ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia y María Teresa González Astudillo

Resumen: Los estudiantes no adquieren la capacidad de visualización de forma espontánea, por tanto su desarrollo debe considerarse desde los primeros grados. Para ello deben determinarse cuáles son los contenidos que propician la adquisición de esta actividad cognitiva. El área de regiones poligonales puede ser uno de los contenidos idóneos para el desarrollo de la visualización, ya que para su adquisición se recurre al uso de figuras que involucran al alumno en actividades en las que se requiere su uso. Puesto que además los libros de texto son un recurso importante en las aulas e influyen en la manera en que el contenido matemático se enseña en la escuela, debe considerarse su estudio y análisis. En este sentido, caracterizar las tareas de áreas de regiones poligonales según los tipos de visualización que los libros de texto promueven en su desarrollo o comprensión es un primer aspecto para detectar el papel que cumple la visualización en los textos. En este artículo se presenta una metodología de análisis que permite tal caracterización. Son cinco las categorías de análisis consideradas: operación visual, cambio figural, cambio dimensional, cambio de focalización bidimensional y flujo visual. La aplicación del método propuesto se ilustra mediante el análisis de una tarea de un libro de primer grado de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO).

Palabras clave: visualización, área de regiones poligonales, libros de texto, metodología de análisis.

Abstract: Students do not acquire the visualization ability spontaneously, therefore its development must be considered from the earliest levels. Then what content is necessary to facilitate the acquisition of this cognitive activity must be

Fecha de recepción: 9 de abril de 2013; fecha de aceptación: 9 de noviembre de 2013.

determined. The area of polygonal regions may be one of the contents suitable for the development of visualization because it resorts to the use of figures involving the student in activities that require their use. Since textbooks are also an important resource in the classroom and they influence on how the mathematical content is taught in school, it should be considered its study and analysis. In this sense, characterizing area of polygonal regions tasks by the type of visualization that textbooks promote for its development or understanding is a first aspect to detect the role of visualization in texts. In this paper we present a methodology for analyzing tasks that allows such characterization. There have been considered five categories of analysis: visual operation, figural change, dimensional changes, bidimensional focus change, and flow change. The application of the proposed method is illustrated by analyzing a task of a first grade math book of Compulsory Secondary Education (ESO).

Keywords: visualization, areas of plane figures, textbooks, methodology of analysis.

INTRODUCCIÓN

Los textos escolares son uno de los materiales didácticos de mayor uso en la planificación, preparación y desarrollo de las clases de matemáticas (González y Sierra, 2004). Desempeñan un papel esencial en la articulación de las exigencias curriculares nacionales con la praxis educativa, al reflejar parcialmente las intenciones de los planes de estudio presentes en los documentos oficiales (Schmidt y otros, 1996); además, son una fuente para identificar el contenido cubierto (Pepin, Haggarty y Keynes, 2001) y el modo en que se presenta en el aula (Cobo y Batanero, 2004). En este sentido, es claro por qué en las últimas décadas la investigación en educación matemática ha desarrollado cierto interés en estudiar cómo promueven los libros de texto la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Según la revisión de la literatura especializada que hemos realizado, son variados los aportes que la investigación en educación matemática ha realizado en torno a cómo se presenta el contenido matemático en los manuales escolares. Entre ellos, se destacan por su cantidad los estudios sobre los aspectos que deben ser considerados en el análisis de los libros de texto; es el caso de sus funciones pedagógicas, los niveles de autoridad, las estructuras de control y las imágenes (Love y Pimm, 1996). De la misma manera, destacan las investigaciones que caracterizan semióticamente las representaciones de los conceptos matemáticos. Kim (2012), por ejemplo, compara según la precisión, la conectividad, la contextualidad y la concisión de las representaciones matemáticas (gráficas cartesianas y figuras geométricas) y pictóricas (fotografías, imágenes, ilustraciones, diagramas y esquemas) de los contenidos de pendiente, medida de ángulos y descomposición en factores primos. Asimismo, se han realizado trabajos desde el punto de vista histórico que analizan la evolución de algunos conceptos matemáticos en los textos escolares (González y Sierra, 2004) y las reformas curriculares implementadas en un país (Li, Zhang y Ma, 2009); mientras que otros centran su interés en las características físicas de los libros y la estructura de las lecciones que determinan el modo en que se presenta un contenido matemático (Alajmi, 2012).

Por otra parte, son pocas las investigaciones realizadas hasta el momento que exploran las actividades y exigencias cognitivas que subyacen en la presentación del contenido matemático. Destacan las realizadas por Delaney, Charlambous, Hsu y Mesa (2007), Li (2000), Lithner (2004), Cabassut (2006) y Mesa (2004, 2010). El primero explora las demandas cognitivas potenciales (memorización, procedimientos sin conexiones y procedimientos con conexiones) y las expectativas puestas en el desempeño (respuesta única, explicación, justificación y evaluación) presentes en las tareas y los ejemplos propuestos en los manuales escolares. Por su parte, Li (2000) establece diferencias entre los requerimientos cognitivos (práctica procedimental, comprensión conceptual, resolución de problemas y requerimientos especiales) de textos escolares de diferentes países. En Lithner (2004) y Cabassut (2006) la preocupación recae, respectivamente, en los razonamientos presentes en la resolución de ejercicios de cálculo y en el análisis del papel de los argumentos de verosimilitud y de necesidad en ejemplos de prueba. En Mesa (2004) se caracterizan las concepciones del concepto de función presentes en los manuales y en Mesa (2010) se pone en evidencia que estos materiales didácticos ejercen control sobre las maneras de proceder en el desarrollo de una actividad matemática.

En relación con la visualización, aún son incipientes los estudios que exploran el papel que esta actividad cognitiva desempeña en la manera en que los libros de texto promueven la enseñanza del conocimiento matemático. Los escasos trabajos identificados hasta el momento centran su atención en la visualización asociada a representaciones semióticas (gráficos, representaciones pictóricas, tablas) o a intereses visuales (control visual, funciones de la visualización) o a conceptos matemáticos diferentes de los aquí tratados (función, ángulo, pendiente...); es el caso de las investigaciones realizadas por Falduto (2008) y Marmolejo y González (2013a, 2013b) donde, en el primer caso, se explora el papel de la visualización asociada a los gráficos cartesianos en la explicación de procedimientos y conceptos algebraicos, así como la eficacia de las formas de comunicación visual adoptadas en los textos. Marmolejo y González, por su parte, estudian tanto los elementos y estrategias usadas por los textos para ejercer control sobre las formas de ver las figuras geométricas 2D como las clases de funciones que desempeña la visualización vinculada a las figuras bidimensionales en los libros de texto.

En este artículo se presenta un método de análisis que permite caracterizar las tareas de áreas de regiones poligonales de los textos escolares según los tipos de visualización que estos materiales didácticos suscitan en su desarrollo o comprensión. La razón que explica la elección de la temática considerada frente a otras que también se incluyen en la enseñanza de las matemáticas se relaciona con que "el área de regiones poligonales... se constituye en la ocasión propicia para promover la enseñanza de la visualización asociada a las figuras geométricas" (Marmolejo y Vega, 2012, p. 29), pues su estudio induce la aplicación de formas de ver diversas y "coincide, en gran medida, con características del aprendizaje de la visualización" (p. 11). Además, el área de regiones poligonales suele ser un elemento de reflexión a lo largo de toda la educación básica. Este aspecto es determinante, ya que "no bastan unas pocas sesiones para asegurar una adecuada movilización de los tratamientos figurales que permiten a la visualización ser una herramienta heurística ante las exigencias que las matemáticas escolares requieren" (p. 29), por el contrario, la adquisición "de esta actividad cognitiva ha de ser objeto de constante enseñanza durante los primeros ciclos de educación básica" (p. 29).

La aplicación del método propuesto se ilustra mediante el análisis de una tarea de un texto escolar de matemáticas dirigido a estudiantes españoles de 1° de la educación secundaria obligatoria (ESO).

VISUALIZACIÓN VINCULADA A LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

En la literatura especializada, la *visualización* es considerada bajo acepciones de distinta naturaleza y adquiere matices diferentes según el registro de representación semiótico[1] en juego. Nuestro interés recae sobre la visualización vinculada

[1] Un sistema de signos se constituye en un registro de representación cuando permite cumplir las

al registro semiótico de las figuras bidimensionales.[2] Adaptando la definición de visualización asumida por Duval (2003), consideramos esta actividad cognitiva no sólo como el reconocimiento o discriminación de todas las organizaciones posibles de una configuración geométrica, o como la discriminación de las modificaciones de naturaleza configural y las extrapolaciones susceptibles que se pueden aplicar sobre la figura en estudio, sino que, además, tenemos en cuenta los cambios de focalización bidimensional que se han de aplicar en la figura al desarrollar una tarea propuesta (Marmolejo y Vega, 2012) y la manera como se interrelacionan o conectan los distintos cambios en la figura en estudio durante el desarrollo de una tarea (Marmolejo y González, 2011).

Las investigaciones realizadas en torno a la visualización asociada a las figuras geométricas han puesto en evidencia que las figuras son importantes soportes intuitivos para dotar de sentido y significado el aprendizaje de las matemáticas. En palabras de Duval (1999), las figuras coadyuvan en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración a través de la abducción, que consiste en delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse. Sin embargo, diferentes estudios ponen de manifiesto que hacer de estas representaciones potentes herramientas intuitivas en la resolución de problemas matemáticos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo (Padilla, 1992; Duval, 1999; Marmolejo, 2005, 2007, y Marmolejo y Vega, 2012). Por el contrario, es necesario: distinguir el tipo de aprehensión que se sugiere para resolver un problema planteado. Así, Duval (1995) mostró que una figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente: perceptiva (identificación perceptiva espontánea), operatoria (transformación heurística de las figuras) y discursiva (reconocimiento de unidades figurales y variabilidad dimensional intrafigural). En algunos casos, estas formas de discriminación se subordinan unas a otras, se relacionan y, en otros, se oponen (Duval, 2003).

---

tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: 1) constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado; 2) transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales, y 3) convertir las representaciones dadas en un sistema de representaciones dentro de otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas al objeto que se representa (Duval, 1999).

