ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas

Solange Roa Fuentes y Asuman Oktaç

Resumen: En este artículo se propone una descomposición genética genérica del infinito y dos descomposiciones genéticas particulares: una para la paradoja de las pelotas de tenis y otra para la paradoja del hotel de Hilbert. Estos análisis toman como fundamento la construcción de procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes relacionados con el infinito potencial y actual, respectivamente. Además, se presenta un análisis de las características de los procesos inmersos en cada situación y la complejidad que implica coordinarlos con el conjunto de los números naturales para construir procesos iterativos infinitos. Se estudia la dificultad que enfrenta un individuo al coordinar procesos de diferente naturaleza, convergentes y divergentes, para construir el infinito como un proceso.

Palabras clave: teoría APOE, procesos iterativos infinitos, mecanismos y estructuras mentales, objeto trascendente, paradojas.

Abstract: A generic genetic decomposition of infinite and two particular genetic decompositions is proposed in this paper: A paradox for tennis balls and one for the Hilbert Hotel paradox. These analyzes take as a basis the construction of infinite iterative processes and transcendent objects, related to the infinite potential and current, respectively. In addition an analysis of the characteristics of the processes involved in each situation and the complexity of coordinating them with the set of natural numbers to construct infinite iterative processes is presented. The difficulty faced by an individual to coordinate processes of different nature is studied: converging and diverging to infinity as a build process.

Keywords: APOS theory, infinite iterative processes, mechanisms and mental structures, transcendent object, paradoxes.

Fecha de recepción: 11 de noviembre de 2013; fecha de aceptación: 13 de marzo de 2014.

INTRODUCCIÓN

Recientes investigaciones que se fundamentan en la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) han planteado estructuras particulares para explicar cómo entiende un individuo el infinito matemático. El estudio de esta noción ha generado la evolución de la teoría APOE; las estructuras y mecanismos tradicionales no han sido suficientes para explicar la manera como los individuos intentan comprender situaciones matemáticas que involucran el infinito. En este escrito se utiliza una de dichas estructuras (el objeto que trasciende de un proceso iterativo infinito) para explicar la construcción del infinito en un contexto de paradojas (para mayor información sobre esta teoría, consúltese Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014); además, se muestra la conveniencia de definir una descomposición genética *genérica* de infinito y descomposiciones particulares para cada contexto matemático en el que esta noción aparece.

Inicialmente, Dubinsky, Weller, McDonald y Brown (2005a) plantearon que las estructuras *proceso* y *objeto* explican el infinito potencial y actual, respectivamente, sin que se presente contradicción entre ellas.

> El infinito potencial es la concepción de infinito como un proceso. Este proceso se construye empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales) que se refieren a una concepción acción. Repetir estos pasos (por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de estas acciones en un proceso. El infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación de este proceso. (Dubinsky y otros, 2005a, p. 346)

Mostrando diferentes situaciones en las que el infinito aparece, Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger (2004) analizan la coherencia de este argumento: el infinito potencial se percibe como una transformación que se repite sin fin, en donde pueden generarse tantos elementos del proceso como se quiera. Por otra parte, el infinito actual hace referencia a una cosa terminada, un objeto estático que puede construirse a partir de un proceso.

Dubinsky, Weller, McDonald y Brown (2005a, 2005b) muestran cómo se originó históricamente el infinito matemático sobre situaciones relacionadas con la iteración infinita. Esta idea es tomada por Brown, McDonald y Weller (2010), que estudian las construcciones que algunos individuos realizan al abordar el siguiente problema:

> Pruebe o refute: $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, ..., k\}) = P(N)$
>
> donde N representa el conjunto de los números naturales y $P(N)$ representa el "conjunto potencia", esto es, el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. (Brown, McDonald y Weller, 2010, p. 116)

Esta igualdad relaciona un proceso iterativo infinito (la unión infinita de subconjuntos finitos de N) con un conjunto estático (el conjunto potencia de N). Como puede verse, dicha proposición es falsa, ya que la unión no incluye los subconjuntos infinitos de N. Con base en el trabajo que realizan un grupo de estudiantes universitarios, los autores proponen la construcción de *un proceso iterativo infinito* a partir del cual se define un *objeto trascendente* (Brown y otros, 2010, p. 123). La construcción de un proceso iterativo requiere el conjunto de los números naturales (N), donde básicamente un individuo debe aceptar que dicho conjunto puede verse como un todo ordenado sin que un último elemento (definido generalmente como ∞) haya sido transformado.

Brown y otros (2010) plantean que un individuo puede lograr una concepción acción de un proceso iterativo infinito a partir de la realización de un número pequeño de iteraciones, transformaciones sobre un subconjunto ordenado de números naturales. Esta iteración finita se interioriza en un proceso cuando se alcanzan diferentes subconjuntos del conjunto N y se coordinan para lograr un único proceso iterativo infinito, del cual resulta "una sucesión (infinita numerable) de objetos" (Brown y otros, 2010, p. 124). Esta construcción permite que los individuos establezcan un proceso donde a cada número natural le corresponde de manera ordenada una única imagen. A partir de esta estructura, se da lugar a la construcción del objeto mediante el mecanismo de encapsulación. Según la visión de dichos autores, ver el proceso iterativo infinito como una totalidad requiere que el individuo acepte la aplicación de una transformación *al infinito*, de tal manera que "... [Un individuo debe entender] que este objeto está más allá de los objetos que corresponden a los números naturales y no se produce directamente por el proceso. Llamamos a este objeto, un *objeto trascendente* del proceso" (Brown y otros, 2010, p. 124).

Sobre este análisis es importante resaltar los siguientes aspectos:

- La comprensión del infinito está ligada a las estructuras que un individuo ha logrado construir sobre el conjunto de los números naturales.
- El objeto trascendente no se desprende de manera directa del proceso

iterativo infinito. El paso de la estructura dinámica a una estática está determinado por la capacidad del individuo para ver el proceso iterativo infinito como un todo, sin que el "último" número natural haya sido transformado.

- Aunque el infinito esté inmerso en la construcción de una gran variedad de conceptos matemáticos, no existe ningún programa curricular que contemple su estudio, excepto los programas de Matemáticas o algunos de licenciatura en Matemáticas que incluyen cursos de teoría de números. Por tanto, la construcción de los conceptos que incluyen el infinito se basan en ideas intuitivas; ideas que los individuos asocian con procesos que se repiten sin fin.

Los análisis que se presentan en esta investigación buscan mostrar con un mayor grado de profundidad, la complejidad de la construcción de procesos iterativos infinitos y sus objetos trascendentes.

LA TEORÍA APOE Y EL INFINITO

La necesidad de proponer nuevas estructuras para explicar cómo entiende un individuo el infinito matemático surge del análisis de datos empíricos que se obtienen del desarrollo del paradigma de investigación de la teoría APOE. Este paradigma propone el desarrollo de tres componentes: un análisis teórico, del cual se desprende una descomposición genética preliminar; un diseño e implementación de un modelo de enseñanza, y, finalmente, la colección, análisis y verificación de datos a partir de los cuales se reestructura y valida el análisis teórico inicial (Asiala y otros, 1996). En este escrito se informa el desarrollo de la primera componente para la noción de infinito matemático.

Dubinsky y otros (2008) plantean dos versiones de la paradoja de las pelotas de tenis, la primera es una versión denominada *finita,* donde no se tiene en cuenta el paso del tiempo, y la segunda es una versión donde el traslado de un número infinito de pelotas se realiza durante medio minuto.

