. Murphy y M. McKnigt (2000), *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*, Rhode Island, American Mathematical Society.

Moreno, L., y G. Waldegg (2008a), "La evolución conceptual del infinito matemático actual", en I. Fuenlabrada (comp.), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*, México, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 15-41. [Publicación original: "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity", *Educational Studies in Matehmatics*, vol. 22, núm. 3, 1991, pp. 211-231.]

___________ (2008b), "Una historia epistemológica de número y variación", en I. Fuenlabrada (comp.), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*, México, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 43-62. [Publicación original: "An Epistemological History of Number and Variation", en V. Katz (ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*, Mathematical Association of America, 2000.]

Penalva, M. C. y S. Llinares (2011), "Tareas matemáticas en la educación matemática", en J. Goñi (coord.), *Didáctica de las Matemáticas*, vol. II, Barcelona, Graó, pp. 27-51.

Sadovsky, P. (2005), *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Saucedo, G. y A. Mántica (2011), "Qué priorizamos cuando medimos", en A. Mántica y M. Dal Maso (comps.), *La geometría en el Triángulo de las Bermudas. Reflexiones y aportes para recuperarla en el aula*, Santa Fe, Argentina, Ediciones UNL, pp. 89-94.

Waldegg, G. (1996), "Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol. 1, núm. 1, pp. 107-122.

___________ (2008), "El acercamiento de Bolzano a *Las paradojas del infinito:* implicaciones para la enseñanza", en I. Fuenlabrada (comp.), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*, México, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 109-134. [Publicación original: "Bolzano's Approach to the Paradoxes of Infinity: Implication for Teaching", *Science & Education*, vol. 14, 2005, pp. 559-577.

ANEXO I

Tarea 1

Objetivo: Enunciar la desigualdad triangular.

Problema 1

Dados estos dos segmentos, usando la regla no graduada y el compás, construye un triángulo:

b) Construye otro triángulo distinto del anterior con esos mismos dos lados.
c) ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir? ¿Por qué?

Problema 2

Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos dos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

Problema 3

A continuación se proponen medidas de segmentos. Decidan en cada caso si con ellas se puede o no construir un triángulo.

3 cm	2 cm	1 cm
8 cm	12 cm	5 cm
8 cm	4 cm	4 cm
7 cm	1 cm	2 cm

Con estos segmentos no es posible construir un triángulo: 8 cm, 3 cm, 2 cm. ¿Qué explicación darían de por qué no se puede?

Al finalizar esta actividad, el docente institucionalizará la desigualdad triangular.

Tarea 2

Objetivo: que los alumnos puedan determinar cuáles son las condiciones necesarias para construir un triángulo.

Problema

Se solicita a cada grupo que dibuje en una hoja blanca un triángulo y que redacte un mensaje para que el grupo receptor pueda construir un triángulo igual.

Se intercambian los mensajes y se le entrega a cada grupo una hoja de papel de calcar para que realice el dibujo según las condiciones expresadas en el mensaje y luego lo devuelva al grupo emisor para que verifique si la construcción realizada es correcta. En esta instancia no se realiza ninguna restricción para la información del mensaje.

Observación: en el caso de que en los mensajes no se propongan algunas de estas posibilidades: tres lados, dos lados y un ángulo; un lado y dos ángulos y tres ángulos, el docente planteará una actividad de modo que pueda discutirse la que falta y determinar cuáles son las adecuadas. Por ejemplo, si todos los grupos plantean en su mensaje la longitud de los tres lados, se propondrá una actividad donde se pida redactar un mensaje donde no se pueda dar la longitud de los tres lados

Tarea 3

Objetivo: que los alumnos puedan determinar cuáles son las condiciones mínimas para construir un triángulo.

Problema

Dibuja un triángulo que no sea isósceles ni acutángulo y redacta un mensaje con la menor cantidad de datos posibles para que el otro grupo pueda construir uno igual.

Tarea 4

Objetivo: enunciar los criterios de congruencia de triángulo.

Problema

Dibuja un triángulo cualquiera y redacta al menos tres mensajes distintos para que otro grupo pueda construir un triángulo igual a éste.

Observación: se enuncian tres o cuatros criterios de congruencia de triángulos, en función de lo trabajado en el problema 2 para el caso de dos lados y un ángulo, si se decide tomar sólo dos lados y el ángulo comprendido o se analiza también el caso de dos lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados.

Los criterios de congruencia son LLL, LAL y ALA, y para triángulos rectángulos también ALL.

ANEXO II

Conclusiones presentadas por los grupos en la puesta en común:

G1: Nosotros llegamos a la conclusión de que se pueden construir diferentes triángulos de diferentes tamaños, porque se pueden usar diferentes ubicaciones de los lados y diferentes grados de inclinación en el triángulo, o sea, no hay infinitos porque los triángulos van a llegar hasta 179°.

G2: Hay millones de grados para variar la inclinación, porque el grado no es la medida mínima de variación, porque tenés los minutos, los segundos y las milésimas para variarlo. Aunque sea imperceptible a la vista, hay millones de posibilidades para armar un triángulo con dos segmentos, aunque sean muy parecidas.

G3: Llegamos a la conclusión de que podemos encontrar infinitos triángulos usando estas dos medidas (haciendo referencia a los segmentos dados), pero que el grado de inclinación no sea superior o igual que 180°, porque así no formaríamos un triángulo, o sea, todos los grados de inclinación que tengas desde 180° sin incluir para atrás es la cantidad de triángulos que podés hacer, o sea, infinitos triángulos.

G4: Se pueden construir infinitos triángulos; si movemos uno de los segmentos, siempre vamos a tener otro triángulo, si lo movemos nuevamente, vamos a tener otro y si lo inclinamos un poco más, otro.

G5: Llegamos a la conclusión de que también son infinitos los triángulos, y lo voy a explicar a través de este círculo (considerando la figura 1), nosotros sacamos la conclusión, porque si ustedes hacen un círculo con la medida del segmento (un segmento de los dados como radio de la circunferencia), el círculo completo y éste más chico (circunferencia concéntrica con la anterior de radio el segmento de menor longitud), pueden trazar distintas rectas hacia cualquier punto del círculo hasta donde llegue el segmento (determinado por el centro de la circunferencia y un punto de ésta) y... se pueden formar infinitos triángulos y son infinitos porque entre este espacio y este espacio (extremos de un arco de la circunferencia de menor radio) puede haber infinitos puntos donde puede ir la recta (radio de la circunferencia menor).

G6: Se pueden armar diferentes tipos de triángulos dependiendo de la ubicación de cada segmento, la medida que tenga y la inclinación que le des, porque puede ser con diferentes grados, o sea, si lo vas moviendo, te queda con diferentes grados.

G7: Nosotros llegamos a la conclusión de que no hay infinitos triángulos, de que hay un número determinado de triángulos (en el cuerpo del trabajo se expone completo).

G8: Llegamos a la conclusión de que, según el ángulo que vos le des a los triángulos con los segmentos que te dieron, se pueden obtener infinitos triángulos, porque si vos ubicas el segmento más corto abajo y le das una inclinación diferente al más largo o al corto, te va a quedar diferente, o sea, que vas a tener infinitos triángulos.

DATOS DE LAS AUTORAS

Ana María Mántica
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral e Instituto del Profesorado Núm. 8 de la ciudad de Santa Fe, Santa Fe, Argentina
ana.mantica@gmail.com

Ana Laura Carbó
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral y Docente de Matemática escuelas secundarias de la ciudad de Santa Fe, Santa Fe, Argentina
analauracarbo@hotmail.com