ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo

Martha Gabriela Robles Arredondo, Eduardo Tellechea Armenta y Vicenç Font Moll

Resumen: En este trabajo, se presenta el diseño de una secuencia didáctica de tareas orientada a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en los primeros cursos universitarios que, asumiendo la complejidad y la articulación de nociones y objetos matemáticos asociados (variación, acumulación, derivada, integral, función, límite), promueva, mediante la utilización de ambientes interactivos que favorecen el acercamiento intuitivo y la conjetura, el descubrimiento de dicho teorema, así como el papel esencial que desempeña en el estudio del Cálculo. Para el diseño de las tareas, se han tenido en cuenta los criterios de idoneidad propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, integral, función integral, idoneidad didáctica.

Abstract: This paper presents the design of a teaching sequence of tasks aimed at the teaching of the Fundamental Theorem of Calculus for the first courses in calculus that, assuming the complexity and the articulation of the associated mathematical objects (variation, accumulation, derivative, integral, function, limit), promotes, through the use of interactive environments that provide the possibility of intuitive approach and conjecture, the discovery of this theorem, as well as the essential role it plays in the study of Calculus. For the design of the tasks we have considered the suitability criteria proposed by the Onto-Semiotic Approach to the Mathematical Cognition and Instruction.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus, integral, integral function, didactical suitability.

Fecha de recepción: 31 de ocubre de 2013; fecha de aceptación: 15 de julio de 2014.

1. INTRODUCCIÓN

El Cálculo, como componente esencial de lo que se conoce como *matemáticas del cambio,* es una potente y compleja herramienta articulada, sobre todo, alrededor de las nociones de *variación* y *acumulación,* las cuales se relacionan, respectivamente, con la *derivada* y la *integral,* que son dos objetos matemáticos complejos, esenciales en la organización del Cálculo y que, a su vez, se apoyan en otros objetos matemáticos, igualmente complejos: *función* y *límite*.

El hecho de tener una mirada compleja sobre los objetos matemáticos conlleva, como si fuese la otra cara de la moneda, el problema de la articulación de los componentes de dicha complejidad. En la parte de las matemáticas que nos ocupa en este artículo, el Cálculo, un elemento clave de articulación es el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC, a partir de ahora).

La problemática de la complejidad y la articulación no suelen estar presentes de manera explícita en la enseñanza del Cálculo. No es habitual que las secuencias de tareas se diseñen de manera explícita y consciente con el objetivo de enseñar la complejidad de los objetos matemáticos y la articulación coherente de los componentes de esta complejidad. Por ejemplo, en general, en un curso de Cálculo, la relación que existe entre la velocidad instantánea de variación y el cambio acumulado –la velocidad de desplazamiento está asociada al cálculo de la pendiente de la curva, mientras que la distancia recorrida por un móvil se determina encontrando el área bajo la curva que describe la velocidad– se abordan desde una perspectiva exclusivamente analítica, lo que minimiza la experiencia intuitiva del estudiante. La demostración del TFC por parte del profesor con frecuencia se considera suficiente para suponer que el estudiante entienda la articulación entre la derivada y la integral, y pareciera bastar con que el estudiante comprenda que la función integral es la antiderivada de la función que se integra para considerar logrado el objetivo del curso. Nos estamos refiriendo, pues, con este ejemplo, a una enseñanza de la integral que, si bien es correcta en el sentido de que no se cometen errores, no es suficientemente representativa de la complejidad de los objetos matemáticos *integral* y *derivada* y, más en general, de la complejidad del Cálculo. Esta falta de representatividad es una característica, según Font y Adán (2013), de una enseñanza cuya calidad es mejorable.

Nuestro objetivo es el diseño de una secuencia didáctica de tareas para la enseñanza del TFC que tenga en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos esenciales del Cálculo, así como el papel esencial que desempeña este teorema en la articulación de dicha complejidad de acuerdo con los planteamientos desarrollados por Tellechea (2005).

Con esta propuesta, queremos propiciar que el estudiante descubra, con base en su propia intuición, los elementos que le permitirán entender el papel fundamental del TFC en la articulación del Cálculo, buscando ir más allá de lo que, con frecuencia, constituye el único logro al final de un curso de Cálculo Integral desde el contexto exclusivo de las representaciones analíticas: *si se deriva la función integral se obtiene la función que se integra.* Pero además de tener en cuenta la complejidad y la articulación, con las tareas diseñadas buscamos favorecer el desarrollo de procesos esenciales de las Matemáticas. Para ello, aprovechamos los recursos visuales del Applet Descartes en la construcción de escenarios interactivos, cuya implementación con los estudiantes promueva la identificación de patrones y la conjetura, así como la visualización y la argumentación, entre otros procesos.

Se trata del diseño de una secuencia de tareas cuya calidad matemática pueda justificarse con base en dos aspectos: *1)* considera la complejidad de los objetos matemáticos que pretende enseñar y *2)* permite activar procesos relevantes de la actividad matemática. Dicho de otra manera –de acuerdo con los criterios de idoneidad propuestos por el Enfoque Ontesemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS, a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2007)–, se presenta el diseño de una secuencia de tareas que tenga *a priori,* sobre todo, una alta idoneidad epistémica.

La estructura del artículo es la siguiente: después de esta introducción en la que se explican el problema y el objetivo de la investigación que se presenta, en el apartado 2 se hace referencia al marco teórico utilizado, el EOS. En el apartado 3 se explica el diseño de la secuencia de tareas (revisión de la literatura, papel de los recursos tecnológicos, uso de los criterios de idoneidad, etc.). En el apartado 4 se explican los applets utilizados y se comentan las tareas incorporadas en las hojas de trabajo. En el apartado 5 se justifica que la secuencia de tareas permite al alumno la formulación de conjeturas relevantes (que es posible construir la gráfica de la función integral de cualquier función que cumpla con las condiciones del Teorema Fundamental del Cálculo, identificar el papel de la constante de integración y arribar a la visualización de la regla de Barrow, aprovechando la riqueza de la información aportada por el software, etc.). El artículo termina con unas consideraciones finales.

2. MARCO TEÓRICO

En este apartado presentamos los elementos teóricos que se han tenido en cuenta en esta investigación.

Calidad matemática

Las reflexiones (e investigaciones) sobre la calidad matemática de los procesos de instrucción de las matemáticas son numerosas en el área de Educación Matemática. Todas ellas ponen de manifiesto que hay muchos aspectos que inciden en esta calidad y que, por tanto, se trata de una noción multidimensional. En este trabajo, de acuerdo con Font y Adán (2013), se han tenido en cuenta dos aproximaciones que, si bien consideran la calidad matemática de una manera multidimensional, ponen el acento, según estos autores, en dimensiones diferentes. Por una parte, las que destacan como elemento central de la calidad matemática el descriptor "riqueza matemática" y, por la otra, las que toman como elemento central el descriptor "representatividad de las matemáticas enseñadas".

Un ejemplo relevante del primer tipo de aproximaciones son los trabajos de Hill y colaboradores. Según Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball (2008), la calidad matemática de la instrucción puede definirse como un compuesto de varias dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, incluida la presencia y ausencia de errores matemáticos, explicación y justificación matemática, representaciones matemáticas y observaciones relacionadas.

En cuanto al segundo tipo de aproximaciones, un ejemplo notable es el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), principal referente teórico de esta investigación. Este enfoque propone herramientas para, primero, describir las matemáticas implicadas en un proceso de instrucción y, segundo, valorar su calidad. Las que propone para la descripción permiten analizar las prácticas matemáticas y los objetos primarios y procesos matemáticos activados en ellas. Para la valoración de la calidad de las matemáticas involucradas, se propone el constructo criterios de idoneidad, con especial atención al criterio de idoneidad epistémica:

1. *Idoneidad epistémica,* para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas". 2. *Idoneidad cognitiva,* para valorar, antes

> de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendía enseñar. 3. *Idoneidad interaccional,* para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos. 4. *Idoneidad mediacional,* para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción. 5. *Idoneidad emocional,* para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción. 6. *Idoneidad ecológica,* para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etcétera. (Font, Planas y Godino, 2010, p. 101)

Para cada una de las seis idoneidades, el EOS propone un conjunto de indicadores. En relación con la idoneidad epistémica, la cual es mayor en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) en un proceso de estudio representan bien los contenidos de referencia y los indicadores consideran una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...) y traducciones y conversiones entre estos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo al que se dirigen; presentación de los enunciados y procedimientos básicos del tema, adecuando, asimismo, las explicaciones, comprobaciones y demostraciones al nivel educativo al que se dirigen; establecimiento de relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etcétera.

La noción de calidad epistémica propuesta por el EOS está muy centrada en la idea de representatividad de las matemáticas enseñadas en relación con el significado holístico del objeto matemático que se quiere enseñar, entendido como el conjunto de pares (prácticas matemáticas, configuraciones de objetos primarios activados en dichas prácticas). La determinación de dicho significado global u holístico requiere la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión. Asimismo, deben tenerse en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se ponen en juego dichas configuraciones de objetos primarios. En el siguiente apartado, se mencionan brevemente algunas investigaciones realizadas utilizando el EOS como marco teórico para caracterizar la complejidad de los objetos esenciales del Cálculo.