> *Segunda versión:* Suponga que tiene tres botes con una capacidad ilimitada, etiquetados como bote contenedor, bote A y bote T con un botón dispensador que, cuando se presiona, mueve pelotas del bote contenedor al bote A. El bote contenedor tiene una cantidad infinita de pelotas de tenis, numeradas

> 1, 2, 3, ... Medio minuto antes del medio día, se presiona el dispensador y las pelotas números 1 y 2 pasan al bote A e instantáneamente la pelota número 1 pasa de A a T. Un cuarto de minuto antes del medio día, se presiona nuevamente el dispensador y las pelotas números 3 y 4 caen al bote A y automáticamente la pelota de menor denominación pasa al bote T. En el siguiente paso, $^1/_8$ de minuto antes del medio día, se presiona el dispensador y las pelotas números 5 y 6 pasan del bote contenedor al bote A e inmediatamente la pelota de menor denominación pasa al bote T. Si el modelo señalado continúa, ¿cuál es el contenido del bote A y T al medio día? (Dubinsky y otros, 2008, p. 100)

Dubinsky y otros (2008) plantean la necesidad de construir dos procesos iterativos infinitos (como los expuestos por Brown y otros, 2010) que se generan a partir de la coordinación del proceso de iteración a través del conjunto *N* y el paso del tiempo; la iteración a través de *N* y el movimiento de las pelotas de tenis. Los dos procesos resultantes se coordinan en un único proceso que da lugar al proceso iterativo infinito, del cual se obtendrá el infinito como un objeto. En 2008, Dubinsky y otros no se refieren al objeto trascendente, sino a la encapsulación del proceso resultante en un objeto (es pertinente aclarar que, aunque las referencias no tienen coherencia cronológica, los resultados de las investigaciones se conocían entre los miembros de RUMEC antes de ser publicados).

En general, los objetos resultantes de un proceso iterativo infinito son diferentes a los objetos que se obtienen en cada iteración del proceso. Concretemos esta idea en la construcción iterativa de una curva fractal.

Figura 1 Representación gráfica de la construcción de la curva de Koch

En la construcción iterativa de la curva de Koch, se van obteniendo curvas formadas por una cantidad cada vez mayor de segmentos de longitud cada vez menor; el perímetro de cada curva que precede a la curva de Koch se puede calcular mediante el producto entre el número de segmentos y la longitud de cada uno de ellos. En el cuadro 1 se muestra la longitud de cada una de dichas curvas.

Cuadro 1 Perímetro de las curvas que preceden a la curva de Koch

1	$4 \cdot \frac{1}{3}$	$4^2 \cdot \frac{1}{3^2}$	$4^3 \cdot \frac{1}{3^3}$	$4^4 \cdot \frac{1}{3^4}$	...	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$	...
0	1	2	3	4	...	*n*	...

Las curvas que preceden a la curva de Koch pueden representarse gráficamente, tienen un número real asociado como longitud y son derivables en casi todas partes, salvo en un número finito de puntos. Sin embargo, la curva de Koch no guarda estas características. Este objeto, "la curva de Koch", es el que trasciende del proceso iterativo que le da origen. Los procesos iterativos infinitos que se identifican en la construcción de este fractal son de diferente naturaleza, ya que el número de segmentos que se genera tiende a infinito (proceso divergente) y la longitud de los segmentos tiende a cero (proceso convergente). Entonces, el proceso que se obtiene al coordinar estos dos ¿es divergente o convergente? Aceptar que la curva de Koch tiene un perímetro infinito no es evidente para los estudiantes, aun cuando conocen que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$. Por ejemplo, David,[1] un estudiante que participó en esta investigación, tuvo problemas para aceptar que la curva de Koch es de longitud infinita; él comentó:

> David: ...Si yo repito los pasos un montón de veces, en realidad los segmentos en sí ya no van a ser segmentos... Los segmentos ya no se van a volver segmentos, los segmentos se van a volver puntos. Y pues la medida del punto es cero, entonces tengo un número infinito de cosas que miden cero... Entonces,

[1] Este es el seudónimo de un estudiante de 16 años que forma parte del "Programa Semicírculo" de la Universidad Sergio Arboleda (Colombia) y ha sido identificado dentro de su comunidad como talentoso en matemáticas.

como los segmentos que son puntos no tienen medida, sí van a ser cero en el paso al infinito. La curva de Koch mide cero, entonces quedaría algo así [David realiza el siguiente dibujo]:

Representación de la curva de Koch realizada por David

Aunque David finalmente concluye que la curva de Koch es de longitud infinita, su análisis sobre las características de los procesos de manera independiente lo lleva a pensar inicialmente que el perímetro de la curva de Koch es cero. Solo cuando logra establecer un único proceso p, tal que $p_i = \left(\frac{4}{3}\right)^i$ entre el conjunto de los números naturales y el perímetro de cada curva, logra argumentar que el perímetro es infinito. En este caso, la situación propone la construcción de los dos procesos iniciales para determinar el perímetro. Es el individuo quien debe determinar cómo coordinar estos procesos o cómo identificar un único proceso que permita aceptar las condiciones del objeto trascendente que no se derivan de los procesos independientes. De igual manera, aceptar la construcción de este objeto requiere que el individuo acepte que el conjunto de los números naturales está completo y que la curva de Koch es una "cosa" terminada cuya longitud se puede calcular.

De manera similar al problema anterior, el contexto de la paradoja de las pelotas de tenis propone la construcción de procesos iterativos infinitos que deben coordinarse para dar lugar a un único proceso del cual se desprende el objeto trascendente. En Roa Fuentes (2012) analizamos dos soluciones posibles de esta paradoja que, aunque parecen surgir de razonamiento coherentes, resultan contradictorias:

Solución A, una mirada actual: al llegar el medio día, todas las pelotas estarán en el bote T. Ya que, si piensas en cualquiera de las pelotas, podrás determinar el momento en el que dicha pelota pasó del bote A al bote T. Por ejemplo, piensa en la pelota número 1250. Esta pelota entró en el bote A $\frac{1}{2^{625}}$ minutos antes del medio día y, aunque en ese instante las pelotas 2499 y 2500 pasen al bote A, ellas pasarán al bote T $\frac{1}{2^{2499}}$ y $\frac{1}{2^{2500}}$ minutos antes del medio día, respectivamente. Así que, al medio día, todas las pelotas habrán pasado al bote T y, por tanto, el bote A estará vacío.

Solución B, una mirada potencial: al medio día los botes A y T tendrán la misma cantidad de pelotas. Ya que, al realizar el primer traslado medio minuto antes del medio día, la pelota 1 queda en el bote T y la pelota 2 en el bote A; un cuarto de minuto antes del medio día, las pelotas 1 y 2 están en el bote T y las pelotas 3 y 4 en el bote A; siguiendo con este proceso, cada vez que se realiza un traslado de pelotas, en los botes A y T quedan la misma cantidad de pelotas. (Roa-Fuentes, 2012, p. 100)

Estas soluciones resultan de analizar desde una perspectiva actual o potencial el contexto del problema; aunque la paradoja hace referencia directamente al infinito como un proceso, el objeto que trasciende se obtiene al pensar en el contenido de los botes al medio día. Este objeto, que hace alusión al infinito actual, no se parece a cada uno de los estados intermedios donde los botes T y A tienen la misma cantidad de pelotas. Este es un claro ejemplo donde no tiene sentido determinar un instante de tiempo $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}$, sino aceptar que todos los números naturales han sido alcanzados y que el objeto resultante está asociado más bien con el $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, que indica que ha llegado el medio día. Esto puede no ser inmediato en el razonamiento de un individuo, por ejemplo, los razonamientos realizados por Darío[2] muestran cómo las características de los objetos que se generan en cada iteración ejercen gran influencia en la manera en que él interpreta este resultado matemático. En particular, al analizar la paradoja, Darío se centra en la subdivisión infinita del tiempo; para ello considera la aplicación de un número infinito de subdivisiones, realizando el siguiente razonamiento:

Darío: Y por tanto, dado que al medio día... Dado que:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ m. antes del medio día $= \frac{1}{2^n}$ min. antes del ½ día

[2] Darío es el seudónimo de un estudiante de 10 años que forma parte de la Fundación Telegenio (México); ha sido identificado como talentoso en matemáticas dentro de su comunidad.