[2] En palabras de Duval (1999), una figura geométrica bidimensional se caracteriza por ser susceptible de dos tipos de variaciones visuales: dimensional y cualitativa. La dimensional está ligada al número de dimensiones considerado: 0D (un punto), 1D (una línea) y 2D (una superficie). La cualitativa se relaciona con variaciones de forma (línea recta o curva; contorno abierto o cerrado), de tamaño, de orientación (en relación con el plano frontal-paralelo), de granulación, de color, etcétera.

Con respecto a la aprehensión operatoria, reconocer y aprovechar, según sea el caso, la presencia de factores (de visibilidad) que aumentan o disminuyen la complejidad cognitiva que subyace en el reconocimiento, dentro de una configuración geométrica, del tipo de operación que se va a aplicar en ella (Padilla, 1992), pues por medio de ellos las figuras adquieren su poder intuitivo y operatorio (Duval, 2003). Investigaciones como las realizadas por Küschemann (1981, en Padilla, 1992), Grenier (1988, en Padilla, 1992), Mesquita (1989), Padilla (1992), Duval (1995) y Marmolejo (2007) han permitido identificar una amplia gama de factores de visibilidad, entre otros, el ángulo de rotación con que se representa una figura en relación con su posición habitual; la presencia o no de un fraccionamiento en partes claves por considerar en el desarrollo de la tarea propuesta; que el reagrupamiento de las partes en que ha sido dividida la figura forme una configuración convexa o no convexa; el número de rotaciones o traslaciones de las subfiguras claves para lograr una adecuada colocación; que una misma parte de una figura deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos intermediarios por comparar.

En relación con el aprendizaje y enseñanza de la visualización, propiciar actividades específicas de dos tipos de transformaciones (Duval, 2004): las transformaciones visuales de una figura a partir de unidades visuales de dimensión 2 y las transformaciones visuales internas que permiten pasar de una discriminación de unidades visuales de dimensión 2 a unidades visuales de dimensión 1 (deconstrucción dimensional de formas). En el primer caso, Duval (1999) señala tres condiciones que deben considerarse en su desarrollo: que las tareas propuestas no deben implicar en su resolución ningún tipo de actividad de razonamiento que exija la utilización de definiciones o teoremas; que no debe estar implicado ningún tipo de cambio dimensional en la secuencia de subfiguras consideradas y que deben organizarse en una serie en función de una variación sistemática de los factores de visibilidad. El aprendizaje de la deconstrucción dimensional de formas, por su parte, debe considerar tareas de restauración de figuras, es decir, donde se propongan figuras deterioradas en las que "los ángulos, los segmentos están parcial o completamente borrados, de manera que con un golpe de vista, nada o casi nada se organiza en una forma inmediatamente reconocible" (Duval, 2004, p. 23).

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

En lo que sigue, presentamos un modelo de análisis de libros de texto que permite clasificar el contenido y las actividades según las clases de visualización que estos materiales didácticos suscitan al promover la enseñanza del área de regiones poligonales. Para su desarrollo se adaptaron las nociones teóricas expuestos por Duval (1995, 2003, 2004) y que caracterizan la visualización asociada a las figuras geométricas.

POBLACIÓN Y CRITERIOS DE SELECCIÓN

Para el diseño del instrumento de análisis se consideraron 2 561 tareas presentes en 35 manuales de matemáticas de seis editoriales (tres colombianas y tres españolas). Dichas tareas forman parte de los capítulos de Geometría y Medida donde los textos escolares introducen explícita o implícitamente reflexiones sobre la magnitud área y su medida. Las unidades de información consideradas están compuestas por las definiciones, los ejemplos y las actividades propuestas por el texto para que las realice el estudiante.

Fueron tres los criterios considerados en el estudio al seleccionar tanto los países y las editoriales como los libros de texto y los grados asumidos:

- El conocimiento por parte de los investigadores de los programas educativos de los países considerados y la facilidad de acceso a los libros de texto.
- Que los libros pertenecieran a tres de las editoriales de mayor trascendencia en los países considerados. Para su discriminación se aplicó una encuesta informal a profesores de matemáticas de educación básica que laboran en instituciones educativas de la provincia de Salamanca (Castilla y León) y del sur-occidente colombiano (San Juan de Pasto y Santiago de Cali).
- Se tuvieron en cuenta aquellos grados donde las políticas educativas españolas y colombianas señalan que se debe desarrollar la enseñanza del área. De esta manera, fueron siete los grados seleccionados en España: 1° de primaria a 1° de la ESO y ocho los considerados en Colombia: 1° a 8° de educación básica. Se tuvo en cuenta que en España no hay alusión a la enseñanza del área de regiones poligonales en el grado 2° de la ESO y que en los libros colombianos de grado sép-

> timo el estudio del área de regiones poligonales no se realiza mediante el registro semiótico de las figuras geométricas, sino por medio de los gráficos cartesianos. Por ello, se optó por no analizar tanto los textos colombianos del grado equivalente al 2° de la ESO (grado octavo) como los libros españoles correspondientes al grado séptimo de Colombia (1° de la ESO). De acuerdo con lo anterior, se seleccionaron inicialmente un total de 36 manuales. Puesto que uno de los libros de texto españoles (grado primero) no trata, ni explícita ni implícitamente, el área de regiones poligonales, se consideraron, finalmente, un total de 35 manuales escolares para el desarrollo de esta investigación.

En cada uno de los libros se seleccionaron las partes relativas al estudio de la geometría y la medida. Las unidades de análisis consideradas en la investigación (lo que comprenden esas unidades de análisis) y su caracterización según las categorías de análisis establecidas (que se presentan en el apartado siguiente) se registraron en matrices de datos de Excel.

La metodología de análisis fue inductiva, es decir, las categorías de análisis fueron elaboradas a partir de la exploración de los textos escolares. Su diseño consideró dos momentos: 1) discriminación de las funciones visuales presentes en los libros; 2) prueba de la confiabilidad y validez del instrumento. En lo que sigue describimos en detalle cada uno de estos momentos.

Caracterización de las categorías de análisis

Determinar los tipos de visualización predominantes en los primeros grados de la enseñanza de las matemáticas exige distinguir dos aspectos: los elementos que describen la visualización y la manera en que se articulan. En este sentido, las clases de visualización presentes en los libros de texto se determinaron a través de la 5-upla (Op, CF_g, CD, CFB, Fl); donde Op es la operación aplicada en la figura, CF_g es el cambio figural que se produce al aplicar una operación figural determinada, CD el cambio dimensional, CFB el cambio de anclaje bidimensional por considerar al desarrollar o comprender la tarea propuesta, y Fl el flujo visual. Las cuatro primeras componentes aluden a los elementos que caracterizan la visualización y la última, a la manera en que se articulan. En los siguientes párrafos se definen y se ejemplifican cada una de las componentes y los aspectos que las determinan.

Para identificar los elementos que permiten caracterizar visualmente las tareas de los libros de texto, se procedió, en primera instancia, a seguir meticulosamente las indicaciones dadas en las definiciones y en los procedimientos desarrollados en los ejemplos de los libros; asimismo, se realizaron las actividades propuestas por los manuales para ser resueltas por los estudiantes.

Siguiendo los presupuestos presentados por Duval (2003, 2004), se evidenció la presencia de operaciones visuales, cambios figurales producidos por la aplicación de transformaciones de naturaleza mereológica, óptica y posicional, y cambios de naturaleza dimensional. Cada uno de estos tres aspectos se consideró como una categoría de análisis. Como se pondrá en evidencia a continuación, fueron nueve las operaciones, cinco los cambios figurales y tres los cambios dimensionales discriminados en los libros de texto al tratar el área de regiones poligonales. Los procedimientos presentados y exigidos en el desarrollo y comprensión de las tareas de los manuales escolares conllevaron la consideración de dos categorías adicionales: cambio de focalización y flujo visual, siendo tres los cambios de focalización y dos los flujos visuales determinados.

Para la discriminación de los aspectos que caracterizaron a cada una de las categorías, se consideró la estructura de control visual (Marmolejo y González, 2013a), privilegiada en los libros analizados en los temas correspondientes al área de regiones poligonales. Es decir, se tuvieron en cuenta los elementos y estrategias utilizados por los libros de texto para inducir unas maneras de ver sobre otras: el despliegue de procedimientos, la presentación de contenidos, el uso de figuras que aluden a objetos o acciones físicas y el recurso de elementos que mejoran la visibilidad de la visualización puesta en juego (presencia de fondo cuadriculado, concavidad o convexidad en el contorno de una figura, introducción de colores, punteado, etcétera).

A continuación, se definen detalladamente cada una de las categorías y subcategorías de análisis consideradas en la investigación. Para su mejor comprensión se presentan ejemplos en cada una de ellas.

Operaciones

"...las figuras permiten distintos tipos de modificaciones, por cada modificación existen varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística" (Duval, 1999, p. 156). Según el papel que desempeñan las operaciones por aplicar en las figuras en la comprensión y desarrollo de tareas matemáticas, Duval (1995) centró la atención en cinco clases: *reconfiguración, traslación, rotación, achicamiento* y *agrandamiento*. En los libros de texto que incluyen los temas sobre el área de regiones poligonales se introducen, además, cinco operaciones de naturaleza distinta: *configuración, rotación externa, cuadratura, superposición* y *fraccionamiento*. Por otra parte, en el presente estudio se consideran las operaciones *achicamiento* y *agrandamiento* como elementos que forman parte de una única operación denominada *anamorfosis*. En consecuencia, son nueve las maneras como hemos clasificado las formas de operar encontradas en los libros de texto estudiados.

En relación con el papel de las operaciones visuales en el tratamiento del área, su aplicación es la que induce la manipulación del área de forma cualitativa, acción determinante para la comprensión del concepto de área, puesto que promueve su estudio como magnitud (Freudenthal, 1983) y asigna sentido a su medida (Chamorro, 1997; Zacharos, 2006). Sin embargo, a pesar de la importancia de la manipulación cualitativa del área, no es considerada en el tratamiento de este concepto matemático en la escuela (Kidman y Cooper, 1997, en Kordaki, 2003 y Kamii y Kysh, 2006). Situación que explica, entre variados aspectos, las dificultades que tienen los estudiantes para diferenciar el área del perímetro (Padilla, 1992) y comprender las propiedades matemáticas que caracterizan al área y su medida; así como de prácticas de enseñanza donde el área es una excusa para reflexiones de naturaleza aritmética relativas a la numeración y al uso de los números naturales y decimales; es el caso tanto del conteo de unidades y la aplicación de conversiones (Chamorro, 1997) como de la sustitución de valores numéricos en fórmulas de área (Kamii y Kysh, 2006).