La complejidad de los objetos matemáticos del Cálculo

La investigación en Educación Matemática sobre las nociones del Cálculo ha puesto de manifiesto la complejidad de los objetos matemáticos esenciales de esta área de las Matemáticas. Dos de los enfoques que más se han interesado por caracterizar esta complejidad son la teoría APOE y el EOS.

La teoría APOE

La teoría APOE caracteriza el conocimiento matemático de un sujeto como su tendencia a responder a situaciones matemáticas problemáticas mediante la reflexión sobre problemas y sus soluciones dentro de un contexto social y la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos, organizándolos en esquemas para tratar con dicha situación (Dubinsky y McDonald, 2001). APOE es un acrónimo de estas construcciones (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). En esta teoría, el conocimiento matemático del sujeto se modela mediante estas construcciones para poder hacer inferencias sobre la actividad de los estudiantes al resolver tareas específicas de matemáticas.

En la APOE, los objetos emergen como resultado de dos mecanismos. La encapsulación es un mecanismo basado en la abstracción reflexiva. Se refiere a la posibilidad de pensar en un proceso como algo completado y ser capaz de caracterizarlo y estudiar sus propiedades. A través de la encapsulación, las nociones abstractas se conciben como objetos que tienen propiedades y varias representaciones. La tematización implica la posibilidad de pensar el esquema como un todo, para actuar o hacer transformaciones sobre él y estudiar sus propiedades. También se involucra la posibilidad de diseccionar, analizar, examinar sus partes y volver a componerlo como un todo.

La encapsulación de procesos en objetos y sobre todo la tematización de un esquema (o varios) en un objeto se relacionan con la problemática de la complejidad de los objetos matemáticos y la necesaria articulación de los elementos en los que estalla dicha complejidad. Las investigaciones realizadas con este marco teórico han puesto de manifiesto la complejidad de las nociones principales del Cálculo y como esta condiciona su compresión. Por ejemplo, Valls, Pons y Llinares (2011) para la noción de límite; Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) y García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) para la noción de derivada; Boigues, Llinares y Estruch (2010) para la noción de integral.

El Enfoque Ontosemiótico

En el marco del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2008), se ha utilizado la noción de configuración epistémica para modelar dicha complejidad.

En el EOS se considera que, para la realización de una práctica matemática, se necesitan poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e. g., plantear y resolver un problema de optimización), vemos el uso de *lenguajes,* verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos, proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias. En consecuencia, cuando una institución matemática realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado articulado de situaciones –problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos– llamado en el EOS *configuración epistémica de objetos primarios*.

Lo que en los planteamientos filosóficos de tipo platónico se considera un objeto matemático con existencia independiente de las personas (por ejemplo, la integral o la derivada), en el EOS (Font, Godino y Gallardo, 2013) se explica como un objeto que surge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. globalmente (holísticamente) sobre los objetos primarios de diferentes configuraciones epistémicas. Dicho en otros términos, este objeto sería el contenido al que se refiere o indica globalmente, explícita o implícitamente, el par (prácticas matemáticas, configuración epistémica de objetos primarios activada en dichas prácticas).

Para el estudio del objeto matemático *función,* Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) afirman que, a lo largo de la historia de las distintas civilizaciones, se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas, algunas de las cuales han servido para generalizar otras de las preexistentes. Estos autores consideran que esta evolución se puede organizar en cuatro configuraciones epistémicas (tabular, gráfica, analítica y conjuntista).

Para el objeto matemático *límite,* Contreras, García y Font (2012) y García (2008) caracterizan dicha complejidad por medio de las siguientes configuraciones epistémicas: geométrica, preinfinitesimal, infinitesimal, numérica, métrico-analítica y topológica.

Para el objeto matemático *derivada,* Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones epistémicas: *1)* tangente en la matemática griega; *2)* variación en la Edad Media; *3)* métodos algebraicos para hallar tangentes; *4)* concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; *5)* ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; *6)* métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; *7)* cálculo de fluxiones; *8)* cálculo de diferencias, y *9)* derivada como límite. En Pino, Castro, Godino y Font (2013), se utilizan estas nueves configuraciones epistémicas para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual se utiliza para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones epistémicas activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel).

En relación con la complejidad del objeto integral, Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y Ordóñez (2011) consideran las siguientes configuraciones epistémicas: *1)* geométrica, *2)* resultado de un proceso de cambio, *3)* inversa de la derivada, *4)* aproximación al límite, *5)* generalizada (Lebesgue, Riemann, etc.), *6)* algebraica, *7)* métodos numéricos. Crisostomo (2012), en su tesis doctoral, considera útil, basándose en la red de configuraciones epistémicas propuesta por Ordóñez (2011), distinguir ocho tipos diferentes de configuraciones que designa con los nombres de: intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada, extramatemática, acumulada y tecnológica, situando el TFC como un objeto primario central de la configuración epistémica llamada primitiva, aunque también aparece en la geométrica, la sumatoria, la extramatemática y la tecnológica.

El hecho de que, por un lado, el Teorema Fundamental del Cálculo forme parte de varias configuraciones epistémicas de la integral y que, por otro, relacione la derivada con la integral, pone en evidencia su papel relevante en la articulación de las diferentes configuraciones que modelan la complejidad del objeto integral y también en la articulación de esta red de configuraciones con la red de configuraciones epistémicas que modela la complejidad del objeto derivada.

Diseño de tareas

Las tareas son las situaciones que el profesor propone a los alumnos (problema, investigación, ejercicio, etc.); estas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje.

Recientemente ha aumentado mucho el interés sobre el diseño de tareas al considerarlo un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad, lo cual ha llevado a formularse, entre otras, preguntas del tipo: ¿Con qué criterios seleccionamos una tarea u otra? ¿En qué orden las secuenciamos? ¿Cuáles son las que se adaptan mejor a nuestras necesidades o a la situación concreta de aula donde se han de implementar? (Sullivan, Clarke y Clarke, 2013). Este interés se ha manifestado, por ejemplo, en la celebración de un *ICMI Study* específico sobre este tema en el año 2013 (Margolinas, 2013) que ha servido para conocer cómo se ha interesado la investigación sobre el diseño de tareas por diferentes aspectos.

El EOS propone una herramienta relevante para el diseño y rediseño de tareas, nos referimos a los criterios de idoneidad didáctica (Godino, Batanero y Font, 2007). Dichos criterios se han utilizado en diferentes investigaciones (por ejemplo, Robles, Del Castillo y Font, 2012; Giménez, Font y Vanegas, 2013; Pochulu, Font y Rodríguez, 2013; Pino, Castro, Godino y Font, 2013), tanto para guiar la construcción de la secuencia de tareas como para valorar la idoneidad de procesos de estudio efectivamente realizados y, así, tener elementos para un rediseño que permita una futura implementación de más calidad. En particular, el estudio de la idoneidad epistémica de los significados sobre un objeto matemático que se pretende en el currículo es de sumo interés, puesto que una "adecuación pobre" del significado pretendido al holístico (dicho en otros términos una falta de representatividad de las configuraciones epistémicas implementadas en la enseñanza) podría obstaculizar la correcta comprensión del objeto tanto por parte de los estudiantes como por parte de los profesores en formación inicial.

3. DISEÑO DE LA SECUENCIA DE TAREAS

En este apartado se explican diferentes aspectos considerados en el diseño de la secuencia de tareas.

Aportes de la investigación sobre las principales nociones del Cálculo

En el TFC se hallan implicadas las nociones de límite, derivada e integral. Dichas nociones han sido objeto de muchas y muy diversas investigaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas que han producido resultados relevantes para su enseñanza y aprendizaje. La investigación sobre las principales nociones del Cálculo ha producido resultados sobre diferentes aspectos, entre otros: *a)* de tipo cognitivo (aportes sobre el aprendizaje), *b)* de tipo didáctico (aportes sobre la manera de enseñar), *c)* de tipo epistémico (problematización de las nociones principales del cálculo), *d)* de tipo mediacional (aportes sobre el uso de recursos tecnológicos) y *e)* de tipo ecológico (dónde y cuándo se deben enseñar-aprender las principales nociones del Cálculo) (Robert y Speer, 2001; Artigue, 2003; Salinas y Alanis, 2009; Camacho, 2011). Resulta pertinente, pues, formularse la siguiente pregunta: ¿Cuáles de dichos aportes conviene considerar en un diseño de secuencia de tareas para la enseñanza del TFC?

El primer aporte que se ha considerado en el diseño de la secuencia de tareas y que se presenta en este artículo se refiere a los resultados de las investigaciones que han evidenciado las limitaciones tanto de la enseñanza formalista del Cálculo como del modelo que aquí llamaremos, de acuerdo con Pochulu y Font (2011), no significativo y que otros autores llaman mecanicista o conductista. Diversos autores (Artigue, 1995; Tall, 1991a; Muñoz, 2000) han señalado que, con estos modelos de enseñanza, los estudiantes no comprenden de manera satisfactoria los conceptos y métodos de pensamiento propios del Cálculo. Por ejemplo, Muñoz (2000) señala que, en los cursos donde se enseña la integral, hay un énfasis excesivo en el cálculo de antiderivadas con poca atención a la conceptualización de la integral (definida), reduciéndose esta a la definición de Cauchy o a la de Riemann, y que es en el momento de abordar las llamadas aplicaciones cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a este concepto. De acuerdo con los aportes de estos trabajos de investigación, la propuesta de secuencia didáctica que se presenta pone especial atención en la conceptualización de la integral, por encima de la mecanización. Este énfasis en la conceptualización es lo que nos ha llevado a proponer una secuencia de tareas que tenga en cuenta tanto la complejidad de las nociones esenciales del Cálculo como la necesidad de generación de procesos matemáticos relevantes.