> Bueno, es la ecuación, la fórmula de la función que siguen estos números... Ah, perdón, $\frac{1}{2^n}$. Si seguimos la tabla [construye la siguiente tabla]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
#	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$1/32$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$1/2^{\infty} \approx 0$

> [En las últimas fila y columna escribe $\frac{1}{2^{\infty}}$: pero se arrepiente y cambia el símbolo de igualdad (=) por el de aproximación (≈) y continúa diciendo]:
>
> Normalmente se toma como 0... Pero *n* equivale al número de veces que se acciona el interruptor y, para que llegue a ser 0, tendría que accionarse infinitas veces.

En este análisis se refleja cómo Darío rechaza que el proceso iterativo infinito pueda terminar y el medio día pueda llegar. Esta centración en este proceso divergente hace que Darío no analice inicialmente cuál es el contenido de los botes, sino que se enfoque en la imposibilidad de terminar el proceso.

Un aspecto por destacar en los datos presentados es el uso que los estudiantes hacen del símbolo ∞, asignándole una categoría completa de número que permite enumerar y realizar cálculos (Lakoff y Núñez, 2000). Por ejemplo, Paul, uno de los estudiantes entrevistados en Dubinsky y otros (2008), extiende las propiedades de los conjuntos finitos al conjunto de los números naturales, asignando el símbolo ∞ al "último" número natural; reemplaza el valor de *n* por infinito y, a partir de esto, hace su reflexión sobre la paradoja. Si las pelotas están numeradas de la forma 1, 2, 3, ..., ∞, entonces Paul decide que después de $\frac{\infty}{2}$ pasos, el bote contenedor estará vacío.

Finalmente, Dubinsky y otros (2008) plantean, con base en el análisis de los datos empíricos, dos aspectos que enriquecen su análisis teórico:

1. La construcción de procesos de iteración a través de *N* puede facilitarse mediante su coordinación con procesos iterativos cuyo estado al infinito es fácilmente evidente.
2. El éxito de la coordinación de dos procesos iterativos infinitos puede requerir que uno, pero no necesariamente ambos procesos iterativos, sea concebido como completo. (Dubinsky y otros, 2008, p. 120)

En este sentido, la clave está en determinar el conjunto de los números naturales como un todo, ya que este proceso se coordina con otros que son particulares del contexto donde el infinito puede aparecer. Así, sin importar las características de las transformaciones implícitas en las situaciones, los procesos podrían verse como un todo. Ahora bien, determinar procesos iterativos infinitos cuyo estado final sea evidente no es una tarea fácil.

Por su parte, Mamolo y Zazkis (2008) presentan una descripción de cómo trabajan sobre la paradoja de las pelotas de ping-pong y la paradoja del hotel de Hilbert los estudiantes universitarios de un programa de Educación Matemática y de carreras de humanidades.

> *Paradoja del Hotel de Hilbert:* imagina que eres el administrador de un hotel que tiene un número infinito de habitaciones no vacías. Si solo se permite una persona por habitación, ¿cómo puedes acomodar a un nuevo y muy importante huésped en una habitación personal?
>
> *Paradoja de las pelotas de ping-pong:* imagina que tienes un conjunto infinito de pelotas de ping-pong numeradas 1, 2, 3, ... y un barril muy grande; estás a punto de iniciar un experimento. El experimento terminará exactamente en un minuto ni más ni menos. Tu tarea es tomar las primeras 10 pelotas e introducirlas en el barril y remover la número 1 en 30 segundos. En la mitad del tiempo anterior, vas a colocar las pelotas de la 11 a la 20 dentro del barril y vas a sacar la pelota número 2. Siguiendo en la mitad del tiempo resultante (y trabajando cada vez más y más rápido), coloca las pelotas 21 a la 31 en el barril, y quita la pelota 3. Continúa con esta tarea al infinito. Después de 60 segundos, al final del experimento, ¿cuántas pelotas de ping-pong permanecen dentro del barril? (Mamolo y Zazkis 2008, p. 169)

El desarrollo metodológico de Mamolo y Zazkis (2008) incluye un proceso de intervención y una recolección de datos antes, durante y después de dicha intervención. Los 36 estudiantes que participaron en el proyecto fueron divididos en dos grupos: el primero (G1) con 16 estudiantes que formaban parte de un programa de maestría en Educación Matemática; el segundo grupo (G2), formado por 20 estudiantes de Humanidades con antecedentes básicos en matemáticas.

En el análisis de la paradoja del hotel de Hilbert, se percibe cómo persisten en las respuestas de los estudiantes las ideas realistas respecto al contexto del problema, aun después de un proceso de instrucción donde se plantea la solución normativa (solución matemática donde aparece el infinito actual) del problema (Mamolo y Zazkis, 2008). Antes de dicha instrucción, los dos grupos no presentan grandes diferencias en sus desarrollos. Por un lado, sus respuestas al problema incluyen el cambio de las condiciones iniciales presentadas en el enunciado, por ejemplo, "podría hospedarse a más de un huésped en cada habitación" y, por otro, sus respuestas se relacionan con argumentos de tipo realista, por ejemplo, "el mundo tiene únicamente un par de billones de personas *[sic]*" (p. 172). En el análisis de los datos, sobresale el hecho de que los estudiantes aceptan la posibilidad de un hotel de infinitas habitaciones, pero no el número infinito de personas (Mamolo y Zazkis, 2008). Esto se asocia con la imposibilidad de establecer por parte de los individuos un proceso iterativo con el cual puedan relacionar la idea de infinito. En contraparte, la paradoja de las pelotas de ping-pong sugiere claramente dicho proceso.

Otros argumentos que presentan Mamolo y Zazkis (2008) se relacionan con la imposibilidad de aceptar que el hotel de infinitas habitaciones esté lleno. Esta resistencia a aceptar las condiciones del problema está relacionada con el infinito actual. "El gran hotel de Hilbert lleno" es un objeto trascendente de un proceso de llenado del hotel, resultado de la coordinación entre el conjunto de los números naturales y la ubicación de los huéspedes. En el enunciado de la paradoja no se hace alusión a la realización de un proceso iterativo, sino más bien a la aceptación de un infinito actual; el infinito como una cosa estática. Aunque es posible pensar en procesos de asignación de habitaciones mediante funciones biyectivas de N en subconjuntos de N, aceptar las condiciones de la paradoja requiere que cualquier proceso inicial se vea como terminado, lo que implica que el hotel de infinitas habitaciones esté lleno.

Al finalizar el proceso de instrucción, los estudiantes del G1 aceptan la solución normativa de la paradoja de manera más natural; sin embargo, los estudiantes del G2 se presentan más reacios y luchan por darles sentido a las matemáticas que están involucradas desde sus argumentos realistas. Por ejemplo, no pueden aceptar, según sus respuestas, un "proceso de reacomodación infinita", pues "nunca dejarían (los huéspedes) de moverse" (Mamolo y Zazkis, 2008, p. 175). Esta firmeza ante los análisis presentados indica una clara evidencia de la fortaleza de las ideas intuitivas (Fischbein y otros, 1979). Tales ideas hacen que los estudiantes recurran a argumentos de tipo realista para no aceptar las condiciones del problema y persistir en ellas incluso después de conocer la solución normativa de la paradoja. En términos del planteamiento de Hazzan (1999), puede decirse que estos estudiantes reducen el nivel de abstracción de la situación mediante argumentos de la vida cotidiana. En el estudio de situaciones que se relacionan con el infinito, la falta de argumentos matemáticos hace que los individuos den más importancia a los elementos del contexto que, en otras situaciones matemáticas, no son importantes para ellos.