Lo anterior es una faceta que resalta la importancia de esta primera categoría de análisis no sólo en cuestiones de naturaleza visual, sino también en el papel que la visualización desempeña en la comprensión del concepto de área. En el cuadro 1 se presentan las operaciones que los libros movilizan al suscitar el estudio del área de regiones poligonales, así como algunas de las tareas y propiedades matemáticas en las que su aplicación puede apoyar la comprensión del área.

En lo que sigue, describimos cada una de las operaciones visuales consideradas en la investigación:

Cuadro 1 Tareas y propiedades del área donde intervienen las operaciones visuales

Operación	Tarea	Propiedad
Reconfiguración	Transformación de una figura en otra con diferente contorno visual e igual área (Rec. simple). Comparación entre regiones poligonales de igual área y diferente forma (Rec. simple). Cálculo de área de regiones poligonales irregulares o que representan una fracción de una figura regular (Rec. por exceso). Cálculo de área de subconfiguraciones (Rec. por ensamblaje).	Relación de equivalencia (Rec. simple). Relación de orden (Rec. por exceso). Adición de áreas (Rec. por ensamblaje).
Configuración	Producción de regiones poligonales rectilíneas a partir de la unión de regiones previamente dadas (Conf. simple, por simetría y por reiteración). Duplicación de áreas (C. por simetría).	Adición de áreas (Conf. simple y por simetría). Producto de un número natural por una cantidad de área (Conf. por reiteración).
Anamorfosis	Variación del área y conservación de la forma (Anam. por achicamiento y por agrandamiento). Conservación del área (Anam. por arrastre).	Relación de orden (Anam. por achicamiento y por agrandamiento). Relación de equivalencia (Anam. por arrastre).
Traslación	Comparación entre regiones poligonales. Reproducción de figuras con igual área.	Relación de equivalencia.
Rotación	Comparación entre regiones poligonales. Reproducción de figuras con igual área.	Relación de equivalencia.
Simetría axial	Cálculo de área de regiones poligonales irregulares y de subfiguras de una figura.	Producto de un número racional por una cantidad de área.

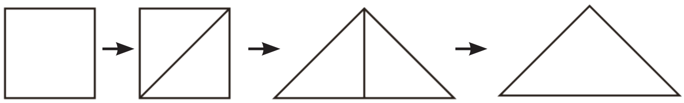
Operación	Tarea	Propiedad
Cuadratura	Elección de unidades de medida adecuadas. Aproximación de la medida: acotación de áreas por valores superiores o inferiores y exhaustación con unidades.	
Superposición	Pavimentación de superficies (Sup. directa). Cálculo de área de regiones sombreadas (Sup. inversa).	Medida de área y unidad de medida (Sup. directa).
Fraccionamiento	Repartos equitativos de regiones poligonales (simple, por inhibición y refraccionamiento). Cálculo de área de regiones poligonales (simple) y de subfiguras o subconfiguraciones irregulares (por inhibición y refraccionamiento). Comprensión de la fórmula A = B × H (refraccionamiento).	

Reconfiguración

Consiste "en la división de una figura en subfiguras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente" (Duval, 1999, p. 156). Son tres las clases de reconfiguración presentes en los manuales escolares de Colombia y España al inducir la enseñanza del área de regiones poligonales, a saber:

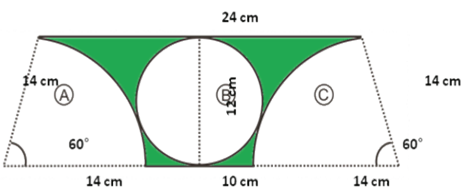
- *Reconfiguración simple*. La figura de partida se transforma en otra de forma distinta e igual cantidad de área. Las unidades 2D que la conforman (o algunas de ellas) son reubicadas bajo la acción de traslaciones o rotaciones o reflexiones en lugares distintos al inicialmente ocupado por ellas. En la ilustración 1 se reconfigura un cuadrado en un triángulo isósceles.

Ilustración 1 Reconfiguración simple de un cuadrado en un triángulo isósceles. Ejemplo diseñado por los autores



- *Reconfiguración por exceso*. En el proceso, toda la superficie de la figura de partida o una de sus partes pasa a conformar una fracción de la superficie de la figura total. En el despliegue del proceso presentado en la ilustración 2 se pone en evidencia una reconfiguración donde la figura de partida es transformada en otra figura con mayor cantidad de área.

Ilustración 2 Reconfiguración por exceso de una figura curvilínea a otra figura de forma trapezoidal.[3] En *Matemáticas 1 ESO*, Santillana, España, p. 221.



CALCULAR EL ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

Halla el área coloreada

Primero. Descomponemos la figura en otras figuras cuyas áreas sepamos calcular.

Figuras A y C → Sector circular de radio 14 cm y ángulo 60°.

Figura B → Circulo de radio $\frac{12}{12}$ = 6 cm.

Figura D → Trapecio de altura 12 cm y bases de 24 cm y 10 + 14 + 14 = 38 cm.

$A_{Total} = A_{figuraD} - A_{iguraA} - A_{figuraB} - A_{figuraC}$

Segundo. Calculamos cada una de las áreas.

$A_{iguraA} = \frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi * 14^2 * 60}{360} = 102{,}57\text{cm}^2$

$A_{iguraC} = 102{,}57\text{cm}^2$

$A_{iguraB} = \pi r^2 = \pi * 6^2 = 113{,}04 \text{ cm}^2$

$A_{iguraD} = \frac{(B+b)*h}{2} = \frac{(38+24)*12}{2} = 372\text{cm}^2$

Tercero. Sumamos y restamos para obtener el área total.

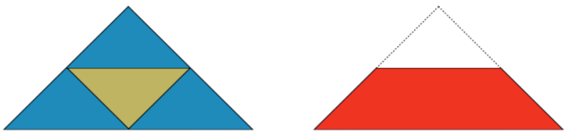
$$A_{Total} = A_{figuraD} - A_{iguraA} - A_{figuraB} - A_{figuraC} = 372 - 102{,}57 - 113{,}04 - 102{,}57 = 53{,}82 \text{ cm}^2$$

[3] Para calcular el área de la región circular (figura B) se debe considerar que la longitud del radio es la mitad de la altura del trapecio (6 cm); en el texto esto se representa mediante el cociente 12/12 = 6, y no del cociente 12/2 = 6. Este es un error del texto original.

- *Reconfiguración por ensamblaje de partes* (Padilla, 1992). Alude a que algunas o todas las subfiguras en que una figura se encuentra fraccionada, o que por acción de un fondo cuadriculado se destacan en la figura de inicio, se ensamblan entre sí conformando nuevas subfiguras. En el proceso, la forma de la figura de inicio se conserva, pero cambia su organización interna.

Ilustración 3 Reconfiguración por ensamblaje de partes de subfiguras de un triángulo pasando de cuatro triángulos congruentes a un triángulo y un trapecio. Adaptación de tarea propuesta en *Matemáticas 4,* Anaya, España, p. 157.

En la siguiente figura discriminar un trapecio.



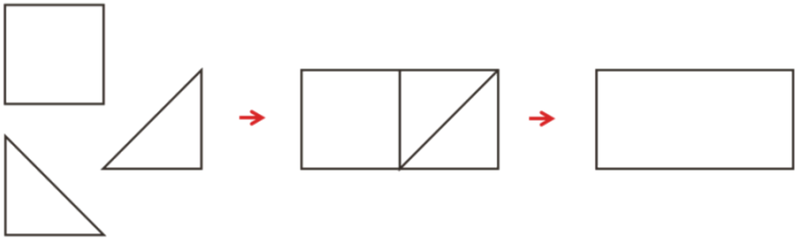
Este tipo de reconfiguración se muestra en la ilustración 3 donde se solicita que se fusionen tres de las subfiguras del triángulo de la izquierda para resaltar visualmente una subfigura de forma trapezoidal.

Configuración

Alude al ensamblaje de un conjunto de figuras independientes entre sí para representar una nueva, cuya superficie está compuesta por la unión de las superficies de las figuras dadas. A diferencia de la reconfiguración, la atención no recae en un proceso compuesto (descomposición y reorganización figural). Por el contrario, la focalización apunta a un único proceso de naturaleza más sencilla (organizar las figuras en un todo); aquí las figuras de partida asumen el papel de subfiguras en la figura finalmente "construida". En lo que sigue, presentamos las maneras diversas en que se caracteriza la presencia de esta operación en los manuales escolares estudiados en la investigación:

- *Configuración simple*. Son varias las figuras de partida y su ensamblaje genera una nueva figura. No todas las figuras representadas tienen igual forma y magnitud. En la ilustración 4 se muestra un ejemplo de este tipo de operación.

Ilustración 4 Configuración simple aplicada a un cuadrado y dos triángulos para formar un rectángulo. Ejemplo diseñado por los autores



- *Configuración por reiteración.* En este caso, hay una única figura de inicio y se requiere generar *n* copias de ella, colocarlas unas al lado de otras sin superposición mediante la aplicación de traslaciones o rotaciones o reflexiones. La cantidad de área de la figura de llegada es *n* veces la de la figura de partida. Un ejemplo de tarea[4] que privilegia esta manera de configuración es la siguiente: "dibuja un triángulo y, utilizándolo como unidad de medida, construye una nueva figura cuya área sea cinco veces la unidad de medida asignada".
- *Configuración por simetría.* Se solicita implícita o explícitamente completar una figura, donde –a diferencia de la configuración por reiteración– no se requiere aplicar composiciones de traslaciones o rotaciones en el plano para formar la figura en cuestión. Este tipo de configuración se observa en despliegues de procedimientos donde la figura dada es mentalmente "rotada por fuera del plano", asumiendo un "eje" de rotación. El resultado es una figura isométrica cuya área duplica la de la figura de partida (ilustración 5).