El segundo aporte que se ha considerado en el diseño de la secuencia de tareas corresponde a los resultados de las investigaciones sobre las nociones esenciales del Cálculo que han señalado la importancia de las perspectivas gráfica y geométrica para dar significación a los procesos de derivación e integración (Artigue, 2002; Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovich, 2001; Labraña, 2000; Robles, Del Castillo y Font, 2012). En esta línea, la propuesta de secuencia de tareas que se presenta para la enseñanza del TFC promueve, entre otros procesos, la visualización mediante el uso de los recursos visuales del Applet Descartes.

En esta investigación, una vez asumido el rechazo del modelo formalista y del modelo no significativo (mecanicista), se considera, como tercer aporte, el que se refiere a diferentes investigaciones que proponen un modelo de enseñanza de tipo constructivista, en el que se da mayor responsabilidad al alumno en su proceso de aprendizaje. Diversas investigaciones que han realizado propuestas de enseñanza del Cálculo han evidenciado que es posible dar este mayor protagonismo al alumno. Por ejemplo, la tesis doctoral de González (2005) desarrolla una secuencia de instrucción para la enseñanza y aprendizaje de la integral impropia, en la que se concluye que es posible transformar el contrato pedagógico usual en la enseñanza superior y dar a los estudiantes una mayor responsabilidad en el proceso de aprendizaje. En esta línea, la propuesta que se presenta en este artículo para la enseñanza del TFC promueve, mediante la utilización de ambientes interactivos que favorecen el acercamiento intuitivo y la conjetura, la participación activa del alumno en su aprendizaje.

Un cuarto aporte que se ha tenido en cuenta en esta propuesta se refiere a la importancia del uso de recursos tecnológicos. Diversas investigaciones han realizado propuestas de enseñanza que utilizan software diverso (*Mathematica, Derive, Maple,* etc.) para el estudio de los objetos matemáticos límite, derivada e integral. Por ejemplo, en Robles, Del Castillo y Font (2012), se analizan el diseño e implementación de una secuencia de tareas para la enseñanza de la derivada en la que se usa el Applet Descartes. Otro ejemplo es la tesis doctoral de Depool (2004), en la que se diseña y se lleva al aula un módulo instruccional para la enseñanza y aprendizaje del concepto de integral definida, basado en un conjunto de prácticas de laboratorio diseñadas con el Programa de Cálculo Simbólico *Derive*. La secuencia propuesta plantea las prácticas atendiendo a una perspectiva numérica y gráfica que privilegia el sentido de aproximación de la integral definida. Otro ejemplo del apoyo de recursos tecnológicos lo tenemos en Turégano (1994 y 1996), donde se utiliza la visualización para dar significado al concepto de integral definida, con base en la idea de área bajo la curva. En esta línea de incorporar recursos tecnológicos, la propuesta que se presenta en este artículo para la enseñanza del TFC se basa en el uso de applets interactivos diseñados con Descartes.

Revisión de las investigaciones previas sobre el TFC

En el diseño de la secuencia de tareas, hemos tenido en cuenta algunas investigaciones, sobre todo de tipo instruccional, relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del TFC. Tall (1991b) investigó la importancia de los procesos de visualización en la comprensión del TFC. Por otra parte, Tall (1996) reflexiona sobre la manera en que los cambios ocurridos a partir del uso de las computadoras lleva a entender que las funciones sirven para describir cómo cambian las cosas, lo cual lleva a considerar naturalmente los conceptos de *tasa de variación* (diferenciación) y *cambio acumulado* (integración), conceptos que el Teorema Fundamental del Cálculo explica como procesos inversos.

Hitt (1998), mediante el estudio de una secuencia de tareas realizada por un profesor de matemáticas de enseñanza media superior para la enseñanza del TFC, concluye que la utilización errónea de interpretaciones visuales puede conducir a representaciones incorrectas (en profesores y alumnos).

En el estudio de Thompson y Silverman (2007), se considera que el concepto de acumulación es central para la noción de integración. Estos autores sugieren que se ponga mayor énfasis en el TFC, en el que la función acumulación desempeña un papel central, en el sentido de dar explicaciones para la relación entre la acumulación de pequeñas cantidades y las tasas a las que estas se acumulan.

Carlson, Persson y Smith (2003) han elaborado materiales curriculares para promover la comprensión y destrezas de razonamiento en estudiantes relacionadas con el TFC. En la revisión bibliográfica desarrollada, los autores apuntan que: *a)* la mayoría de los estudiantes del primer semestre del curso de Cálculo no adquieren la comprensión de dicho concepto y tampoco parecen estar desarrollando las destrezas de razonamiento fundamentales para entender y utilizar el TFC en situaciones aplicadas, *b)* las dificultades presentadas por los estudiantes sobre el TFC se han atribuido al estudio superficial de los conocimientos previos (en particular función y tasa de cambio). La investigación de estos autores propone realizar una articulación más cuidadosa de las destrezas de razonamiento y las concepciones relacionadas con la acumulación y el TFC. Entre las principales conclusiones, los autores consideran que, aunque hay deficiencias de los estudiantes relativas a las tareas, su rendimiento relacionado con la noción de acumulación y el TFC ha sido relativamente bueno y que el marco para este estudio sirve como una herramienta útil para el análisis de las destrezas de razonamiento y comprensión de los estudiantes relativos a los conceptos y a las notaciones del TFC.

Kouropatov y Dreyfus (2009) consideran que hay dos ideas centrales relacionadas con la integral: la integral definida y la indefinida y resaltan la falta de conexión entre ambas. Además, afirman que considerar la integral como una función de acumulación puede servir de base para la elaboración de una secuencia de tareas que posibilite una comprensión profunda. La acumulación es entendida en su sentido básico: una suma de acumulación que tiene un número grande de muchos pequeños términos. La idea central consiste en la integral de Riemann, que permite desarrollar tanto la integral definida como la indefinida y establecer sus conexiones mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.

En relación con el uso de la tecnología, son numerosos los trabajos que han investigado el uso de recursos informáticos para la enseñanza de la integral y del TFC, en particular el programa *Derive* (Camacho y Depool, 2003; Depool, 2004; Camacho, Depool y Santos-Trigo, 2010) y, más recientemente, los applets. Aranda y Callejo (2011) presentan el diseño de un experimento de enseñanza con estudiantes de 17-18 años de España para introducir el concepto de integral definida. Se parte del cálculo del área de figuras geométricas en el dominio de la geometría sintética y después se aborda el cálculo del área bajo una curva utilizando la geometría analítica. Tras definir la integral como un límite y desvincularla del área, se estudian sus propiedades y se aborda el TFC para llegar a la regla de Barrow. Como apoyo a la resolución de las tareas, en el mencionado trabajo se diseñaron tres tipos de applets que utilizan un programa de geometría dinámica, en los que se muestran simultáneamente diversas representaciones del concepto. A su vez, Gordon y Gordon (2007) utilizan la hoja de cálculo y la idea del ajuste de funciones con datos para facilitar el descubrimiento del TFC por parte del alumno.

Un punto de partida

Nuestra propuesta identifica un momento particular de un curso de Cálculo Integral, a partir del cual proponemos tomar una ruta alternativa para poner al alumno en un primer contacto con el TFC. Ese momento del curso es aquel que permite plantear, a manera de motivación, la posibilidad de calcular la distancia recorrida por un móvil que se desplaza a velocidad constante durante un lapso de observación determinado, en analogía con la situación propuesta durante un curso de Cálculo Diferencial donde, a partir de un movimiento rectilíneo uniforme, se busca determinar la rapidez con que se desplaza el objeto. Cabe aclarar que, si bien los cursos de Cálculo Diferencial y de Cálculo Integral a los que hacemos referencia corresponden, respectivamente, a las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral I y Cálculo Diferencial e Integral II, de la División de Ingeniería o de la División de Ciencias Exactas de la Universidad de Sonora, México, la propuesta de secuencia de tareas que se propone es aplicable en los primeros cursos de otras universidades (con las adaptaciones necesarias a cada institución).

La representación gráfica de la velocidad constante k desarrollada por el móvil, mediante una recta horizontal que intersecta el eje de las ordenadas en el punto $(0, k)$, favorece la interpretación geométrica de una situación que, desde la perspectiva analítica, resulta por demás familiar para los estudiantes de los cursos de Cálculo con nociones elementales de física: *la distancia recorrida por un móvil que se desplaza a velocidad constante es igual al producto de dicha velocidad por el tiempo transcurrido durante el desplazamiento;* es decir, si llamamos t_o al tiempo transcurrido durante la observación del movimiento, la distancia D recorrida al cabo de este tiempo quedaría determinada analíticamente por la expresión $D = kt_o$, mientras que, geométricamente, el valor de D corresponde al área de un rectángulo de base t_o y altura k, como se muestra en la figura 1.