Después del análisis del gran hotel de Hilbert, Mamolo y Zazkis (2008) presentan la paradoja de las pelotas de ping-pong. Como se puede ver, esta paradoja contempla un proceso similar a los expuestos en la paradoja de las pelotas de tenis, solo que en cada iteración entran diez pelotas en el primer barril y sale solo una, de tal manera que, en la iteración n, han salido n pelotas del barril y quedan en él $9n$ pelotas. Sin embargo, el asunto paradójico se presenta, ya que es posible afirmar que, después de 60 segundos, el barril estará vacío, debido a que es posible determinar el instante en que cada pelota sale del barril. Las soluciones iniciales de los estudiantes estuvieron relacionadas principalmente con dos ideas: "Hay infinitas pelotas que quedan en el barril" y "El proceso es imposible, ya que el intervalo de tiempo es partido por la mitad muchas veces, infinitamente, entonces los 60 segundos no terminan" (Mamolo y Zazkis, 2008, p. 176). Antes del proceso de instrucción, los estudiantes presentan argumentos relacionados con el tratamiento del símbolo ∞ similares a los encontrados en Dubinsky y otros (2008), que consisten en el uso de este símbolo como un número con el cual es posible realizar cálculos: "Hay $9x$ más pelotas en el barril que fuera de él todo el tiempo. Al finalizar los 60 segundos, hay 9∞ pelotas dentro e ∞ afuera" (Mamolo y Zazkis, 2008, p. 176). Los estudiantes que aceptan que los 60 segundos terminan simplifican los procesos iterativos infinitos en procesos finitos, pensando en los números naturales como 1, 2, 3, ..., ∞. De esta manera hacen una extensión de los procesos iterativos finitos a procesos infinitos.

Por otra parte, después del proceso de instrucción, los estudiantes consideran la imposibilidad de completar los 60 segundos. De acuerdo con Quine (1966, citado en Mamolo y Zazkis, 2008), los individuos, al tratar con situaciones infinitas que involucran el tiempo, cometen el error de pensar que infinitos intervalos de tiempo implican una eternidad. Estos son los argumentos de Kenny, que considera que la subdivisión del tiempo se puede realizar eternamente y que, por tanto, el barril contendrá un número infinito de pelotas.

En los argumentos de Kenny, las autoras identifican confusión respecto a la convergencia de series, "cantidades infinitamente pequeñas de tiempo" que suman 60 segundos, con la divergencia de las series que "seguirán eternamente". Estas dificultades están relacionadas con la manera en que se han construido los conceptos involucrados y la poca o nula reflexión en contextos de clase tradicional sobre cómo se entiende el infinito. Como lo plantea Tirosh (1991), los estudiantes deberían ser cuestionados sobre: "¿Qué es infinito? o ¿Cómo podrían explicar la idea de infinito a sus amigos?" (Tirosh, 1991, p. 207). Por lo menos en un contexto académico regular, los profesores de matemáticas no tienen claro qué concepciones tienen sus estudiantes sobre el infinito ni la manera como estas intervienen en la construcción de conceptos matemáticos.

Mamolo y Zazkis (2008) presentan tres tendencias relacionadas con el conflicto cognitivo generado en los estudiantes, al trabajar con las paradojas en párrafos anteriores:

1. Los estudiantes dejaron la solución normativa y encontraron refugio en consideraciones no matemáticas. Acudir a la imposibilidad práctica de los problemas presentados sirvió de solución del conflicto cognitivo o, más probablemente, como evasión de dicho conflicto.
2. Los estudiantes intentaron conciliar la solución normativa con sus concepciones principiantes. Para estos estudiantes, el conflicto cognitivo fue evidente y presentó una frustración considerable.
3. Los estudiantes diferenciaron entre su tendencia intuitiva y su conocimiento formal. La solución del conflicto cognitivo para estos estudiantes consistió en la separación más bien que en la conciliación. (Mamolo y Zazkis, 2008, p. 179)

Una idea muy importante señalada por Mamolo y Zazkis (2008) es que, para que un individuo inicie con la construcción estática del infinito, es fundamental que logre diferenciar sus ideas intuitivas del conocimiento formal. Este es un resultado del conflicto cognitivo que lograron las paradojas en algunos estudiantes, ya que el tratamiento de situaciones escolares cotidianas no permite la reflexión más allá de la temática que de manera puntual se esté abordando.

Con base en los elementos descritos hasta este momento, que se desprenden de la revisión de la literatura, en la siguiente sección se presenta el resultado de la primera componente –análisis teórico– del paradigma de investigación de la teoría APOE: Planteamos una *descomposición genética genérica* para el concepto de infinito, de la cual se desprenden análisis teóricos particulares para el caso de dos paradojas.

UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA GENÉRICA DE INFINITO Y DOS ANÁLISIS PARTICULARES

Durante el análisis teórico de las paradojas fue necesario definir una *descomposición genética genérica* para la construcción del infinito. Aunque toda situación matemática relacionada con este tópico matemático puede modelarse a través de un proceso iterativo infinito, la naturaleza de los procesos tiene implicaciones sobre la manera en que un proceso iterativo puede ser construido exitosamente por un individuo; además, el contexto que propone cada situación parece determinar la manera como puede abordarla un individuo. A continuación desarrollamos estas ideas con mayor precisión.

Descomposición genética genérica preliminar

Este análisis propone la construcción de un proceso iterativo infinito y un objeto trascendente que corresponden a construcciones dinámicas y estáticas del infinito a partir del concepto de conjunto de los números naturales como un objeto. Esta concepción le permite a un individuo empezar a pensar en un proceso iterativo infinito como una totalidad. Es decir, aceptar que todos los elementos del conjunto de los números naturales han sido alcanzados mediante el proceso y, por tanto, el proceso de iteración termina.

Por ahora describiremos de manera hipotética cómo puede un individuo construir el infinito independientemente del contexto donde este se presente. Esto es lo que hemos denominado un análisis genérico, donde aparecen los procesos iterativos genéricos que pueden ser adaptados a los diferentes contextos y a las características particulares que puedan identificarse en una situación matemática.

Cuando un individuo aborda una situación matemática relacionada con el infinito, debe identificar las transformaciones inmersas en la situación que por iteración sobre N (conjunto de los números naturales) generan los términos de una o más sucesiones. Para esto, podemos pensar en transformaciones f_i (para $i = 1, 2, 3, ..., n$) que toman elementos del conjunto de los números naturales y los transforman en elementos de un conjunto X caracterizado por el contexto de cada situación. Con base en estos elementos, el individuo podrá calcular términos específicos de cada transformación f_i que identifique en la situación. Con una concepción acción de infinito, un individuo puede identificar las transformaciones presentes en una situación matemática. Además, puede determinar algunos de los elementos que se generan al aplicar cada una de las transformaciones identificadas en un subconjunto finito de elementos de *N*. Esto permite que el individuo identifique las características de los elementos generados por la aplicación de una transformación (con esto nos referimos a una función cuyos elementos de entrada son el conjunto de los números naturales) sobre unos cuantos elementos del dominio 1, 2, 3, ..., *n*, de tal manera que pueda caracterizar los términos de la sucesión como estados resultantes de la aplicación de dicha transformación.