Ilustración 5 Configuración por simetría de un hexágono en un eneágono. Ejemplo diseñado por los autores

[4] Tarea diseñada por los autores y aplicada en cursos de cualificación de profesores donde se reflexiona sobre el papel que desempeña la visualización en el estudio de las matemáticas.

Del mismo modo, suscitan la operación de configuración por simetría las tareas en las que se introduce el uso de espejos y éstos se colocan en uno de los lados del contorno de la figura de inicio (ilustración 6). En estos casos la unión de la figura de partida y la imagen en el espejo representan una figura simétrica con doble cantidad de área que la figura de inicio.

Ilustración 6 Configuración por simetría mediante la aplicación de espejos. En *Matemáticas 4,* Anaya, España, p. 166

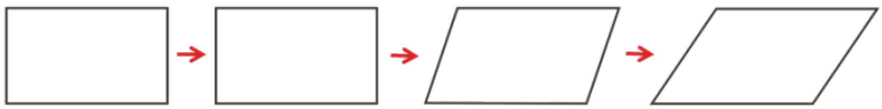
Al colocar el borde de un espejo sobre el eje de una figura simétrica, se ve la figura completa.

La configuración por simetría está presente en tareas donde, si bien la consigna no alude explícitamente al área, sí promueve la duplicación del área de una figura. Esta operación destaca, entre todas las detectadas en la investigación, por ser la menos propicia para la enseñanza del área, pues el estudio del área considera estrictamente el plano en que se representa la figura, mientras que la configuración por simetría suscita la aplicación de un "giro" por fuera de él. Esta ambivalencia bien podría generar dificultades y obstáculos en la objetivación del concepto de área.

Anamorfosis

Se aplica sobre la figura de partida un proceso de deformación continuo. Aparece en los manuales escolares de tres maneras diferentes, por *agrandamiento*, cuando el proceso de deformación mantiene invariante la forma de la figura y las relaciones entre sus unidades constituyentes y ocasiona un aumento en su cantidad de superficie. Por *achicamiento*, donde el proceso de deformación mantiene invariante la forma y las relaciones entre sus unidades constituyentes y promueve una disminución en su cantidad de área, y por *arrastre*, en los casos donde la cantidad de superficie de la figura de partida permanece invariante, mientras que su forma o relaciones entre las unidades constituyentes varía. En la ilustración 7 se muestra cómo, mediante un arrastre, se transforma un rectángulo en un trapezoide.

Ilustración 7 Transformación de un rectángulo en un romboide por aplicación de una anamorfosis tipo arrastre. Ejemplo diseñado por los autores



En las dos primeras formas en que aparece la anamorfosis, son posibles dos maneras de proceder: una que focaliza la atención en las unidades 1D que constituyen la figura, la otra únicamente en su superficie. En la primera hay un agrandamiento o achicamiento mediante una dilatación o contracción de los lados de la figura (incremento o reducción homogénea de las longitudes de los lados que conforman el contorno de la figura de partida). En la segunda, se asume una figura como un aumento o achicamiento superficial de otra (es el caso de actividades donde se presenta la figura original al lado de la figura agrandada o mermada).

Traslación

La figura de llegada es una imagen de la figura de partida mediante la aplicación de desplazamientos verticales, horizontales o de composiciones entre ellos. La forma, la cantidad de área y las relaciones existentes entre las unidades constituyentes se conserva.

Rotación

La figura de llegada es una imagen de la figura de inicio mediante la aplicación de un giro o una composición de giros (rotación en el plano).

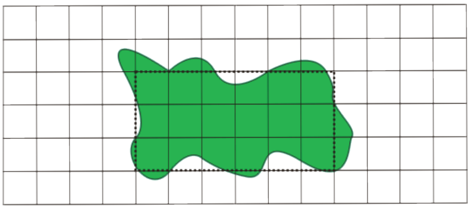
Simetría axial

Presente en tareas donde se muestra una figura y se pide discriminar su eje de simetría o cuando se solicita verificar si una figura es simétrica con respecto a un cierto eje. Se aplica sobre la figura una “rotación por fuera del plano”. A diferencia de la reconfiguración por simetría, la figura final conserva en este caso el mismo contorno global y la misma área que la figura de inicio. En caso de que sea necesario introducir un eje de simetría en la figura inicial, la única diferencia entre ésta y la figura final es que la superficie de la segunda, por acción del eje de simetría aplicado, estará dividida en dos partes isométricas entre sí, mientras que la superficie de la figura de inicio es presentada de manera no fraccionada.

Cuadratura

El contorno de la figura de partida es curvilíneo y se representa sobre un fondo cuadriculado. Calcular de manera exacta y directa su área no es posible. Es necesario aplicar una estimación. Teniendo en cuenta el contorno de la figura de partida y las líneas que conforman el fondo cuadriculado, se dibuja una nueva figura de contorno rectilíneo, sobre la cual sí es factible calcular la medida de su área. La cantidad de área de la figura de llegada es mayor o menor que la de la figura de partida. Se calcula el área sobre la figura rectilínea y no sobre la figura inicialmente dada. En la actividad presentada en la ilustración 8 se muestra la transformación de una figura curvilínea en una rectilínea de forma rectangular.

Ilustración 8 Cuadratura de una figura curvilínea en una rectangular.
En *Matemáticas 5,* Anaya, España, p. 179



El área de las figuras no poligonales se calcula de modo aproximado.
A ≈ 18 m^2 [cada cuadrado de la cuadrícula en que resalta la figura tiene por medida 1 cm^2

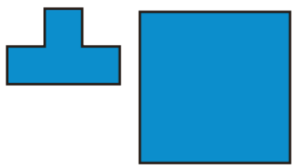
Superposición

Aparece en los libros de texto de dos maneras distintas. En la primera se representan dos figuras con sus superficies disjuntas entre sí. En este caso, el desarrollo de la tarea exige solapar una de ellas con la superficie de la otra. Por tanto, es necesario comparar las dos representaciones a partir de sus segmentos y ángulos: centrar la atención en aquellos que en una figura y otra coinciden en sus medidas y, posteriormente, ponerlos en correspondencia entre sí. La aplicación de rotaciones y traslaciones en el proceso de comparación son, igualmente, aspectos que caracterizan la operación de superposición. En el segundo caso, de manera inversa, la configuración que acompaña a la tarea propuesta (figura de inicio) se caracteriza por estar descompuesta en subfiguras o subconfiguraciones. El proceso de desarrollo demanda discriminar la figura de inicio como la superposición de dos o más figuras, considerar de manera independiente una y otra, y establecer una relación entre sus respectivas áreas.

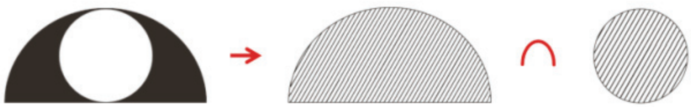
Designamos con los términos superposición directa e inversa las dos maneras en que aparece esta operación en los textos. El primer tipo suele aparecer en tareas donde se solicita calcular el área de una figura mediante la replicación de una unidad de medida. En tal caso, es necesario sobreponer la figura que representa la unidad en la figura que se va a medir (ilustración 9). La superposición inversa, por su parte, se presenta en tareas de "áreas sombreadas" donde se solicita calcular la medida de la cantidad de área de una parte de la configuración en estudio (ilustración 10). Presente en actividades donde se solicita calcular áreas de regiones sombreadas con forma irregular (figura de la izquierda en la ilustración 10), es necesario, para su desarrollo o comprensión, separar unas configuraciones de otras (semicírculo y círculo de la derecha). En este caso el área de la región sombreada se encuentra mediante sustracción de las medidas de área de las subconfiguraciones citadas.

Ilustración 9 La superposición del octágono en el cuadrado es la operación por aplicar para calcular el área de la segunda figura a partir de la primera. Ejemplo diseñado por los autores

Calcula la medida del área del cuadrado utilizando el octágono como unidad de medida.



lustración 10 Aplicación de una superposición inversa para calcular el área de la región sombreada a partir de las áreas del semicírculo y círculo que la delimitan. Ejemplo diseñado por los autores

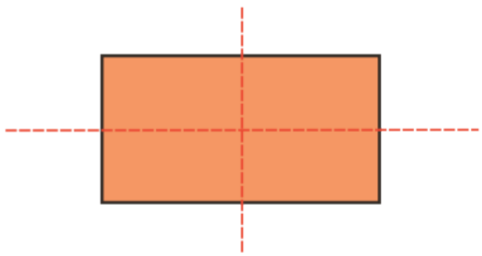


Fraccionamiento

Descomposición bidimensional de una figura en subfiguras o subconfiguraciones. Este tipo de operaciones está presente en tareas donde se solicita transformar una figura en otra de contorno distinto e igual área, dividir la cantidad de área de una figura en partes iguales y calcular el área de figuras irregulares mediante la aplicación de fórmulas de área básicas (cuadrado, triángulo, rectángulo, entre otras). Aparece de tres maneras distintas. La primera, en tareas donde se solicita dividir la superficie de la figura de partida en partes previamente determinadas o sin determinar (*fraccionamiento simple*). Es el caso de la descomposición de la superficie de un cuadrado en dos subfiguras triangulares mediante la introducción de una de sus diagonales (ilustración 1). La segunda, cuando la figura de inicio se da de manera fraccionada y es necesario reorganizar internamente la figura en estudio (*fraccionamiento por inhibición de trazos*), es decir, introducir un tipo de fraccionamiento distinto al inicialmente representado. En consecuencia, es necesario inhibir trazos en la figura. Es el caso de tareas en las que se alude a que una figura tiene varios ejes de simetría y se la representa con dos ejes sobre ella (ilustración 11). Quien lee la actividad ha de verificar la afirmación realizada y, en consecuencia, debe inhibir uno de los ejes para reconocer en el otro un eje de simetría. Por tanto, aplica una simetría axial para verificar que las dos partes en que el eje divide la figura coinciden entre sí (de esta manera se define eje de simetría en los libros estudiados) y, posteriormente, debe pasar a centrar la atención en el segundo eje y repetir el proceso.