De acuerdo con lo que acabamos de plantear, para encontrar la distancia recorrida por un móvil que se desplaza a velocidad constante (movimiento

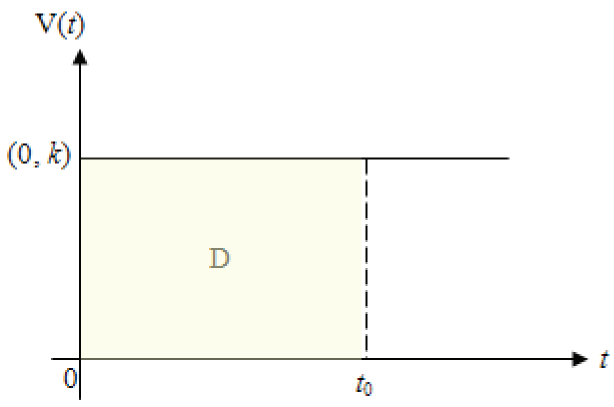


Figura 1

rectilíneo uniforme) durante un tiempo determinado, bastará con calcular el área bajo la curva de la velocidad en el intervalo correspondiente; es decir, solo hay que determinar el área de un rectángulo que tiene por altura la velocidad constante y por base el lapso de observación.

Ahora, si lo que interesa es calcular la distancia recorrida por un móvil que se desplaza con movimiento uniformemente acelerado, es decir, cuando la gráfica de velocidad contra tiempo es lineal, bastaría considerar la velocidad media desarrollada a lo largo del lapso de observación y proceder como en el caso anterior a velocidad constante. Así, la distancia recorrida estaría determinada por el área bajo una curva de velocidad constante y sería geométricamente equivalente al área de un rectángulo de base igual al lapso de observación, con una altura igual a la velocidad media desarrollada por el móvil (velocidad en el punto medio del intervalo). En la figura 2, puede apreciarse que el área triangular es igual a la rectangular si consideramos semejanza de triángulos, lo que nos permite concluir que, aun cuando la velocidad de desplazamiento no sea constante, la distancia total recorrida en un lapso determinado está dada, una vez más, por el área bajo la curva en el intervalo correspondiente.

Nos interesa destacar que, más allá del cálculo numérico del área bajo la curva para un proceso en el que la velocidad varía linealmente respecto al tiempo, nos interesa enfocarnos en la posibilidad de determinar la distancia total recorrida por un móvil partiendo de la idea primitiva aportada por el movimiento a velocidad constante que expusimos al principio.

Podemos considerar que el lapso de observación se divide en pequeños subintervalos, tan pequeños que permitan suponer un desplazamiento a velo-

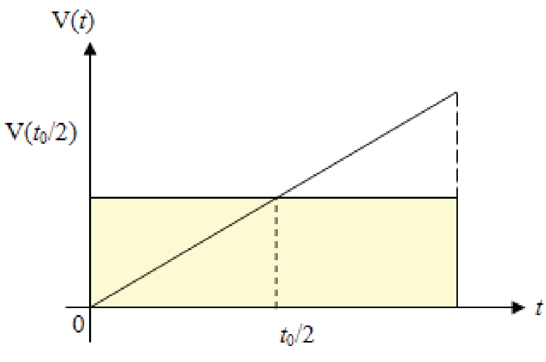


Figura 2

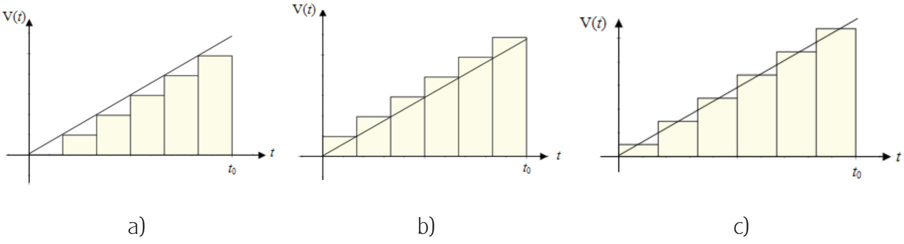


Figura 3

cidad constante para cada uno de ellos, de manera que la distancia recorrida quede determinada, de nuevo, por el área de un rectángulo sobre cada subintervalo. Partiendo de esta premisa, no será difícil asumir que la suma de las áreas de los rectángulos construidos sobre cada uno de los subintervalos constituye una aproximación, tan buena como pequeños sean estos, a la distancia total recorrida durante el lapso de observación. La figura 3 permite clarificar esta idea.

Independientemente de si los rectángulos quedan construidos con sus alturas levantadas sobre el extremo izquierdo (figura 3a), sobre el extremo derecho (figura 3b) o sobre el punto medio de cada subintervalo (figura 3c), este acercamiento gráfico permitirá al estudiante apreciar que el valor exacto de la distancia total recorrida se encuentra en el límite cuando el número de subintervalos tiende a infinito, y hará que le resulte accesible aceptar que, de nuevo, el área total bajo la curva en el lapso de observación corresponde a dicho valor límite. Cabe aclarar que, aunque el caso de la variación lineal es tan sencillo que ni siquiera resulta indispensable el uso de la tecnología para encontrar el área bajo la curva, su análisis desde la perspectiva de considerarla aproximadamente igual a una función escalonada resulta esencial para establecer el punto de partida que nos permita evolucionar hacia la determinación del área bajo cualquier otro tipo de curva, pues nos brinda la posibilidad de construir, geométricamente, la función integral como límite de integrales de funciones escalonadas. En términos del contexto específico de la variación velocidad contra tiempo, creemos que un acercamiento geométrico, como el aquí descrito para el caso del movimiento uniformemente acelerado, es lo suficientemente intuitivo para promover que el estudiante extrapole, sin mayores dificultades, las ideas esenciales a problemas en los que la velocidad varía de cualquier otra manera.

Es importante mencionar que, así como en el caso del desplazamiento de un móvil la distancia total corresponde al área bajo la curva de la velocidad en un intervalo dado, cuando el contexto cambia y lo que varía, por ejemplo, es la fuerza aplicada a lo largo de una distancia, el área bajo la curva estaría asociada al trabajo total desarrollado. Consideramos que un enfoque como este facilitará que el estudiante descubra que, dependiendo del contexto en que se plantee un problema, la determinación del área bajo la curva representará alguna magnitud específica de interés (distancia, trabajo, etc.), lo que, desde el punto de vista de algunas aplicaciones, justifica el abordaje de la integral a partir del cálculo de áreas.

El apoyo indispensable de la tecnología

Tal como se comentó en la introducción, la herramienta de trabajo que aquí proponemos se obtuvo a partir de los recursos visuales del Applet Descartes (Abreu y Oliveró, 2003), un software libre, propiedad del Ministerio de Educación del Gobierno de España, que se distribuye bajo licencia de Creative Commons.

Descartes hizo posible el diseño de los applets de trabajo que son esenciales en la implementación de esta propuesta. El Applet Descartes es un programa desarrollado en lenguaje Java que, por tener la característica de ser configurable, permite diseñar escenas interactivas a modo de pizarras electrónicas que pueden insertarse en una página web. Descartes puede descargarse de manera gratuita desde el sitio http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

Para nuestros propósitos, consideramos indispensable que el software por utilizar proporcione los recursos visuales suficientes para abordar este acercamiento alternativo al Teorema Fundamental del Cálculo. Así, el Applet Descartes nos brindó la posibilidad de crear escenarios interactivos que permitieran al alumno:

- Dividir el intervalo de trabajo en un número suficientemente grande de subintervalos, para ilustrar las sumas de Riemman construidas con altura sobre el extremo izquierdo, sobre el extremo derecho o sobre el punto medio de cada uno de ellos, mientras se aprecia en pantalla el valor numérico de la suma correspondiente.
- Estimar con suficiente precisión el valor exacto del área bajo la curva en un intervalo dado, mediante la simulación del paso al límite de una suma de Riemman, haciendo crecer lo *suficiente* el número de subintervalos.
- Observar en pantalla la variación del área acumulada bajo una curva en un intervalo, conforme varía el extremo derecho de este, mientras se

muestra una traza que permite observar gráficamente el comportamiento de dicha variación.

- Construir la gráfica de la *función área acumulada* o *función integral,* a partir de la variación del extremo derecho del intervalo, con la posibilidad de observar las características de la curva resultante (comportamiento creciente o decreciente, puntos de no derivabilidad, máximos y mínimos, etcétera).
- Realizar acercamientos sucesivos a la curva de la función integral para visualizar su linealidad local.

Estas capacidades del software hacen posible la secuencia de tareas que nos ocupa, apoyándola de modo esencial desde la motivación inicial hasta el descubrimiento del TFC. A grandes rasgos, una vez que se ha motivado al estudiante (desde la noción de desplazamiento a velocidad constante) a considerar una curva como una sucesión de tramos horizontales (función escalonada) y este ha arribado a la idea de que la suma de las áreas de los rectángulos construidos sobre ellos, con altura por la izquierda o por la derecha del subintervalo de la partición correspondiente, se aproxima al área bajo la curva en el intervalo dado, la construcción de sumas de Riemann para diversas funciones positivas con la ayuda del software favorecerá que el alumno se entrene en la determinación del área acumulada desde un valor determinado a hasta otro x. Aunque la motivación inicial obliga a permanecer en el contexto de las funciones positivas, ya que solo ahí el área bajo la curva tiene sentido, el proceso aproximativo puede evolucionar hasta el ámbito de funciones positivas y negativas en el intervalo de trabajo, hasta hacer emerger la *integral definida de Riemann*.