Al igual que en la construcción de otros objetos matemáticos, una concepción acción de infinito es la construcción más básica, pero no la menos importante. Con esta estructura, el individuo podrá calcular una cantidad "pequeña" de elementos del proceso iterativo asociando a cada número natural un elemento de la sucesión. Como mostramos en los ejemplos iniciales, esta sucesión está caracterizada por el contexto de cada situación relacionada con el infinito matemático.

Cuando un individuo tiene una concepción acción de infinito, el siguiente paso es interiorizar estas acciones en un proceso. Esta interiorización se da cuando el individuo puede pensar en calcular infinitos estados, elementos que establecen la construcción del proceso iterativo infinito. El individuo debe entender que, para cada número natural, es posible calcular un término y que a cada término le corresponde un único número natural, estableciendo una relación biyectiva.

Un punto clave es determinar qué motiva el mecanismo de interiorización; por ahora diremos que este mecanismo se genera por la imposibilidad de representar "todos" los estados del proceso. El individuo debe identificar que el problema está relacionado con el infinito y determinar la imposibilidad de realizar de manera "externa" todas las iteraciones. Este mecanismo no es inmediato; aceptar que un número infinito de pasos o iteraciones puede realizarse ha causado históricamente gran controversia. Los seres humanos, dada nuestra naturaleza finita, no podemos inadvertidamente aceptar que "alguna cosa" pueda realizarse infinitas veces, ya sea por el paso del tiempo, por un problema de representación o por la incapacidad de percepción mediante nuestros sentidos. Por tanto, si un individuo acude a este tipo de argumentos y considera que no es posible admitir las condiciones de la situación como un proceso iterativo que se repite sin fin, entonces diremos que no ha construido una concepción proceso de infinito.

Como mencionamos al inicio de este análisis, en una situación matemática donde aparece el infinito, pueden identificarse uno o más procesos iterativos que se coordinan con los números naturales. Cuando se logra una concepción proceso de infinito, el siguiente mecanismo puede ser el de encapsulación si el proceso identificado es único, o el de coordinación si se tienen dos procesos o más. En este punto, nos interesa aclarar que hablamos del mecanismo de encapsulación, aun cuando pensamos que este puede no ser suficiente para generar el objeto trascendente.

En el caso en que la situación involucra más de un proceso iterativo infinito, es necesario coordinar dichos procesos en un único proceso que finalmente pueda dar paso a la construcción del objeto trascendente. El proceso resultante es un proceso iterativo infinito, en el que se identifica una única transformación sobre el conjunto de los números naturales para obtener una sucesión cuyos términos agrupan las condiciones de la situación matemática en un único proceso. Esta coordinación está determinada por las características de los procesos involucrados, en particular, por las relaciones generales que puedan establecerse entre ellos sobre el conjunto de los naturales.

Si la situación involucra un único proceso que se coordina con el proceso de los números naturales, el siguiente paso es ver ese proceso como una totalidad, de tal manera que el individuo debe empezar a pensar en el proceso como un todo. Esto se genera por el mecanismo de encapsulación; dicha encapsulación es aun más sofisticada que las utilizadas en la construcción de otros objetos matemáticos. Esto se debe a que el objeto resultante debe abstraerse del proceso, por no ser este de las mismas características de los estados intermedios de la sucesión. La aplicación de este mecanismo está motivada por la pregunta planteada en cada problema, ya que en general requiere la aceptación del infinito como un todo, el infinito actual. En este punto, cobra fundamental importancia la concepción objeto de los números naturales, ya que esta permite agotar el proceso y pensar en las características del objeto resultante.

Dada la importancia de la formulación de la pregunta para contemplar el proceso como terminado, diremos que este mecanismo de encapsulación no es generalizable, en el sentido de que estará motivado por el contexto de cada situación. Esto podrá verse con detalle más adelante, cuando presentemos el análisis de dos situaciones específicas donde el infinito emerge de diferente manera.

Tomando como base los elementos descritos en este análisis, a continuación presentamos descomposiciones genéticas particulares en las que el contexto es determinante sobre la manera en que emerge el infinito. Y por tanto, la manera de abordar la situación y el mecanismo que da paso del proceso iterativo infinito al objeto trascendente están motivados por diferentes talantes.

Paradojas matemáticas: análisis teóricos particulares

La palabra paradoja proviene del griego (*para* y *doxos*) y significa etimológicamente "más allá de lo creíble". Una situación paradójica puede presentar dos o más soluciones que pueden parecer ciertas aunque contradictorias. El uso de paradojas en matemáticas es considerado de gran importancia, ya que, por un lado, históricamente su formulación y análisis han permitido el desarrollo de conceptos matemáticos y, por otro, han sido consideradas como generadoras de conflictos cognitivos en los individuos (Martínez, 1999; Movshovitz-Hadar y Hadass, 1990).

Watzlawick, Bavelas y Jakson (1981, citado en Martínez, 1999, p. 173) definen una paradoja como: "una contradicción que resulta de una deducción correcta a partir de premisas congruentes". Aparentemente, los razonamientos dados frente a una situación paradójica no pueden ser catalogados como correctos o erróneos. Sin embargo, Movshovitz-Hadar y Hadass (1990) muestran que un individuo, frente a dos posibles soluciones de una situación que parecen lo suficientemente convincentes, debe determinar con sus argumentos cuáles son los elementos defectuosos que hacen que una de ellas no sea correcta.

Cuando un individuo afronta un situación paradójica, contemplando soluciones que parecen desprenderse de razonamientos lógicos, pero que resultan contradictorias entre ellas, es fundamental que detecte la diferencia. Es decir, que determine cuáles de los razonamientos desarrollados son adecuados y decida cuál es la solución más apropiada. En el caso de la paradoja de las pelotas de ping-pong, ¿cómo admitir que dentro del barril es posible que queden "muchas" pelotas y a la vez ninguna? La necesidad de un análisis más profundo sobre los argumentos de uno y otro aspecto deben motivar una fina reflexión de sus demostraciones, de tal manera que los individuos puedan cuestionarse respecto al papel que desempeñan los conceptos matemáticos involucrados. Una situación paradójica puede poner en jaque las estructuras establecidas sobre un tópico matemático, es decir, en algunos casos los individuos no logran embonar un resultado matemático con la solución de una situación matemática. Esto se relaciona con el peso que tienen las concepciones que desarrolla un individuo sobre un concepto matemático con base en ideas puramente intuitivas.

A continuación, presentamos las paradojas en las versiones que hemos usado en nuestro trabajo, así como las soluciones que pueden surgir de dichas situaciones.

Paradoja de las pelotas de tenis

En esta investigación hemos usado la segunda versión de la paradoja de las pelotas de tenis, planteada por Falk (1994). El sentido paradójico de esta situación se presenta porque es posible concluir que, el medio día, los botes A y T tendrán la misma cantidad de pelotas; pero también es posible concluir que, al medio día, el bote A estará vacío. Entonces, ¿cuál de los dos razonamientos es correcto? Podríamos decir que los dos son correctos, solo que obedecen a explicaciones dadas desde diferentes concepciones sobre el infinito. El primero se basa en una percepción potencial, y que se centra en observar la situación considerando el estado de los botes al aplicar cada paso del experimento; esto se puede ver en el cuadro 2.

Cuadro 2 Paradoja de las pelotas de tenis: iteraciones sobre tres procesos

Iteración	Tiempo (minutos antes del medio día)	Bote A	Bote T
1	$\frac{1}{2}$	2	1
2	$\frac{1}{2^2}$	3, 4	1, 2
3	$\frac{1}{2^3}$	4, 5, 6	1, 2, 3
4	$\frac{1}{2^4}$	5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4
⋮	⋮	⋮	⋮

Si nos fijamos en el resultado de aplicar cada iteración, es posible determinar que el contenido de los botes durante el desarrollo de todo el experimento consiste en la misma cantidad de pelotas. Cada bote en cada iteración recibe el mismo número de pelotas y, por tanto, es "lógico" concluir que al medio día cada bote tendrá la misma cantidad. Pensar en que el bote A esté vacío al medio día, requiere una estructura actual del infinito en la que los individuos deben aceptar que el experimento termina y, además, que el resultado final no se parece a los estados que lo preceden.