Ilustración 11 Fraccionamiento por inhibición de trazos.
En *Matemáticas 4*, Anaya, España, p. 167

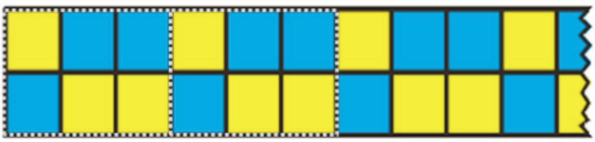
Una figura puede tener varios ejes de simetría.



Por último, el fraccionamiento también aparece cuando es necesario resaltar algunas de las líneas en que inicialmente está descompuesta la figura en estudio y que inducen discriminar en ella nuevas subfiguras (*refraccionamiento*). Por ejemplo, la ilustración 12 forma parte de una tarea en la que se solicita discriminar alguna regularidad en la figura representada. Para ello, es necesario resaltar algunos trazos verticales para que se pase de destacar subfiguras cuadradas, designadas con colores azul y amarillo, a ver en la figura subconfiguraciones de forma rectangular compuestas cada una por tres cuadrados azules y tres amarillos.

Ilustración 12 Refraccionamiento que destaca la discriminación de subconfiguraciones rectangulares. En *Matemáticas 4,* Anaya, España, p. 170

Observa y describe alguna regularidad en la figura.



Cambio figural

Según Duval (1998), el cambio figural alude al efecto que produce en una configuración geométrica la aplicación de acciones que transforman su organización perceptual y determinan la naturaleza de la aprehensión operatoria. Son tres los cambios figurales identificados por Duval (1995): *mereológico*, cuando la modificación pone en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo y se transforma el contorno global de la figura de inicio; *posicional*, al conservar la forma de la figura de partida y cambiar su posición en el plano; *óptico*, tipo de "transformación, que es realizable como un juego de lentes o de espejos, puede conservar la forma de partida o alterarla" (Duval, 1999, p. 62). En la manera en que los textos escolares analizados inducen el estudio del área de regiones poligonales se observó la presencia de tres cambios figurales adicionales: *interior, intermitente, no real.* Igualmente, se identificaron transformaciones que, aplicadas sobre la figura de partida, transformaban el contorno global de la figura de inicio pero no mediante una reorganización de las partes que la conforman (ilustración 7). En este sentido, hemos preferido hablar de modificaciones *reales*, en lugar de mereológicas. En lo que sigue definimos cada una de las modificaciones encontradas en los libros de texto.

Real

Es un tipo de modificación figural que transforma la figura de inicio en otra de contorno global distinto y en el proceso puede o no conservarse la cantidad de área. Este tipo de modificación no es exclusivo de la reubicación de partes bidimensionales de la figura de partida. Está presente en tareas donde se solicita calcular el área de una figura de forma irregular cuya fórmula se desconoce. Es necesario, pues, transformarla en otra de distinta forma, igual área y cuya fórmula de cálculo de área haya sido previamente dada. Son cambios figurales reales los mostrados en las ilustraciones 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8.

Parcial

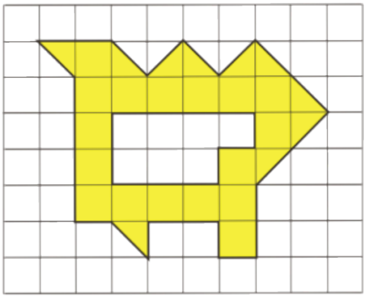
Alude a modificaciones de naturaleza óptica y posicional. En estos casos la forma y el contorno de la figura de partida permanecen invariantes. Únicamente cambia, respectivamente, su área o su posición en el plano. Este tipo de transformación es el efecto de la aplicación de operaciones de rotación, traslación, agrandamiento o achicamiento sobre una figura.

Intermitente

Las modificaciones se aplican sobre unidades constituyentes de dimensión 2 de la figura de partida. La organización perceptual de las unidades cambia momentáneamente y la figura de partida no sufre transformación alguna. Se encuentra en tareas donde se solicita calcular mediante conteo el área de una figura que está descompuesta en subfiguras, algunas de ellas con forma y cantidad de área iguales a la unidad asignada, otras con forma distinta y con una fracción del área de la unidad de medida: un medio, un cuarto, etc. La resolución de la actividad propuesta exige la unión de algunas de las fracciones de unidad y el conteo de las veces que la unidad seleccionada es necesaria para cubrir la superficie de la figura. En la tarea de la ilustración 13 se induce un cambio figural intermitente, pues para calcular el área de la figura, es necesario considerar las subfiguras triangulares y asumir en la unión de cada par de ellas una superficie igual a la unidad de medida considerada.

Ilustración 13 Modificación intermitente que permite calcular el área de una figura. En *Matemáticas 5,* Santillana, España, p. 190

Calcular el área de la siguiente figura
[Como unidad de área se asume uno de los cuadrados que conforman el fondo cuadriculado donde se representa la figura.]

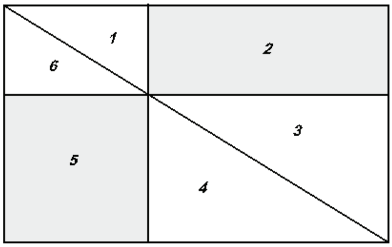


Intrínseco
Cuando la organización perceptiva de la figura de partida se transforma internamente mediante la introducción o inhibición de trazos. Es decir, no se aplican cambios en sus contornos a ninguna de las unidades 2D constituyentes o subfiguras o subconfiguraciones o a la figura inicial. Se identifica en tareas donde se debe calcular el área de una figura y es necesario fraccionarla en subfiguras de forma y área igual a la unidad de medida asignada. También, cuando hay que discriminar ejes de simetría o figuras simétricas y cuando se solicita descomponer por fraccionamiento una figura dada.

No real
Alude a la discriminación de subconfiguraciones en la figura de partida y a su correspondiente comparación. Todas las subconfiguraciones relevantes están dadas en la figura inicial y, en consecuencia, no es necesario adicionar o transformar nada en ella. Es el caso de la actividad presentada en la ilustración 14, donde se solicita comparar dos subfiguras a partir de sus áreas.

Ilustración 14 Transformación no real que permite comparar las superficies de subfiguras de forma diferente. Figura utilizada en Duval (1998) para definir la aprehensión operatoria de las figuras

En la siguiente figura compara las áreas de los dos rectángulos sombreados.



Para el desarrollo de esta tarea no es posible comparar las dos subfiguras en cuestión de manera directa (rectángulos 2 y 5), es necesario hacerlo de modo indirecto. Así, la atención ha de recaer tanto en los triángulos 123 y 456, como en los pentágonos 64 y 13. Después, se debe aplicar perceptualmente una sustracción entre las superficies del primero de los triángulos y el primero de los pentágonos y repetir el proceso para el segundo de los triángulos y de los pentágonos.

Cambio dimensional

Las figuras bidimensionales imponen, según la primera de las leyes gestálticas de organización y reconocimiento perceptivo de las formas, una prioridad en la discriminación de unidades 2D sobre unidades 1D y 0D (Duval, 2004). Esto quiere decir que, sobre una figura bidimensional, en primera instancia, se reconoce una forma de esa misma dimensión y, sólo en segundo lugar, se pasa a discriminar los lados que la constituyen; además, al ser discriminados éstos, se perciben como bordes no separables de la figura (Duval, 2004). "La descomposición por deconstrucción dimensional se refiere al acto de vencer esta particularidad de las figuras bidimensionales y consiste en descomponer la figura en unidades figurales de dimensión inferior a la figura de partida" (Duval, 2003, p. 20). Son tres las clases de cambio dimensional presentes en los libros de texto analizados:

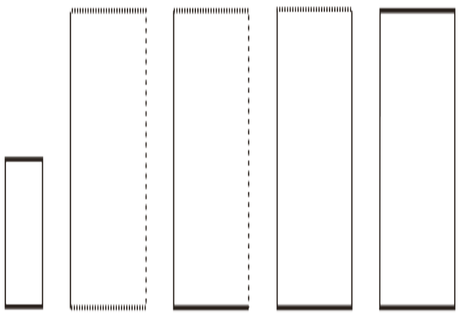
Fijo

Si bien la superficie y las unidades figurales de dimensión 1 y 0 son asumidas una y otras como piezas constitutivas de la figura, las segundas suelen ser reconocidas como elementos fijos, estáticos, no separables de la primera. A manera de ejemplo están las actividades donde se solicita calcular el área de figuras elementales en las que, sobre la figura, se representan números que aluden a la longitud de la base y de la altura. Basta con pasar de centrar la atención en la figura como una gestalt a hacerlo en los lados de la figura.

Operatorio

Por lo menos una de las unidades de dimensión 1 o 0 que constituyen la figura de inicio es discriminada de manera independiente a la superficie de la figura de la cual forma parte. Además, se asume como una unidad constitutiva de naturaleza dinámica sobre la cual se aplican operaciones de naturaleza unidimensional o cero dimensional: dilataciones, contracciones, sustracciones (quitar de un segmento otro segmento), rotaciones, traslaciones. En caso de que la modificación operatoria de una figura esté caracterizada por la dilatación o contracción de los lados de la figura, ésta debe ser proporcional entre sí, obteniéndose así una figura semejante a la inicial. Es el caso de la ilustración 15 donde se solicita aplicar un agrandamiento sobre una figura dada a partir de la dilatación o contracción de sus lados. Este cambio figural también puede producirse por un achicamiento de la figura a partir de la contracción de sus lados o cuando la traslación o rotación de una figura se realiza bajo la aplicación de traslaciones o rotaciones sobre sus vértices (operación cero dimensional).