Una vez conformados los applets de trabajo, se procedió al diseño de tareas, con base en los criterios de idoneidad propuestos por el EOS, que resultaran apropiadas para conducir al estudiante al descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo, tomando como punto de partida tareas con representaciones geométricas que posteriormente se complementen y enriquezcan mediante un acercamiento con representaciones analíticas.

Esta propuesta alternativa está dirigida a estudiantes del curso de Cálculo Diferencial e Integral II, correspondiente a las Divisiones de Ingeniería o de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora.

Aplicación de los criterios de idoneidad

Tanto para el diseño de los applets como para el de las actividades didácticas (hojas de trabajo) que se presentan más adelante, se realizaron un diseño y un rediseño a partir del uso de los criterios de idoneidad propuestos por el EOS:

- *Idoneidad epistémica:* de acuerdo con las ideas expresadas anteriormente, se diseñó un sistema de prácticas que promoviera entre los estudiantes la construcción de significado en torno al proceso aproximativo asociado al cálculo del área bajo una curva, desde la premisa de que su valor numérico estará asociado al de alguna magnitud específica de interés. Gracias a la potencia del software, el estudiante puede dividir el intervalo de trabajo en un número de subintervalos n casi tan grande como se quiera, para apreciar cómo, a medida que crece n, cada suma de Riemann va aproximándose cada vez más a un número que parece ser el valor exacto del área bajo la curva en el intervalo dado. Además, el alumno puede observar, gráfica y numéricamente, una simulación del paso al límite haciendo crecer *lo suficiente* el número de subintervalos. Por otra parte, consideramos que la viabilidad de que el applet vaya trazando la gráfica de la *función integral* (función área acumulada cuando se trata de funciones positivas) conforme el extremo derecho del intervalo de trabajo cambia, constituye un acercamiento intuitivo muy potente en lo que respecta a la construcción de significados, dado su carácter altamente sensorial (visual, táctil) que promueve la evolución de estos hasta la noción de *integral definida*. Por último, puesto que la herramienta *zoom* de Descartes permite al estudiante asomarse a observar la linealidad local de la función integral construida, consideramos que, con este acercamiento se promueve, entre otras cosas, que el alumno descubra la relación que existe entre la función estudiada y su función integral, lo que, desde la perspectiva de Ordóñez (2001), permite articular las siguientes configuraciones epistémicas: primitiva, geométrica, sumatoria y tecnológica.
- *Idoneidad cognitiva:* el tránsito del estudiante por los diferentes escenarios interactivos construidos con Descartes y las hojas de trabajo favorece que, partiendo de la noción básica de función constante por intervalos, el alumno se asome a la idea de variación acumulada para después inferir sobre la existencia de una función que describe la variación de dicha

acumulación, construir la gráfica respectiva al manipular el extremo derecho del intervalo y conjeturar, con apoyo en el contexto analítico, sobre la relación entre la curva obtenida y la función estudiada. Finalmente, con base en las características gráficas de la función integral, el alumno está en posición de descubrir los planteamientos del TFC y confirmar geométricamente sus conjeturas. Consideramos que el sistema de prácticas diseñado para esta propuesta se encuentra dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante y promueve un primer contacto con el Teorema Fundamental del Cálculo a partir d e sus conocimientos previos.

- *Idoneidad interaccional:* la elaboración del material impreso, así como los applets de trabajo, se realizó con especial cuidado en cuanto a redacción, brevedad de texto, sencillez de lenguaje y modulación de los apartados para facilitar que los alumnos pudieran hallar ellos mismos la respuesta esperada, etc. Creemos que, al tener en cuenta los aspectos anteriores, contribuimos tanto a minimizar conflictos semióticos potenciales como a incrementar las posibilidades de resolver los conflictos semióticos que, efectivamente, llegaran a presentarse durante el desarrollo del proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional:* en lo que respecta al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales, el diseño se orientó hacia el desarrollo de un trabajo dentro del aula, de manera que todos los alumnos pudieran observar en una pantalla el resultado de la interacción con los applets; la idea es asignar cada día a un estudiante diferente la manipulación del applet correspondiente, mientras el resto del grupo hace sus anotaciones individuales en la hoja de trabajo. El alumno tiene la posibilidad de una interacción libre, dinámica y amigable, que le permite explorar, detectar patrones de comportamiento y conjeturar sobre los objetos representados y sus características desde cualquier computadora, ya que los applets están colocados en un sitio web. Por otra parte, el tiempo requerido para la implementación del proceso de instrucción se considera dentro de los límites permitidos por el programa de la materia (no más de cinco horas de clase), sobre todo si, como se espera que suceda, es posible agilizar los tratamientos posteriores al aprovechar los significados construidos a partir de nuestro acercamiento alternativo.
- *Idoneidad emocional:* el grado de motivación, entusiasmo y participación de los estudiantes durante el proceso de instrucción constituyó para nosotros un aspecto esencial que considerar en el diseño de los

materiales de trabajo. Así, nuestros esfuerzos se orientaron fuertemente hacia la motivación de aquellos alumnos que pudieran sentirse un tanto rezagados, cuidando en todo momento de mantener el interés de los estudiantes más aventajados.

- *Idoneidad ecológica:* la implementación de un proceso de instrucción como el que planteamos responde, con mucho, a las expectativas curriculares, sobre todo porque se espera que los significados construidos con base en las tareas propuestas faciliten el tratamiento formal posterior del TFC, sugerido por el currículo, en términos de un mayor sentido y agilidad en el desarrollo de los contenidos subsiguientes. Se pretende, pues, que brindar al estudiante una experiencia interactiva como la que se plantea contribuya a dar significado a la presentación formal del TFC y, por tanto, a incidir de manera positiva sobre la idoneidad epistémica.

La atención brindada a estos seis criterios de idoneidad en relación con el diseño del proceso de instrucción incrementa las probabilidades de lograr nuestro propósito final: promover que el estudiante descubra el Teorema Fundamental del Cálculo, conduciéndolo, mediante acercamientos intuitivos, a lo largo de una ruta procedimental que le resulte interesante y amigable.

4. LOS MATERIALES DE TRABAJO

Como se ha mencionado anteriormente, los materiales por utilizar en la implementación de esta propuesta son los applets y las hojas de trabajo. Por supuesto, para que los estudiantes puedan interactuar con los applets, se vuelve indispensable el equipo de cómputo y el cañón de proyección que hagan posible apreciar visualmente los efectos de dicha interacción.

Los applets

Los primeros escenarios interactivos se refieren a la construcción de sumas de Riemann, con áreas rectangulares cuya altura queda determinada por el extremo izquierdo, por el derecho o por el punto medio de cada subintervalo, para una partición dada del intervalo de trabajo. En principio, se hace alusión solo a funciones positivas que permitan, en cada caso, hacer referencia a la *función* *área acumulada*, y después, el proceso aproximativo se hace extensivo a funciones que toman valores positivos y negativos en el intervalo de trabajo para hacer emerger la noción de *integral definida de Riemann* y, posteriormente, la *regla de Barrow*. Mediante la interacción con el applet de apoyo para la construcción de sumas de Riemann, se espera que, bajo la supervisión del profesor, el estudiante pueda llegar a la integral definida a partir de la evolución de la función área acumulada.

Para esta propuesta, y con base en los significados emergentes de la construcción de la integral como un proceso infinito, se diseñaron cinco applets de trabajo con un mismo propósito general: que la visualización y la interacción didáctica generada a partir de esta hagan surgir los elementos que promuevan la construcción de un significado personal positivo en los estudiantes en torno a los planteamientos del TFC.

Los primeros tres applets fueron configurados para ser manipulados por un estudiante, mientras el resto del grupo observa en la pantalla los efectos de dicha manipulación. Mediante la activación de cada uno de ellos, el alumno podrá verificar, con base en una visualización dinámica, lo que se espera que haya podido construir, de manera estática, en las hojas de trabajo. Así, desde la representación tabular de la función integral $I(x)$, obtenida a partir del cálculo del área acumulada bajo la gráfica de una función f (entendida el área acumulada como la suma algebraica de las regiones por encima y por debajo del eje de las abscisas) para diversos valores de la variable independiente, el alumno construye la gráfica correspondiente con la ayuda de una cuadrícula de respaldo sobre la hoja de trabajo respectiva. Una vez realizada dicha construcción con lápiz y papel, el alumno podrá verificarla o rectificarla mediante la interacción con el applet correspondiente, explorando libremente hasta llegar a conjeturas que le permitan responder a las preguntas planteadas en la hoja de trabajo.

Es importante señalar que, con el ejercicio propuesto por estos primeros tres applets, se promueve en el estudiante el desarrollo de una actividad matemática altamente sensorial (visual, táctil) que se encuentra inmersa en el contexto geométrico, con el objeto de hacer surgir los significados al margen de las representaciones analíticas de las funciones involucradas. Se espera que el tránsito del estudiante a lo largo de esta ruta eminentemente geométrica le permita arribar, de una forma natural, al tratamiento analítico, de manera que este sirva para complementar y enriquecer el significado pretendido en torno a los planteamientos del TFC.