Un análisis teórico de esta paradoja muestra que es posible identificar tres procesos: iteración sobre los números naturales (P_N), el movimiento de las pelotas de tenis (P_M) y el transcurrir del tiempo (P_T) (Dubinsky, Weller, Stenger y Vidakovic, 2008). Como planteamos en la descomposición genética genérica, un individuo debe realizar un número pequeño de iteraciones de tal modo que logre establecer la manera en que se asigna un estado a cada número natural. Esto significa determinar cómo se trasladan las pelotas entre los botes por el paso del tiempo; de tal modo que en el primer paso $n = 1$, el individuo debe observar que medio minuto antes del medio día la pelota número 2 queda en el bote A y la pelota número 1 pasa al bote T. Ahora, para la siguiente iteración $n = 2$, un cuarto de minuto antes del medio día, debe establecer que la pelota 2 pasa al bote T y las pelotas 3 y 4 entran en el bote A y así sucesivamente para un número pequeño de iteraciones. Con base en la realización de estas acciones, el individuo debe percatarse de las relaciones entre cada iteración y la transformación correspondiente. De esta manera, puede establecer que el movimiento de las pelotas de tenis y el paso del tiempo están condicionados por cada iteración realizada sobre el conjunto de los números naturales. Esto es una señal para determinar que ha construido una concepción proceso del movimiento de las pelotas de tenis y el paso del tiempo. Con estos procesos identificados, el individuo puede iniciar su coordinación para lograr establecerlos como procesos iterativos infinitos.

El proceso P_T, la subdivisión repetida de un intervalo de tiempo un minuto antes del medio día, se coordina con el proceso P_N cuando un individuo considera que para todo número natural n es posible determinar un instante de tiempo dado que corresponde a $\frac{1}{2^n}$ minutos antes del mediodía. Por otra parte, los procesos P_M y P_N se coordinan cuando un individuo puede determinar que, para cada instante de tiempo n, se da el movimiento de tres pelotas a través de los botes contenedor A y T. Estos se clasifican en tres categorías (no disyuntas): las pelotas cuya numeración es de la forma n, $2n$ y $2n - 1$. Como resultado de estas coordinaciones se tienen dos nuevos procesos (figura 2).

Figura 2 Nuevos procesos que se generan por la coordinación con el proceso del conjunto de los números naturales

$$\left.\begin{array}{l} P_T \\ \\ P_N \end{array}\right] \rightarrow P_1 : n \rightarrow \tfrac{1}{2^n} \qquad \left.\begin{array}{l} P_M \\ \\ P_N \end{array}\right] \rightarrow P_2 : n \rightarrow \begin{cases} n \\ 2n \\ 2n-1 \end{cases}$$

Los procesos P_1 y P_2 (véase la figura 2) resultantes son procesos iterativos infinitos. Estos procesos se coordinan en un nuevo proceso P que permite establecer para cada instante de tiempo $\frac{1}{2^n}$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ que las pelotas numeradas $2n - 1$ y $2n$ se mueven del bote contenedor al bote A y la pelota n se mueve al bote T. Esta coordinación es generada por la posibilidad de establecer el movimiento de las pelotas para cada instante de tiempo determinado por la iteración sobre N. En este momento se genera un proceso donde existe un movimiento continuo de pelotas por la iteración sobre dicho conjunto.

Esta explicación sistemática muestra una manera de generar estructuras mentales y establecer relaciones entre ellas; sin embargo, la coordinación de los procesos involucrados no es un mecanismo espontáneo. Estos procesos corresponden a procesos de naturaleza distinta en la medida en que P_N es un proceso que crece sin fin, ya que se tiene una cantidad infinita de pelotas. Pero por otra parte, P_T es un proceso que decrece sin fin, la subdivisión del tiempo genera instantes cada vez más pequeños cercanos al medio día. Por tanto, los mecanismos de coordinación que un individuo debe establecer entre ellos no son triviales y pueden estar fuertemente influidos por la familiaridad con el conjunto de los números naturales. Por tanto, la fijación en este conjunto centrada en sus elementos puede generar en los individuos la imposibilidad del ver el experimento terminado.

En esta paradoja, la encapsulación del proceso resultante P se motiva por la pregunta: *¿cuál es el contenido del bote A y del bote T al medio día?* Un individuo podrá lograr la construcción del objeto trascendente cuando pueda ver el proceso iterativo infinito P como terminado y pueda pensar en este proceso como una totalidad. Esto le permitirá reflexionar sobre el objeto trascendente que en este contexto equivale a aceptar que el bote A está vacío y el bote T contiene todas las pelotas numeradas. De lo contrario, los argumentos del individuo se centrarán en ver procesos aislados que determinan que el número de pelotas que entran en los botes en cada iteración es el mismo y, por tanto, concluirá que los botes siempre contendrán la misma cantidad de pelotas. Asimismo, el individuo puede centrarse en la imposibilidad de ver el proceso P_T como terminado y concluir que el medio día nunca se alcanza.

Ahora bien, la manera como se formula la pregunta involucra la subdivisión iterativa de un intervalo de tiempo; los individuos deben aceptar que se llega al medio día y por tanto el experimento termina. Estas ideas están relacionadas con "lo infinito en lo pequeño" que es más difícil de aceptar que el "infinito en lo grande". Además, en este caso los individuos deben conciliar con la idea de cubrir una distancia finita con un número infinito de pasos (Núñez, 1997). De la misma manera, para determinar el contenido de los botes, es necesario compararlos al medio día. Pero esto solo se puede hacer sobre un estado estático; no es posible comparar el contenido si pensamos en que siempre es posible agregar o sacar más pelotas. Estas características de la situación deben ser aceptadas por los individuos para concluir que el experimento ha terminado y aceptar el proceso P como una totalidad. De esta manera, se genera el objeto trascendente relacionado específicamente con el infinito como cardinal de un conjunto.

Paradoja del hotel de Hilbert

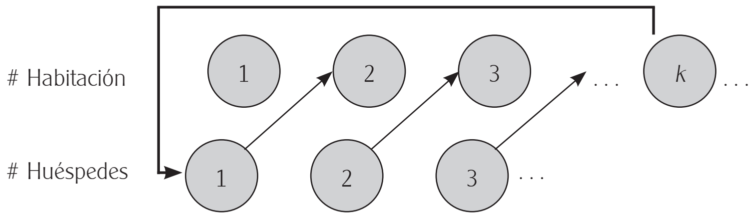
La paradoja del hotel de Hilbert, también llamado "hotel matemático", presenta dos aspectos que son de nuestro interés. Por un lado, las condiciones en que se exhibe requieren la aceptación de un infinito terminado y, por otro, su contexto real sugiere a los individuos la imposibilidad de su planteamiento. A continuación, presentamos la versión que utilizamos en nuestro trabajo, una adaptación de Mamolo y Zazkis (2008).

> Imagina un hotel con un número infinito de habitaciones, donde todas las habitaciones se encuentran ocupadas. Pero llega un nuevo huésped, un personaje muy importante, que solicita al administrador ser ubicado en este hotel. ¿Cómo podrías ubicar al nuevo huésped en una habitación?
>
> Imagina que al mismo hotel llegan un número infinito de huéspedes. ¿Puede el administrador ubicarlos a todos?