Ilustración 15 Agrandamiento de un rectángulo mediante la dilatación de sus lados. Ejemplo diseñado por los autores



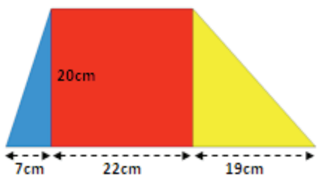
Desdoblamiento

Por lo menos una de las unidades de dimensión 1 que constituyen la figura de partida es discriminada de manera independiente a la superficie de la figura de la cual forma parte, a la vez que se asume como un elemento constitutivo en dos o más subfiguras o subconfiguraciones distintas presentes en la figura de inicio y sobre las cuales se reflexiona. Sucede en tareas donde se pide calcular el área de figuras irregulares (ilustración 16) y es necesario descomponer su superficie en partes cuyas formas permitan aplicar fórmulas de área previamente establecidas (dos triángulos y un rectángulo). Algunas de las subfiguras en que debe dividirse la figura de inicio comparten entre sí unidades de dimensión 1 que han de ser consideradas en la aplicación de las fórmulas. Es el caso del segmento de longitud 20 cm que debe asumirse simultáneamente como la altura de las tres figuras que se van a considerar en el desarrollo de la tarea: los triángulos azul y amarillo y el rectángulo rojo.

Ilustración 16 Cambio dimensional por desdoblamiento.
En *Matemáticas 5*, Anaya, España, p. 183

Aprende

Así calculamos el área de este trapecio:



ÁREA ZONA AZUL $\rightarrow$ $\dfrac{7\ x\ 20}{2} = 70cm^2$

ÁREA ZONA ROJA $\rightarrow$ $22\ x\ 20 = 440cm^2$

ÁREA ZONA AMARILLA $\rightarrow$ $\dfrac{19\ x\ 20}{2} = 190cm^2$

ÁREA TOTAL $\rightarrow$ $70 + 440 + 190 = 700\,cm^2$

Cambio de focalización bidimensional

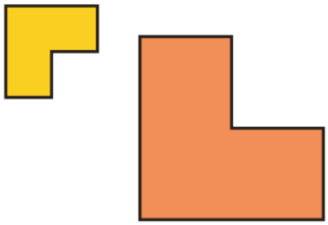
Se refiere a las distintas maneras en que, en la figura en estudio, se aplican cambios, centrados en unidades visuales 2D en la manera de ver en ella. Es decir, se pasa de centrar la atención en las características globales 2D de la figura de partida a hacerlo en sus partes 2D constituyentes (subfiguras o subconfiguraciones). En caso de haber varias figuras de partida, se pasa de centrar la atención de una a otra a considerar simultáneamente la forma y contorno de la figura de partida y de la figura de llegada. Son tres las maneras en que se aplican cambios de focalización 2D en los libros de texto.

Configural

Alude a un proceso de comparación entre dos o más figuras a partir de sus características globales, sean éstas entre la figura de partida y de llegada o entre varias figuras de partida. El proceso de comparación guía la manera de ver o considerar en el desarrollo o comprensión de la actividad propuesta. Se usa en tareas donde hay que reconfigurar la figura de partida en otra de características globales distintas. La forma de la figura de llegada guía el proceso de transformación y se alude a ella figural o discursivamente. En la ilustración 17 se muestra una tarea donde, a partir de una figura dada (la amarilla) se solicita "armar" otra figura (la anaranjada) semejante y de área mayor. Por ello, es necesario, generar primero mental o físicamente copias de una de ellas (figura amarilla) y, luego, organizarlas para armar la figura pedida (figura anaranjada). La comparación de las características perceptuales globales (tanto de forma como de contorno) de la primera de las figuras con respecto a las de la segunda guía el proceso de resolución de la tarea propuesta.

Ilustración 17 Cambio de focalización configural.
En *Fórmula 2,* Voluntad, Colombia, p. 118

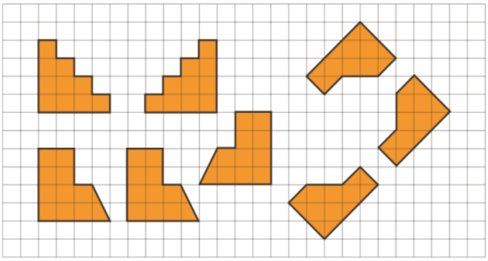
Recorta cuatro fichas como la amarilla y arma la figura anaranjada



De igual manera, este tipo de cambio de focalización está presente en tareas donde se solicita, a partir de varias figuras, "armar" una nueva cuya área es igual a la suma de las áreas de las figuras inicialmente dadas (ilustración 4). También lo está en tareas como en la ilustración 18, donde se pide discriminar si dos o más figuras son simétricas entre sí. La atención recae en comparar, según la orientación, sentido y cantidad de superficie las dos figuras en estudio. Basta, pues, con centrar la atención en aspectos globales de las figuras en cuestión.

Ilustración 18 Cambio de focalización configural.
En *Matemáticas 4,* Anaya, España, p. 169

Busca parejas de figuras simétricas, copia y dibuja el eje de simetría en cada caso.



Intrafigural

En este caso se dejan en un segundo plano las características globales de la figura de partida. La atención recae en sus unidades 2D constituyentes, subfiguras o subconfiguraciones, ya sea en las representadas en la figura de inicio o en aquellas que el lector debe introducir en el proceso de desarrollo o comprensión de la actividad planteada. Queda caracterizado tanto en tareas donde se solicita descomponer por fraccionamiento una figura como en aquellas donde se pide identificar si una figura es simétrica o se solicita discriminar en ella algún eje de simetría (ilustración 11). Asimismo esta clase de cambio de focalización se observa al aplicar una reconfiguración por ensamblaje de partes (ilustración 3) o un refraccionamiento (ilustración 12) en la figura de inicio o cuando basta con centrar la atención en las partes 2D en que una figura está descompuesta (ilustración 16).

Mixto

Cuando el inicio de la tarea propuesta exige, de entrada, considerar simultáneamente las características perceptuales globales e internas de la figura de partida y de llegada. La comparación se realiza: 1) a través de las partes 2D constituyentes de las dos representaciones (ilustración 19), o 2) considerando únicamente la forma de la figura de llegada (que está determinada figuralmente o en lengua natural) y en la de partida, sus partes internas 2D (ilustración 20).

Ilustración 19 Cambio de focalización mixto.
En *Matemáticas 4*, Anaya, España, p. 163

¿Cuál de las figuras obtienes si vas girando y reproduciendo sucesivamente la figura inicial?

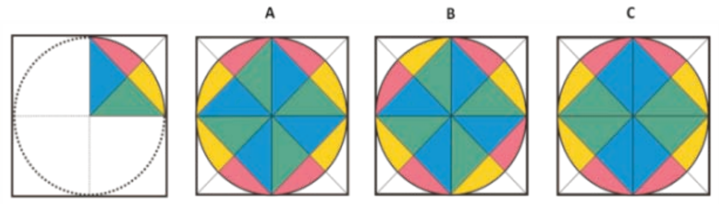


Ilustración 20 Cambio de focalización mixto.
En *Fórmula 2*, Voluntad, España, p. 118

Arma las siguientes figuras con el tangram de la página 210.

Este cambio de focalización también está presente en tareas donde se solicita determinar el área de una figura que no ha sido fraccionada y se da otra figura que representa la unidad de medida de área. Es el caso de las figuras representadas en la ilustración 17 y donde la consigna solicita averiguar por recubrimiento cuál es el área de la figura anaranjada tomando como unidad de medida la figura amarilla. En este sentido, quien resuelve la actividad planteada debe no sólo comparar globalmente las dos figuras en cuestión, sino que además requiere considerar las características perceptuales de las subfiguras que ha ido "introduciendo" en la superficie de la figura anaranjada y de las subfiguras que faltan por introducir.

Flujo visual

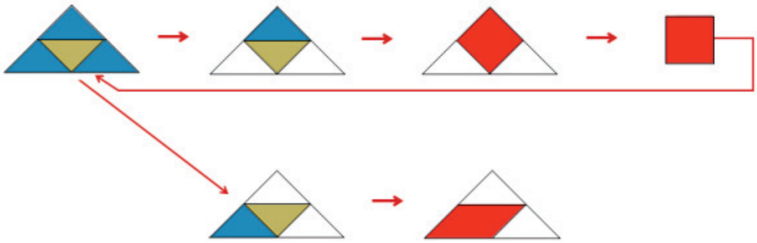
Alude al sentido de la secuencia visual aplicada en el desarrollo de las actividades propuestas en los textos escolares; es decir, a la manera como se organizan los distintos cambios (figural, dimensional, focalización 2D) y las operaciones considerados en el desarrollo o comprensión de la actividad planteada en el desarrollo de la tarea propuesta. Para que haya flujo visual, es necesaria la presencia de al menos dos de los elementos antes citados, o uno de ellos y la aplicación de una operación. Son dos los flujos visuales discriminados.

Lineal

Cuando la atención recae en una de las partes constituyentes (0D, 1D, 2D) de la configuración de partida y, a continuación, se aplica sobre ella un cambio en la manera de ver o una operación. En este caso las características perceptuales de la figura de partida se ponen en segundo plano y la atención recae únicamente en las características perceptuales de la parte de la configuración privilegiada. A manera de ejemplo, en la ilustración 21, en la figura de la izquierda, se solicita encontrar un cuadrado. En consecuencia, es necesario aplicar un cambio de focalización (pasar de centrar la atención en las características globales de la configuración de partida: un triángulo grande formado por cuatro triángulos pequeños o un triángulo pequeño dentro de un triángulo grande, a hacerlo en dos de sus subfiguras). Luego se requiere aplicar sobre las partes focalizadas una operación (reconfiguración por ensamblaje de partes), generando así una nueva figura y, sobre ésta, aplicar una nueva operación (rotación) para identificar que la figura encontrada es en realidad un cuadrado. En el proceso de búsqueda no es necesario considerar las características perceptuales de la figura de inicio, la atención recae en su totalidad en las partes 2D de la figura.

Ilustración 21 Flujo lineal. Parte del procedimiento de resolución de tarea presentada en *Matemáticas 4,* Anaya, España, p. 157

Ilustración 22 Flujo en circuito. Parte del procedimiento de resolución de tarea presentada en *Matemáticas 4,* Anaya, España, p. 157



Circuito

Alude al hecho de que en algún momento del flujo visual es necesario apoyarse en más de una ocasión en alguna(s) de las características perceptuales de la figura de partida. En consecuencia, es indispensable retornar la configuración de inicio. Sucede cuando:

- de manera similar que en el flujo lineal, la atención recae en una de las partes constituyentes de la configuración de partida y se aplica en ella un cambio en la manera de ver o una operación. Además, a continuación se consideran las características perceptuales de la figura de inicio y se inicia un nuevo flujo de naturaleza lineal;
- es indispensable tener en cuenta diferentes partes de la configuración inicial (unidades 0D, 1D, subfiguras, subconfiguraciones) y se aplican sobre algunas de ellas, no en todas, operaciones o cambios en la manera de ver.