Los applets cuarto y quinto tienen propósitos meramente demostrativos, por lo que están diseñados para ser manipulados por el profesor. Se pretende que el escenario interactivo correspondiente a estos applets sirva de base para que el docente propicie y oriente la discusión con los alumnos en relación con las conjeturas que se espera haber generado con las actividades didácticas anteriores. Así, los recursos de estos applets ponen al estudiante en contacto con la posibilidad de observar y medir, mediante la herramienta zoom del software, la linealidad local de la función integral $I(x)$ y contrastar dicha medición con los valores correspondientes de la función $f(x)$.

Los cinco applets de trabajo, así como el de las sumas de Riemann, pueden encontrarse en la dirección web http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/applets.htm, por lo que las actividades didácticas correspondientes se pueden desarrollar vía Internet desde cualquier computadora.

Las hojas de trabajo

En la actividad 1, se presentan al estudiante las gráficas de tres funciones constantes en un intervalo dado para que, con apoyo en la cuadrícula de respaldo, construya la tabla correspondiente a la función integral $I(x)$ para cada $f(x)$. Para ello, se propone al alumno determinar el valor de la función integral para cada x dentro de un intervalo $[a, b]$, y colocar dicho valor (correspondiente a la acumulación desde a hasta x) en la casilla de las ordenadas en la tabla de $I(x)$. Una vez construida la tabla de la función integral $I(x)$, se pide al alumno graficar dicha función sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$ y que, con base en la curva obtenida, responda algunas preguntas. Esta actividad, al igual que las dos siguientes, es realizada por el estudiante con lápiz y papel para después verificar resultados y discutir sobre posibles conjeturas con la ayuda del applet respectivo (applet 1). Con la ayuda del software, en esta actividad el alumno compara la gráfica que obtuvo para $I(x)$ en la hoja de trabajo con la que dibuja el applet conforme el extremo derecho x del intervalo que se desplaza desde a hasta b. La recomendación es que, durante la sesión de trabajo con el applet, se promueva la discusión de las respuestas recabadas en las hojas de trabajo para que se institucionalicen los significados personales que vayan obteniéndose con base en las conjeturas de los alumnos. En esta primera actividad, se espera arribar a la noción de que la integral de una función constante $f(x)$ es una función lineal $I(x)$, cuya pendiente queda determinada por el valor de dicha constante (figura 4).

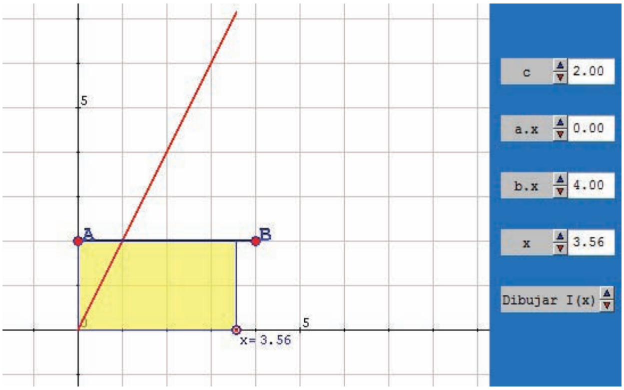


Figura 4

Para la actividad 2, se propone un par de funciones escalonadas sencillas, con objeto de que el alumno proceda como en el caso anterior. Es decir, trabajando con lápiz en la hoja de trabajo, el estudiante determinará el valor acumulado que corresponde a la ordenada de la función $I(x)$ para cada x y construirá la tabla de la integral para luego graficarla sobre el mismo plano en que se presenta $f(x)$. En esta actividad, las preguntas en la hoja de trabajo inciden en el paso de un escalón a otro en $f(x)$; es decir, se espera que la construcción gráfica realizada sugiera al alumno la existencia de un vínculo entre la discontinuidad de $f(x)$ y la no derivabilidad de $I(x)$ (figura 5). Se espera que surjan conjeturas como esta y otras más y se discutan durante la sesión de trabajo con el applet 2, con la intención de validar resultados.

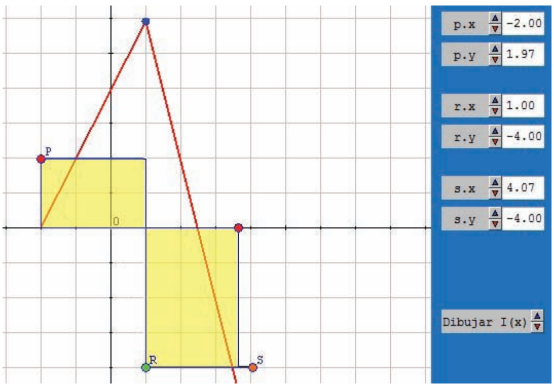


Figura 5

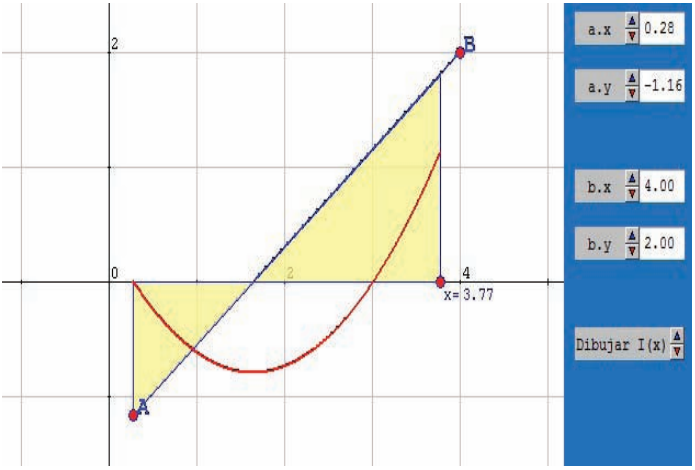


Figura 6

La actividad 3 es la última en que la manipulación del applet es realizada por un estudiante. En la hoja de trabajo correspondiente, se presentan al estudiante las gráficas de cuatro funciones lineales, de manera que aquel proceda como en los casos anteriores y determine el valor de la acumulación para cada x para construir la tabla de la integral $I(x)$. En este ejercicio, las preguntas buscan promover la conjetura respecto a tres aspectos que se espera discutir con el apoyo del applet 3: la integral de una función lineal es una parábola cuya concavidad depende del signo de la pendiente de $f(x)$ y cuyo vértice queda determinado por la intersección de $f(x)$ con el eje de las abscisas (figura 6).

Obsérvese cómo la figura 6 induce a recordar la visualización del criterio de la primera derivada para máximos y mínimos relativos.

Como podrá advertirse, la propuesta contempla la inclusión de hojas de trabajo únicamente en lo que respecta a la utilización de los applets 1, 2 y 3. Se espera que el trabajo realizado con papel y lápiz durante las actividades respectivas haya hecho surgir significados que, una vez confirmados o rectificados con la ayuda de los applets e institucionalizados durante la interacción grupal, constituyan la base para avanzar francamente hacia el Teorema Fundamental del Cálculo.

Prosiguiendo con la propuesta, se sugiere un trabajo interactivo de grupo, siempre bajo la supervisión del profesor, que contempla la manipulación de dos applets más.

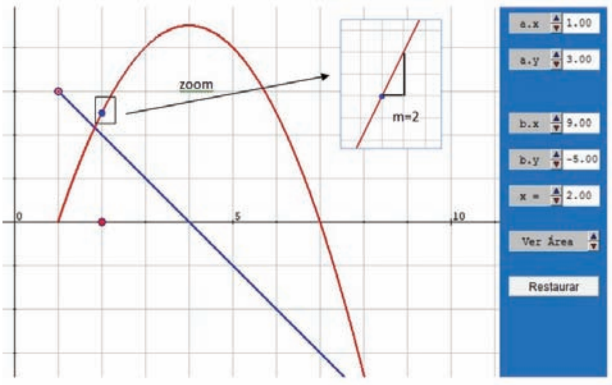


Figura 7

El applet 4 se refiere de nuevo al estudio de la integral de una función lineal, pero con un propósito mayor: la observación y medición de la linealidad local de la función integral $I(x)$ para diversos valores de x, con objeto de confirmar visualmente la relación entre dichas mediciones y los valores correspondientes de la función $f(x)$, lo que constituye la visualización del Teorema Fundamental del Cálculo, cuya institucionalización se sugiere para la parte final del siguiente trabajo propuesto (figura 7).

El applet 5, que es el último, toma como base los significados emergentes del trabajo interactivo, que abarca desde las sumas de Riemann hasta la observación de la linealidad local. Recordemos que el applet de las sumas de Riemann permitió encontrar la integral definida de diversas funciones a partir de considerar cada una de ellas como constantes por tramos; es decir, como funciones escalonadas. Además, en el trabajo con los applets 1 y 2, pudo observarse que la función integral $I(x)$ de una escalonada es una poligonal cuyos segmentos lineales tienen como pendiente la magnitud del escalón respectivo. Articulando todos estos significados, puede explicarse el propósito del applet 5, cuya potencia queda expresada visualmente mediante la figura 8 y puede resumirse de la siguiente manera:

> Aproximando a $f(x)$ mediante funciones escalonadas para las cuales el número de escalones puede manipularse y hacerse tender a infinito, es posible obtener la función integral $I(x)$ como el límite de las funciones poligonales respectivas; es decir, como el límite de las integrales de las funciones escalonadas.