Claramente, imaginar "un hotel con un número infinito de habitaciones" con todas las habitaciones ocupadas requiere un proceso de abstracción donde, en un contexto particular, en este caso el escolar, los individuos deben aceptar esta condición sin tener en cuenta su existencia real. Como se ha informado, ante la imposibilidad de aceptar esta condición, los estudiantes recurren a argumentos como: "Hay infinitas habitaciones, nunca puedes tener el hotel completamente lleno" (Roa-Fuentes, 2012, p. 56); "En la tierra hay un número finito de personas, no es posible llenar este hotel" o "El problema está mal, porque por ejemplo, si tienes 20 habitaciones y 20 huéspedes, entonces no hay más habitaciones. Y si este hotel tiene infinitas habitaciones debe tener infinitos huéspedes y esto no es posible" (Mamolo y Zazkis, 2008, p. 174).

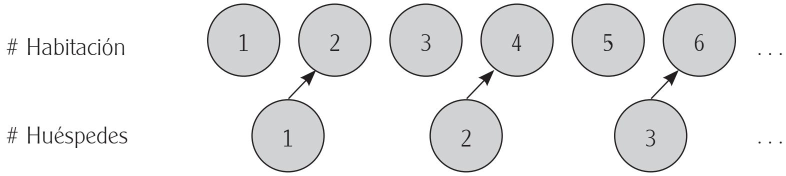
Por otro lado, centrándonos en un contexto matemático, el aspecto paradójico de la situación se presenta al considerar que, aunque el hotel de infinitas habitaciones esté lleno, es posible no solo acomodar un nuevo huésped, sino además un número infinito de nuevos huéspedes. Esto tiene que ver con las propiedades de los conjuntos infinitos; en particular con la cardinalidad de N. Supongamos que cada habitación está numerada y que en cada una se encuentra hospedado un huésped.

Figura 3 El hotel de Hilbert: proceso de llenado para un nuevo huésped



Ante la llegada de un nuevo huésped, es posible demostrar que mediante el "movimiento" secuencial de las personas por las habitaciones es posible acomodarlo en el hotel (figura 3). Esto es definir una función $f : N \rightarrow N$ tal que $f(x) = x + 1$ para todo x en N. De esta manera, el huésped de la habitación número 1 pasa a la habitación número 2; el huésped de la habitación número 2 pasa a la habitación número 3, y así sucesivamente. Luego la habitación número 1 queda libre y puede ubicarse al nuevo huésped.

Figura 4 El hotel del Hilbert: proceso de llenado para un número infinito de nuevos huéspedes

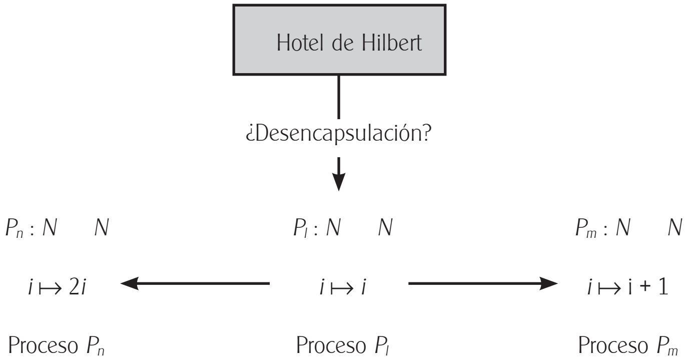


Si llega un número infinito de nuevos huéspedes, ¿podrían ser acomodados en el hotel de Hilbert? La respuesta es sí, esto es posible mediante el movimiento de los huéspedes que están en el hotel (véase la figura 4). Podemos definir una función $g : N \rightarrow N$ tal que $g(x) = 2x$ para todo x en N, de tal modo que es posible pedir al huésped de la habitación número 1 que se pase a la número 2; al de la número 2 que se pase a la 4; al de la 3 a la 6, y así sucesivamente. Por tanto, las habitaciones de orden impar quedan vacías y los infinitos nuevos huéspedes podrán ubicarse allí.

En nuestro análisis, partiremos de una relación directa con el conjunto de los números naturales, en el que las habitaciones del hotel están numeradas: 1, 2, 3, ... y a cada habitación se le ha asignado un huésped. En este caso, un individuo cuyas construcciones mentales sobre el conjunto de los números naturales son puramente potenciales no podrá imaginar el proceso terminado, ya que siempre estará pensando en la idea de un siguiente. Por tanto, sin importar cuántos huéspedes se hayan ubicado, siempre habrá un espacio más y un huésped más por ubicar. Por lo anterior, sería difícil que un individuo con esta concepción pudiera aceptar las condiciones del problema.

Consideremos el caso en que un individuo puede aceptar las condiciones del problema e imaginar que el hotel está lleno. Puesto que el hotel tiene infinitas habitaciones, un individuo puede pensar que es posible acomodar a un nuevo huésped, estableciendo que a cada huésped se le ha asignado una habitación y que las habitaciones están numeradas de la forma 1, 2, 3, ... Esta asociación con el conjunto de los números naturales es fundamental para determinar la manera en que el individuo concibe el objeto trascendente (en este caso el hotel de Hilbert lleno). El proceso iterativo que identifica y relaciona con dicho objeto debe verlo terminado sin pensar en el último paso del proceso, sino en el agotamiento de este al aceptar la posibilidad de llenar las infinitas habitaciones. Esto será posible si su concepción de los naturales corresponde a una concepción objeto; de lo contrario, aunque pueda aceptar que el hotel esté lleno, sus argumentos apuntarán a ideas de tipo potencial, por ejemplo: "Aunque esté lleno, como es infinito, siempre al final habrá más, más y más habitaciones" llegando a concluir que sí es posible acomodar a un huésped más, incluso a infinitos nuevos huéspedes.

Figura 5 Descomposición genética de la paradoja del Hotel de Hilbert



Para dar solución a la situación, podemos identificar una transformación de asignación de habitaciones a los huéspedes mediante iteración sobre los naturales (P_I) y una transformación de traslado donde cada huésped se pasa a la habitación "siguiente" (P_m); de esta manera, la habitación número 1 queda libre y el nuevo huésped puede acomodarse en el hotel. La coordinación entre estos dos procesos, P_I y P_m (figura 5) se establece por la correspondencia biyectiva que se da entre los conjuntos $N = \{1, 2, 3, ...\}$ y $N_2 = \{2, 3, 4, ...\}$ donde a cada $n \in N$ se le asigna su sucesor $n + 1 \in N_2$. Esto implica que los conjuntos señalados tienen la misma cardinalidad y, por tanto, todos los huéspedes pueden acomodarse en alguna habitación. Este análisis requiere una concepción objeto de los números naturales caracterizada por su cardinalidad y la relación con sus subconjuntos, ya que el individuo debe aceptar que los conjuntos N_2 y N son equipotentes, lo que implica aceptar que "el todo es igual a una de sus partes".

La segunda pregunta del problema puede motivar un poco más de reflexión en los individuos y generar procesos de pensamiento que nos señalen la manera como conciben la situación más allá de los argumentos puramente potenciales sobre el infinito; ya que es necesario acomodar a los infinitos nuevos huéspedes que llegan al hotel. Entonces, si el hotel de infinitas habitaciones está lleno, ¿cómo acomodar a infinitos nuevos huéspedes? Para considerar esta situación, es necesario una concepción proceso de función en la que los individuos puedan establecer una relación biyectiva definida del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares. De esta manera, puede establecerse el proceso P_n donde a cada $n \in N$ se asigna $2n$ (figura 5). Así, es posible asignar a cada "viejo huésped" las habitaciones de número par y quedan libres las habitaciones de número impar para los "nuevos huéspedes". Esta idea es compleja, ya que implica que en el hotel de infinitas habitaciones ocupadas se han hospedado infinitos nuevos huéspedes.