En la ilustración 22 se ejemplifica el flujo visual exigido en el desarrollo de una tarea donde se pide discriminar en la configuración de la parte superior izquierda un cuadrado y un romboide. Una vez encontrada la primera de las figuras, es necesario considerar de nuevo las características perceptuales de la figura de partida para dar inicio a la búsqueda de la segunda figura.

En el cuadro 2 se presentan sintéticamente las cinco categorías previamente descritas, así como el aspecto de la visualización que caracteriza los elementos que las constituyen y el tipo de aprehensión en el que influyen.

Prueba de la confiabilidad y validez del instrumento de análisis

Una segunda parte que se tuvo en cuenta en el diseño de la metodología de análisis de manuales escolares aquí tratada se relaciona con la puesta a prueba de su confiabilidad y validez. En primera instancia, se seleccionó al azar uno de los manuales utilizados en la investigación y se procedió a discriminar las clases de visualización promovidas en él. Esto se hizo con el doble objetivo de determinar la efectividad y coherencia de las categorías y subcategorías diseñadas, así como de identificar los tipos de visualización imperantes. En el proceso no se observó dificultad ni incoherencia alguna al aplicar el instrumento de análisis diseñado. En una segunda instancia, se solicitó a un grupo de tres investigadores especializados en el campo de la educación matemática, en particular en cuestiones visuales y de análisis de textos escolares, evaluar la pertinencia y coherencia de las categorías previamente mencionadas. Sólo dos de los investigadores presentaron un informe detallado. En ambos casos se resaltó el grado de utilidad y el nivel de detalle del instrumento. Ninguno detectó incoherencias ni dificultades en las definiciones de las categorías y subcategorías. Uno de los investigadores sugirió ejemplificar cada una de las subcategorías y realizar una prueba piloto de codificación con el propósito de garantizar que el sistema de clasificación propuesto pueda ser utilizado por investigadores ajenos al proceso de diseño del instrumento.

En consecuencia, en una tercera instancia se realizó una fase piloto de codificación. De manera arbitraria y al azar, se seleccionaron ocho tareas presentes en dos capítulos de dos libros de una de las editoriales estudiadas. Se elaboró un documento con cada una de las categorías y subcategorías consideradas, con ejemplos representativos de cada una de ellas, para que otras personas pudieran utilizarlo para codificar las tareas de áreas de regiones poligonales presentes en los manuales. Se diseñó una matriz de datos para determinar el tipo de visualización presente en cada una de las tareas por analizar. Para su

Cuadro 2 Categorías de análisis: rol, elementos y aprehensiones que las caracterizan

Categorías de análisis	Aporte	Elementos	Aprehensión
Operación	Determina la naturaleza de los cambios figurales introducidos e inducen la comprensión de propiedades y conceptos de área.	Reconfiguración, configuración, traslación, rotación, anamorfosis, cuadratura, simetría axial, superposición y fraccionamiento.	Operatoria.
Cambio figural	Caracteriza la aprehensión operatoria.	Real, parcial, intermitente, intrínseco y no real.	Operatoria.
Cambio dimensional	Promueve la deconstrucción dimensional de las formas.	Fijo, operatorio y desdoblamiento.	Discursiva.
Cambio de focalización 2D	Suscita cambios en la visualización centrados en unidades visuales de naturaleza bidimensional.	Configural, intrafigural y mixto.	Operatoria y perceptual.
Flujo	Establece el orden y sentido del tipo de visualización aplicado.	Lineal y en circuito.	Operatoria y discursiva.

codificación, tanto los capítulos seleccionados como la matriz fueron entregados a un nuevo grupo de investigadores, quienes fueron informados sobre el problema de la investigación y el proceso que estaba en curso. Sólo uno de ellos llenó y entregó la matriz en las fechas estipuladas. Tras comparar el análisis de los diseñadores con el del evaluador, se observó que el grado de acuerdo fue de 87.5% para los cambios figural y de focalización, de 100% para el cambio dimensional y el flujo visual y de 62.5% para las operaciones. Lo que significa que el instrumento es consistente y válido para cuatro de las cinco categorías consideradas en la investigación (cambio figural, cambio dimensional, cambio de focalización bidimensional y flujo visual); no para la categoría de operaciones donde el grado de coincidencia fue menor que 80 por ciento.

A continuación, con el propósito de identificar las debilidades de la categoría de operaciones, se entregó al evaluador que inicialmente había cumplido con el ejercicio propuesto una nueva matriz donde se presentaron los argumentos utilizados por los diseñadores para asignar a cada tarea una operación u otra. El evaluador consignó en la misma matriz los argumentos seguidos por él al caracterizar las tareas. La no coincidencia recayó en tres de las tareas donde el investigador que evaluaba el instrumento consideró, a diferencia nuestra, la presencia de la operación de superposición. A partir de un estudio exhaustivo del análisis hecho por él y una comparación de sus argumentos con los nuestros, se identificó que la inconsistencia y falta de precisión provenía de la manera en que se redactó la definición de la operación de superposición y también del modo en que se ejemplificó. Estos resultados se utilizaron para refinar la categoría de operaciones y para seleccionar ejemplos más representativos para la operación de superposición. Así, se procedió a buscar nuevos ejemplos que caracterizasen de manera adecuada y contundente tal operación y se reorganizó la redacción de su definición. Para terminar el proceso de codificación piloto, se solicitó a un nuevo evaluador que codificara las mismas ocho actividades. En este caso, sólo se consideró la categoría de operaciones y la coincidencia fue de 100 por ciento.

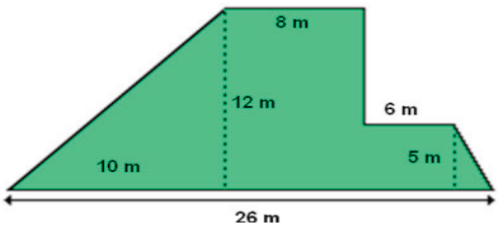
EJEMPLO DE CODIFICACIÓN DE UNA TAREA

Con el objetivo de ejemplificar la aplicación del instrumento de análisis previamente expuesto, codificamos el tipo de visualización que caracteriza una tarea propuesta en uno de los libros escolares analizados en la investigación (ilustración 23). Tanto la tarea como el libro de texto fueron seleccionados de modo arbitrario y al azar. En lo que sigue, se describe y se contextualiza la tarea por analizar según el lugar y el propósito que ocupa en el manual escolar del cual fue extraída. Posteriormente, se discrimina la clase de visualización que subyace en su desarrollo.

Tarea por codificar:

Ilustración 23 Cálculo de área de una figura irregular.
En *Matemáticas 1ESO,* Santillana, España,, p. 215

Obtén el área de la siguiente figura



Contextualización y descripción de la tarea: forma parte de un capítulo dedicado al estudio de perímetros y áreas a través de la aplicación de fórmulas, donde, en particular, se introduce el área de figuras trapezoidales y se solicita calcular el área de un polígono irregular. No existe fórmula por aplicar de manera directa sobre la figura de partida. Se requiere aplicar sobre su superficie un fraccionamiento en zonas cuyas formas sí permitan utilizar fórmulas previamente dadas por el texto escolar.

La figura que se va a medir es susceptible de dos tipos de descomposición pertinentes al desarrollo de la problemática planteada, a saber:

- Por un lado, la figura es representada parcialmente fraccionada (la introducción de medidas por considerar provocan en la figura de inicio un fraccionamiento), se encuentra dividida en dos triángulos (uno de base 10 m y altura 12 m; el otro, de altura 5 m y base desconocida). Por otra parte, las características del contorno de la figura de inicio suscitan la descomposición de la figura en dos subfiguras adicionales: un rectángulo de altura 12 m y otro de base 6 m).

- Teniendo en cuenta que la tarea es parte del tópico donde se introduce la fórmula para calcular trapecios y que la forma de la figura permite su descomposición en subfiguras de forma trapezoidal, otra probable descomposición ha de ser la división de la figura en dos trapecios (uno de altura 12 m y el otro de altura 5 m).

Sea cual fuese el fraccionamiento elegido por quien pretende resolver la tarea, es necesario en ambos casos aplicar sobre la figura de inicio un fraccionamiento, centrar la atención en las subfiguras en que fue dividida su superficie y aplicar en cada una de ellas la fórmula que corresponde (fórmula de área de un triángulo y un rectángulo o de un trapecio). Pero los datos que hay que sustituir en las fórmulas no se han dado ni resaltado en su totalidad. Por ejemplo, en la segunda de las maneras posibles de descomposición, no se han consignado ni resaltado las bases mayores de los dos trapecios y sus respectivas longitudes. En consecuencia, es necesario comparar entre sí la unidad 1D que representa la base de la figura que se tiene que medir (resaltada por una flecha y un dato numérico: 26 m) con las bases mayores de los dos trapecios. Asimismo, es indispensable establecer comparaciones adicionales entre las unidades 1D de la figura de partida, resaltadas por los valores numéricos 8 m y 6 m, y la que representa su base. Estas comparaciones suscitan operar y aplicar desdoblamientos sobre algunas de las unidades 1D consideradas.

Proceso de codificación: se aplica sobre la figura de partida un fraccionamiento (Fr) que promueve un cambio figural interno (I) y se introducen en el proceso de transformación tres cambios dimensionales de distinta naturaleza: fijo (F), desdoblamiento (D) y operatorio (O). Esto se debe a que es necesario, además de trasladar y unir o fraccionar segmentos, asumir unidades de dimensión 1 como elementos que forman parte simultáneamente de dos subfiguras distintas y considerar de forma estática una de las unidades 1D. Con respecto al cambio de focalización 2D considerado, es de naturaleza intrafigural (Int), pues la atención recae en las subfiguras introducidas en la figura de partida. El flujo visual, por su parte, se caracteriza por ser en circuito (C), puesto que, a pesar de que se aplica inicialmente un flujo lineal (fraccionamiento de la figura en partes, focalización en cada una de ellas y aplicación de cambios dimensionales), es necesario regresar a la figura de inicio para establecer comparaciones entre algunas de las unidades 1D tanto del polígono irregular como de las subfiguras en que fue dividido. De esta manera, el desarrollo de la tarea se encuentra visualmente caracterizada por la 5-upla: (Fr, I, F.D.O, Int, C).