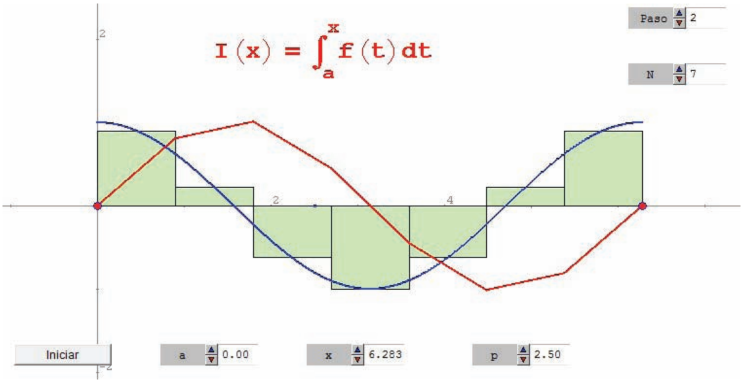


Figura 8

Además, como se aprecia en la figura 9, el applet 5 permite visualizar la recta tangente para un valor dado de x sobre la gráfica de $I(x)$ mediante la construcción de un triángulo rectángulo de cateto horizontal unitario, de manera que la proyección del cateto vertical (que representa a la pendiente de la recta) sobre la abscisa x coincide con la ordenada $f(x)$. Esto permite constatar, de manera visual, que la derivada de la integral es la función original, lo que constituye la expresión del Teorema Fundamental del Cálculo.

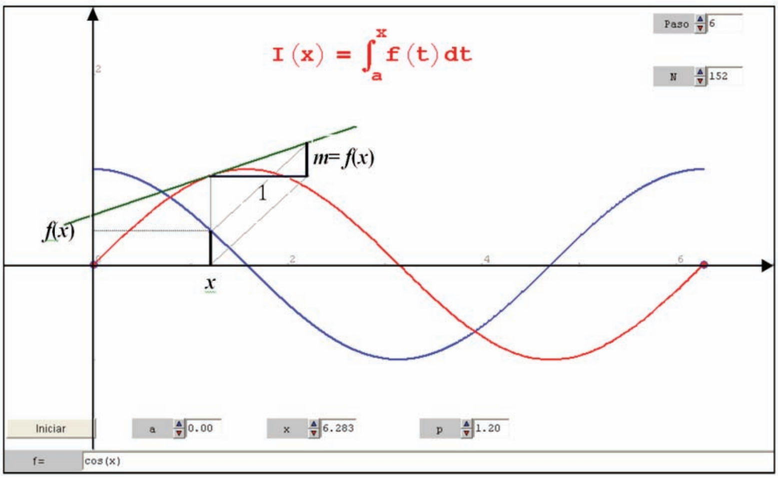


Figura 9

5. PROMOVIENDO MÁS CONJETURAS

Con los elementos desarrollados hasta aquí, podemos concluir que es posible construir la gráfica de la función integral de cualquier función que cumpla con las condiciones del Teorema Fundamental del Cálculo, lo cual no es poca cosa. Sin embargo, es posible, mediante una interpretación gráfica más profunda, identificar el papel de la constante de integración e incluso arribar a la visualización de la regla de Barrow, aprovechando la riqueza de la información aportada por el software.

Como sugiere la figura 10, la integral definida de una función f en un intervalo $[a, x]$ puede calcularse a partir de una función $g(x)$ que, al igual que $I(x)$, es una antiderivada para $f(x)$, por lo que $g(x)$ e $I(x)$ difieren solo por una constante. Así, para hacer coincidir la gráfica de $g(x)$ con la de $I(x)$, habrá que desplazarla $g(a)$ unidades, lo que nos llevará a la siguiente igualdad, conocida también como segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt = g(x) - g(a)$$

Entonces, si hacemos $x = b$, se obtiene la integral definida de f en $[a,b]$ a partir de una antiderivada g, con lo que queda establecida visualmente la regla de Barrow.

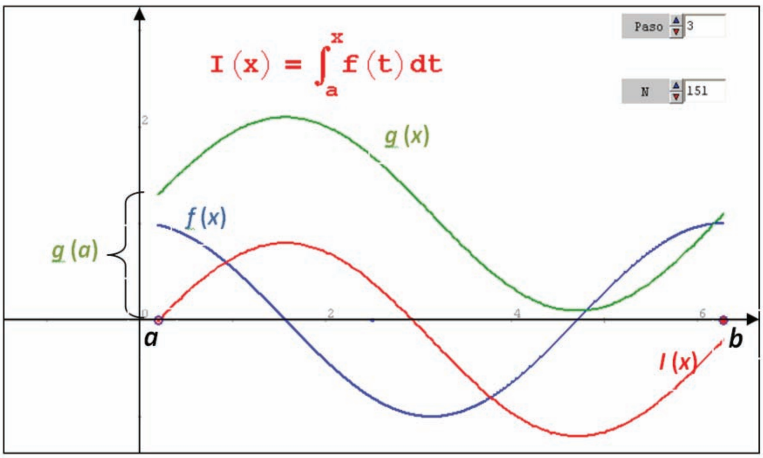


Figura 10

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

Es importante observar que los recursos geométricos de las escenas interactivas aquí presentadas sugieren que la regla de Barrow aplica necesariamente, aunque no exista, una antiderivada g en $[a, b]$.

En la figura 11 se muestra una función escalonada f en el intervalo [1,11], una función $g(x) = | x - 5 | - 4$ tal que $g'(x) = f(x)$ para $x \neq 5$, que no es derivable en $x = 5$, y que, sin embargo, cumple la regla de Barrow.

Como lo sugiere la figura 11,

$$\int_1^{11} f(t)dt = g(11) - g(1) = 2 - 0 = 2$$

y este resultado permite concluir que se cumple el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, aunque g no sea derivable en todo el intervalo de integración.

En la literatura matemática, pueden encontrarse generalizaciones del Teorema Fundamental del Cálculo, como la que se presenta en Botsko y Gosser

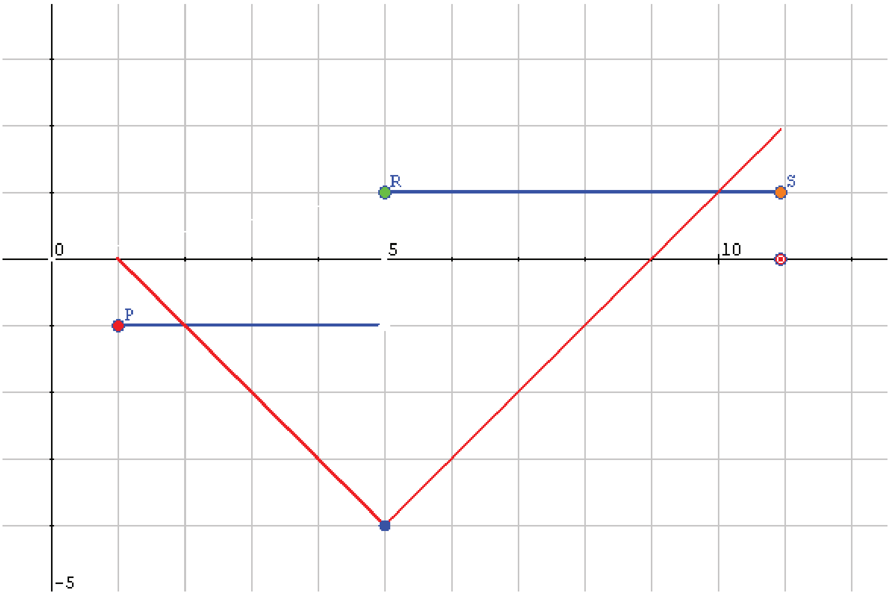


Figura 11

(1986), donde se establece como suficiente la condición de derivabilidad solo por la derecha para la función *g*.

CONSIDERACIONES FINALES

Consideramos que una propuesta de secuencia de tareas como la que aquí se presenta contribuye a promover una comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo que permite una mejor articulación de la complejidad de los objetos matemáticos integral y derivada. Se trata de una propuesta que, por una parte, relaciona diversas configuraciones epistémicas de la derivada y de la integral y, por otra parte, permite activar procesos relevantes en la actividad matemática. En particular, consideramos que las representaciones dinámicas promueven la mejor articulación del lenguaje numérico con el gráfico y con el analítico, así como la realización de traducciones entre ellos de manera fluida. Concretamente, en relación con el Teorema Fundamental del Cálculo, nos parece sumamente valiosa, desde el punto de vista epistémico, la posibilidad de observar la linealidad local de una curva para incorporar la "evidencia visual" del "parentesco" (relación) existente entre una función $f(x)$ y su función integral $I(x)$.

La secuencia de tareas aquí presentada es una primera fase del proceso de diseño y rediseño de secuencias didácticas basados en el uso de los criterios de idoneidad propuestos en el EOS. En la fase de diseño que aquí se presenta, los criterios de idoneidad se usan *a priori*. Cabe aclarar que es necesario realizar diversas implementaciones y utilizar los criterios de idoneidad también *a posteriori* para poder valorar la calidad del proceso de instrucción efectivamente realizado y tener elementos para un rediseño que mejore la propuesta aquí presentada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abreu, J. L., y M. Oliveró (2003), *Applet Descartes (software),* Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España.