Como se puede apreciar, las paradojas analizadas son de naturaleza diferente. En el enunciado de la versión de la paradoja de las pelotas de tenis, el infinito aparece en un sentido dinámico en la numeración de un conjunto. Pero contrario a esto, en el enunciado de la paradoja del hotel de Hilbert, el infinito aparece en un sentido estático, como la característica de un objeto acabado. Sin duda esto tiene consecuencias sobre la manera como los individuos abordan cada paradoja.

REFLEXIONES

Diversas investigaciones desde miradas particulares han contribuido a la construcción del infinito matemático en diferentes contextos matemáticos, considerando: las cuestiones intuitivas inmersas en su comprensión, su impacto en el desarrollo del pensamiento matemático de la humanidad, la influencia de las concepciones adquiridas fuera de la escuela, las dificultades que causa en los individuos su aparente dicotomía, el impacto que genera en la construcción de otros conceptos matemáticos, entre otros asuntos considerados sobre el infinito, y han sido descritos y sistematizados por diferentes planteamientos teóricos y metodológicos (Fischbein, 2001; Tirosh, 1991; Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; Lestón, 2008; Manfreda y Hodnik, 2011; Moreno y Waldegg, 1991; Monoghan, 2001; Mamolo, 2008; Dreyfus y Tsamir, 2004; Tsamir y Dreyfus, 2005).

La construcción de conceptos matemáticos relacionados con el infinito parte de las ideas que generalmente se han desarrollado en contextos no escolares. Los profesores universitarios de matemáticas guiamos a nuestros estudiantes en la construcción de conceptos formales con dichas nociones intuitivas donde el infinito se concibe solo como potencia; conceptos como: conjuntos infinitos, límites de series infinitas, intersecciones infinitas, cardinalidad, que requieren una concepción actual del infinito, representan un alto grado de complejidad para los estudiantes.

El análisis teórico que proponemos en este artículo se relaciona con una manera formal de abordar situaciones relacionadas con el infinito. Esta noción matemática no aparece en sí en ningún programa curricular, excepto en cursos de teoría de conjuntos en programas de Matemáticas donde se desarrolla un estudio formal de la teoría de Cantor. Analizar situaciones relacionadas con el infinito a partir de la construcción de procesos iterativos infinitos y sus objetos trascendentes, puede darle a un estudiante una herramienta formal que le permita confrontar sus propias creencias sobre el infinito. Dada la complejidad que representa la construcción comprensiva del infinito matemático, los elementos que describimos en el análisis teórico expuesto representan una evolución de la teoría APOE, ya que las estructuras y mecanismos tradicionales no son suficientes para explicar cómo un individuo construye dicha noción matemática. Los elementos teóricos descritos muestran la fuerte influencia que puede ejercer el contexto de una situación en la manera como un individuo la afronta. La descripción de procesos específicos que se repiten sin un fin aparente puede permitir que los estudiantes acepten las condiciones del problema sin protestar por las implicaciones de los procesos infinitos sobre la realidad. Sin embargo, cuando una situación requiere ver esos procesos como terminados, las ideas intuitivas construidas fuera del aula de matemáticas permean el razonamiento que los estudiantes hacen de la situación y generan argumentos puramente realistas.

En este escrito presentamos la primera parte de una investigación desarrollada con una población particular: Niños y jóvenes talento en matemáticas. Como mostraremos en un próximo artículo, las descripciones teóricas que presentamos hoy son muy cercanas a la manera como un individuo puede comprender el infinito en un contexto de paradojas. El análisis de los trabajos de dichos estudiantes al pensar en las situaciones expuestas nos permitirá documentar con detalle los aspectos teóricos descritos aquí, así como describir las características de un nuevo mecanismo que hemos denominado completez.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue parcialmente financiada por el Programa de Movilidad 2013 de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa-Fuentes, M. Trigueros y K.Weller (2014), *APOS Theory - A framework for research and curriculum development in mathematics education,* Springer.

Asiala, M., A. Brown, D. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), "A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II", en J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education,* núm. 6, pp. 1-32.

Brown, A., M. McDonald y K. Weller (2010), "Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity", *CBMS Issues in Mathematics Education,* núm. 16, pp. 115-141.

Castro, I., y J. Pérez (2007), *Un paseo finito por lo infinito. El infinito en matemáticas,* Bogotá, Editorial Pontificia Universidad Javeriana.

Dreyfus, T., y P. Tsamir (2004), "Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets", *Journal of Mathematical Behavior,* núm. 23, pp. 271-300.

Dubinsky, E., K. Weller, K. Stenger y D. Vidakovic (2008), "Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem", *European Journal of Pure and Applied Mathematics,* vol. 1, núm. 1, pp. 99-121.

Dubinsky, E., K. Weller, M. McDonald y A. Brown (2005a), "Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 58, pp. 335-359.

———— (2005b), "Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 60, pp. 253−266.

Falk, R. (1994), "Infinity: A cognitive challenge", *Theory and Psychology,* vol. 4, núm. 1, pp. 35-60.

Fischbein, E. (2001), "Tacit models and infinity", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 23, núm. 48, pp. 309-329.

Fischbein, E., D. Tirosh y P. Hess (1979), "The intuition of infinity", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 10, núm. 1, pp. 491-512.

Hazzan, O. (1999), "Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts", *Educational Studies of Mathematics,* núm. 12, pp. 71-90.

Lakoff, G., y R. Núñez (2000), *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being,* Nueva York, Basic Books.

Lestón, P. (2008), *Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares,* tesis de maestría no publicada, CICATA del IPN, México.

Mamolo, A. (2008), "Accommodating infinity: A leap of imagination", en S. L. Swars, D. W. Stinson y S. Lemons Smith (eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Atlanta, GA, Georgia State University, pp. 65-72.

Mamolo, A., y R. Zazkis (2008), "Paradoxes as a window to infinity", *Research in Mathematics Education,* vol. 10, núm. 2, pp. 167-182.

Manfreda, V., y T. Hodnik (2011), "Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 80, núm. 3, pp. 389-412.

Monaghan, J. (2001), "Young peoples' ideas of infinity", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 48, pp. 239-257.

Moreno, L., y G. Waldegg (1991), "The conceptual evolution of actual mathematical infinity", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, núm. 3, pp. 211-231.

Martínez, P. (1999), "Paradojas matemáticas para la formación de profesores", *Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* núm. 31, pp. 27-35.

Movshovitz-Hadar, N., y R. Hadass (1990), "Preservice Education of math teachers using paradoxes", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 21, pp. 265-287.

Núñez, R. (1997), "Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales", *Educación Matemática,* vol. 9, núm. 1, pp. 20-32.

Roa-Fuentes, S. (2012), *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas*, tesis de doctorado inédita, Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN, México.

Tirosh, D. (1991), "The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorian theory", *Advanced Mathematical Thinking,* Mathematics Education Library, núm. 11, pp. 199-214.

Tsamir, P., y T. Dreyfus (2005), "How fragile is consolidated knowledge? Ben's comparisons of infinite sets", *Journal of Mathematical Behavior,* núm. 24, pp. 15-38.

Watzlawick, P., J. Bavelas y D. Jakson (1981), *Teoría de la comunicación humana,* Herder, Barcelona.
Weller, K., A. Brown, E. Dubinsky, M. McDonald y C. Stenger (2004), "Intimations of Infinity", *Notices of the AMS,* vol. 51, núm. 7, pp. 741-750.

DATOS DE LAS AUTORAS

Solange Roa Fuentes
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co

Asuman Oktaç
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Insituto Politécnico Nacional, México
oktac@cinvestav.mx