CONCLUSIONES

La visualización es un asunto que está lejos de ser obvio y espontáneo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Marmolejo, 2007; Marmolejo y Vega, 2012). Diferentes investigaciones han puesto de manifiesto que la capacidad visual de un individuo es susceptible de mejoría (Presmeg, 2006; Marmolejo y Vega, 2012). Por tanto, se ha llamado la atención a considerar el desarrollo de la visualización de manera paralela al estudio de las matemáticas (Villani, 1998; Presmeg, 2006). Los libros de texto y el área de regiones poligonales se posicionan como tópicos para sondear cuál es el papel que se asigna a la visualización en la enseñanza de las matemáticas. Los primeros, al tipificar las propuestas de enseñanza privilegiadas en el aula y dar vida a los lineamientos curriculares de una nación. El segundo, al ser un objeto matemático donde el acto de ver desempeña un papel fundamental para su comprensión y donde la visualización puede ser un objeto de desarrollo. Así, pues, la caracterización de las maneras de ver que subyacen en el modo como los manuales escolares motivan la enseñanza del área de polígonos regulares es un asunto que tiene que considerarse en la investigación educativa.

La metodología de análisis propuesta en este artículo permitirá explorar de qué manera y en qué nivel los textos promueven el desarrollo de la visualización a través del área de regiones poligonales. En este sentido, la identificación de los tipos de reconfiguración, cambios dimensionales y de focalización considerados en la investigación desempeñan un papel determinante, pues caracterizan las aprehensiones operatoria y discursiva movilizadas en los libros, elementos sobre los que se sustenta la visualización y que definen su enseñanza. Esta metodología también permite identificar las operaciones, los cambios figurales, dimensionales y de focalización bidimensional, así como los flujos visuales que propician o no el tratamiento del área. Es el caso, por ejemplo, del papel concluyente de la reconfiguración en el estudio de las relaciones de equivalencia y orden entre áreas y de las configuraciones simple y por reiteración tanto para la adición como el producto de áreas. O de las posibles dificultades u obstáculos que para la conceptualización del área puede generar la aplicación de "giros" por fuera del plano; acción que caracteriza la operación de configuración por simetría.

En este sentido, la aplicación de esta metodología de análisis a los manuales escolares permite a los autores de textos de matemáticas controlar la cantidad y el tipo de tareas que proponen, asumiendo como suya la responsabilidad de promover el desarrollo de la visualización o de recurrir a ella para dotar de sentido el estudio del área. Los educadores, por su parte, cuentan con una herramienta que les permitirá organizar las actividades de áreas presentadas en los libros y aplicarlas en el aula sin perder como referente la naturaleza visual que subyace en su resolución o comprensión. En caso de que el manual seleccionado no promueva la aplicación de alguno de los elementos de las categorías de análisis consideradas en la investigación, tendrán elementos que considerar para introducir nuevas tareas que sí lo permitan. De esta manera, se darían los primeros pasos para que se asuma el área como un contenido donde es factible el desarrollo de la visualización.

Finalmente, consideramos necesario llamar la atención respecto al desarrollo de futuras investigaciones que permitan discriminar si los libros favorecen o no la adquisición de la visualización por medio de áreas de regiones poligonales; por tanto, que determinen cuál es el papel que se asigna en la visualización a cada uno de los elementos considerados en la metodología propuesta. También es indispensable generar estudios que caractericen las tareas de área de los libros según la complejidad que introduce la visualización en su resolución o comprensión, aspecto de vital importancia al seleccionar, organizar y aplicar las tareas de los libros. Asimismo, es imprescindible el desarrollo de trabajos que determinen cómo utilizan los libros los elementos considerados en la metodología propuesta para suscitar o, por el contrario, obstaculizar el aprendizaje del área de regiones poligonales. Desde un punto de vista distinto, esta metodología podrá ser adaptada como método de investigación en otros tópicos matemáticos cuyo tratamiento se realice tanto en la educación primaria como en la secundaria y donde su aprendizaje asigne un papel esencial a las figuras bidimensionales y a la visualización asociada a ellas, lo que permitirá tener una visión más completa de las exigencias visuales que deben poner en práctica los alumnos a lo largo de su instrucción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alajmi, A. H. (2012), "How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 79, núm. 2, pp. 239-261.

Álvarez, M. D. (2007), *Matemáticas 1. ESO. Proyecto La casa del saber*, Santillana, Madrid.

Cabassut, R. (2006), "Argumentation and proof in examples taken from French and German textbooks", en J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (eds.), *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Charles University in Prague, Praga, pp. 1, 230.

Chamorro, M. C. (1997), *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*, tesis doctoral microfilmada, UNED, Madrid.

Cobo, B., y C. Batanero (2004), "Significado de la medida en los libros de texto de secundaria", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 22, núm. 1, pp. 5-8.

Delaney, S., Y. Charlambous, H. Hsu y V. Mesa (2007), "The treatment of addition and subtraction of fractions in Cypriot, Irish, and Taiwanese textbooks", en J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (eds.), *Proceeding of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, The Korea Society of Educational Studies in Mathematics, Seúl, vol. 31, núm. 2, pp. 193-200.

Duval, R. (1995), "Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processing", en R. Suttherland y J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlín, pp. 142-157.

____________ (1998), "Geometry from a cognitive point of view", en C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37-51.

____________ (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, trad. de Myriam Vega Restrepo, Artes Gráficas Univalle, Cali.

____________ (2003), "Voir en mathématiques", en E. Filloy (ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, pp. 41-76.

____________ (2004), *Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta*, trad. de María del Carmen Chamorro, Instituto Superior de Formación del Profesorado, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid (Colección Aulas de Verano).

Falduto, V. (2008), *A content analysis of contemporary college algebra textbooks: Applications of visualization strategies*, tesis doctoral no publicada, Nova Southeastern University, Florida.

Ferrero, L. F., I. Gaztelu, P. Martín y L. Martínez (2008), *Matemáticas 4. Primaria. Segundo ciclo. Proyecto Abre la puerta*, Mateu Cromo, Madrid.

____________ (2008), *Matemáticas 5. Primaria. Tercer ciclo. Proyecto Abre la puerta*, Mateu Cromo, Madrid.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel Publishing Company, Dordrecht.

González, M. T., y M. Sierra (2004), "Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 22, núm. 3, pp. 389-408.

Henao, J. T. (2006), *Matemáticas 5. Primaria. Proyecto La casa del saber*, Santillana, Madrid.

Kamii, C., y J. Kysh (2006), "The difficulty of 'length×width': Is a square the unit of measurement?", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 25, núm. 2, pp. 105-115.

Kim, R. Y. (2012), "The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: An exploratory comparison between South Korea and the United States", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 44, núm. 2, pp. 175-187.

Kordaki, M (2003), "The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 52, núm. 2, pp. 177-209.

Li, Y. (2000), "A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, núm. 2, pp. 234-241.

Li, Y., J. Zhang y T. Ma (2009), "Approaches and practices in developing school mathematics textbooks in China", *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, vol. 41, núm. 6, pp. 733-748.

Lithner, J. (2004), "Mathematical reasoning in calculus textbook exercises", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 23, núm. 4, pp. 405-427.

Love, E., y D. Pimm (1996), "'This is so': A text on texts", en A. J. Bishop y otros (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 371-409.

Marmolejo, G. A. (2005), "Análisis del tópico de Geometría y Medición", en L. Torres (ed.), *Pruebas censales y formación de pensamiento matemático en la escuela*, Universidad del Valle, Cali, pp. 27-44.

Marmolejo, G. A. (2007), *Algunos tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad*, tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali.
Marmolejo, G. A., y M. T. González (2011), *La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de análisis de libros de texto*, Conferencia presentada en Asocolme 12 (6-12 de octubre), Armenia, Colombia.
____________ (2013a), "El control visual en la construcción del concepto de área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis", Enviado.
____________ (2013b), "Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto", *Revista Integración*, vol. 31, núm. 1, pp. 87-106.
Marmolejo, G. A., y M. Vega (2012), "La visualización en las figuras geométricas un asunto complejo y de importancia en el aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica", *Educación Matemática,* vol. 24, núm. 3, pp. 9-34.
Mesa, V. (2004), "Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 56, núms. 2-3, pp. 255-286.
____________ (2010), "Strategies for controlling the work in mathematics textbooks for introductory calculus", *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. 7, núm. 16, pp. 235-265.
Mesquita, A. (1989), *L´influence d´aspects figuratifs dans l´argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*, tesis doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Estrasburgo.
Ortiz, M. C. (2008), *Fórmula 2*, Voluntad, Bogotá.
Padilla, V. (1992), *L´influence d´une acquisition de traitementes purement figuraux pour l´apprentissage des Mathematiques*, tesis doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Estrasburgo.
Pepin, B., L. Haggarty y M. Keynes (2001), "Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning culture", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* vol. 33, núm. 5, pp. 158-175.
Presmeg, N. (2006), "Research on visualization in learning and teaching mathematics", en A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Sense, Rotterdam, pp. 205-235.

Schmidt, W. H., D. Jorde, L. S. Cogan, E. Barrier, I. Gonzalo, U. Moser, Y. Shimizu, T. Sawada, G. Valverde, C. Mc Knight, R. Prawat, D. E. Wiley, S. Raizen, E. D. Britton y R. G. Wolfe (1996), *Characterizing Pedagogical Flow. An Investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries*, Kluwers Academic Publishers, Dordrecht.

Villani, V. (1998), "Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study)", en C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 337-346.

Zacharos, K. (2006), "Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 25, núm. 3, pp. 224-239.

DATOS DE LOS AUTORES

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia
Profesor, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Colombia
gamav.academico@gmail.com

María Teresa González Astudillo
Profesora Titular, Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca, España
maite@usal.es