Aranda, C., y M. L. Callejo (2011), "Usando 'applets' para construir el concepto de integral definida", *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,* vol. 58, pp. 65-75.

Artigue, M. (1995), "La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos", en M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática,* México, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 97-140.

____________ (2002), "Analysis", en D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking,* Nueva York, Kluwer Academic Publishers, pp. 167-198.

____________ (2003), "Reaction. Learning and teaching analysis: What can we learn from the past in order to think about the future?", en D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson y G. Schubring (eds.), *One hundred years of l'enseignement mathématique: Moments of mathematics education in the twentieth century,* Monografía núm. 39, Génova, Italia, L'Enseignement Mathématique, pp. 211-223.

Boigues, F. J., S. Llinares y V. D. Estruch (2010), "Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa-RELIME,* vol. 13, núm. 3, pp. 255-282.

Botsko, M., y R. Gosser (1986), "Stronger Versions of the Fundamental Theorem of Calculus (in The Teaching of Mathematics)", *American Mathematical Monthly, Jstor,* vol. 93, núm. 4, pp. 294-296.

Camacho, M. (2011), "Investigación en didáctica de las matemáticas en el bachillerato y primeros cursos de universidad", en M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. M. Palarea (eds.), *Investigación en Educación Matemática XV,* Ciudad Real, España, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, pp. 195-223.

Camacho, M., y R. Depool (2003), "Using Derive to understand the concept of definite integral", *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* vol. 5, pp. 1-16.

Camacho, M., R. Depool y M. Santos-Trigo (2010), "Students' Use of Derive Software in Comprehending and Making Sense of Definite Integral and Area Concepts", en F. Hitt, D. Holton y P. W. Thompson (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. VII CBMS Issues in Mathematics education (16),* Providence, RI, American Mathematical Society, pp. 29-61.

Carlson, M. P., J. Persson y N. Smith (2003), "Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: The fundamental theorem of calculus", en N.A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (eds), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education, reunión conjunta de PME y PMENA, Hawai, Estados Unidos, vol. 2, pp. 165-172.
Contreras, A., L. Ordóñez y M. Wilhelmi (2010), "Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 28, núm. 3, pp. 367-384.
Contreras, A., M. García y V. Font (2012), "Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función", *Bolema*, vol. 26, núm. 42B, pp. 667-690.
Czarnocha, B., S. Loch, V. Prabhu y D. Vidakovich (2001), "The concept of definite integral: coordination of two schemas", en M. Van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, Países Bajos, Freudenthal Institute, vol. II, pp. 297-304.
Depool, R. (2004), *La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS),* Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.
Dubinsky, E., y M. A. McDonald (2001), "APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research", en D. Holton (ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study,* Serie: New ICMI Study Series, Dordrechet, Kluwer, vol. 7, pp. 273-280.
Font, V., y M. Adán (2013), "Valoración de la idoneidad matemática de tareas", en A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII,* Bilbao, SEIEM, pp. 283-291.
Font, V., J. D. Godino y J. Gallardo (2013), "The emergence of objects from mathematical practices", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 82, pp. 97-124.
Font, V., N. Planas y J. Godino (2010), "Modelo para el análisis didáctico en educación matemática", *Infancia y Aprendizaje,* vol. 33, núm. 1, pp. 89-105.
García, M. (2008), *Significados institucionales y personales del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de primero de bachillerato,* Tesis doctoral, Universidad de Jaén.
García, M., S. Llinares y G. Sánchez-Matamoros (2011), "Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures", *International Journal of Science and Mathematics Education,* vol. 9, núm. 5, pp. 1023-1045.
Giménez, J., V. Font y Y. Vanegas (2013), "Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a Research Process", en C. Margolinas (ed.), *Task*

Design in Mathematics Education, Proceedings of ICMI *Study 22,* Oxford, pp. 581-590.

Godino, J. D., C. Batanero y V. Font (2007), "The onto-semiotic approach to research in mathematics education", ZDM. The International Journal on Mathematics Education, vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135.

___________ (2008), "Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática", *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática,* vol. 10, pp. 7-37.

Godino, J. D., D. Bencomo, V. Font y M. R. Wilhelmi (2006), "Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas", *Paradígma,* vol. 27, núm. 2, pp. 221-252.

González, A. S. (2005), *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica. Utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje,* Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

Gordon, S. P., y F. S. Gordon (2007), "Discovering the fundamental theorem of calculus", *Mathematics Teacher,* vol. 100, núm. 9, pp. 597-604.

Hill, H. C., M. L. Blunk, C. Y. Charalambous, J. M. Lewis, G. C. Phelps, L. Sleep y D. L. Ball (2008), "Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study", *Cognition and Instruction,* vol. 26, núm. 4, pp. 430-511.

Hitt, F. (1998), "Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo", *Educación Matemática,* vol. 10, núm. 2, pp. 23-45.

Kouropatov, A., y T. Dreyfus (2009), "Integrals as accumulation: A didactical perspective for school mathematics", en M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Tesalónica, Grecia, PME, vol. 3, pp. 417-424.

Labraña, P. A. (2000), *La avaliacion das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral,* Tesis de doctorado, Universidad de Santiago de Compostela, España.

Margolinas, C. (2013), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of* ICMI *Study 22,* Oxford, ICMI.

Muñoz, O. G. (2000), "Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 3, núm. 2, pp. 131-170.

Ordóñez, J. (2011), *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de* *bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida,* Tesis doctoral, Universidad de Jaén.

Pino, L., W. F. Castro, J. D. Godino y V. Font (2013), "Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato", *Paradígma,* vol. 34, núm. 2, pp. 123-150.

Pino, L., J. D. Godino y V. Font (2011), "Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada", *Educação Matematica Pesquisa,* vol. 13, núm. 1, pp. 141-178.

Pochulu, M., y V. Font (2011), "Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 14, núm. 3, pp. 361-394.

Pochulu, M., V. Font y M. Rodríguez (2013), "Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores", *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM),* Montevideo, FISEM, pp. 4988-4998.

Robert, A., y N. Speer (2001), "Research on the teaching and learning of Calculus/ Elementary analysis", en D. Holton (ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study,* Holanda, Kluwer Academic, pp. 283-299.

Robles, G., A. Del Castillo y V. Font (2012), "Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada", *Educación Matemática,* vol. 24, núm. 2, pp. 35-71.

Salinas, P., y J. A. Alanis (2009), "Hacia un nuevo paradigma de la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 12, núm. 3, pp. 355-382.

Sánchez-Matamoros, G., M. García y S. Llinares (2006), "El desarrollo del esquema de derivada", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 24, núm. 1, pp. 85-98.

Sullivan, P., D. Clarke y B. Clarke (2013), *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning,* Nueva York, Springer.

Tall, D. (ed.) (1991a), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

____________ (1991b), "Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus", *Mathematics Teaching,* vol. 137, pp. 29-32.

____________ (1996), "Functions and calculus", en A. Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Países Bajos, Kluwer, pp. 289-325.

Tellechea, E. (2005), "De la integral de Riemann al Teorema Fundamental del Cálculo: un acercamiento con el Applet Descartes", *XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. En: URL:http://www.mat.uson.mx/eduardo/Tellechea2005.pdf

Thompson, P. W., y J. Silverman (2007), "The Concept of Accumulation in Calculus", en M. Carlson y C. Rasmussen (eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, Washington, D.C., Mathematical Association of America, pp. 117-131.

Turégano, P. (1994), *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*, Tesis de doctorado, Universidad de Valencia, España.

____________ (1996), "Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida", *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 10, pp. 9-28.

Valls, J., J. Pons y S. Llinares (2011), "Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 29, núm. 3, pp. 325-338.

DATOS DE LOS AUTORES

Martha Gabriela Robles Arredondo
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México
gaby@mat.uson.mx

Eduardo Tellechea Armenta
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México
etellech@mat.uson.mx

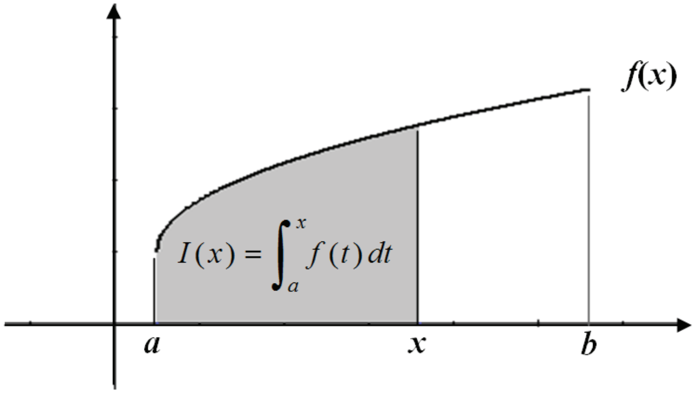
Vicenç Font Moll
Facultat de Formació del Professorat, Departament de Didàctica
de les Ciències Experimentals i la Matemàtica, Campus Vall d'Hebron,
Universitat de Barcelona, España
vfont@ub.edu

ANEXOS

ACTIVIDAD 1

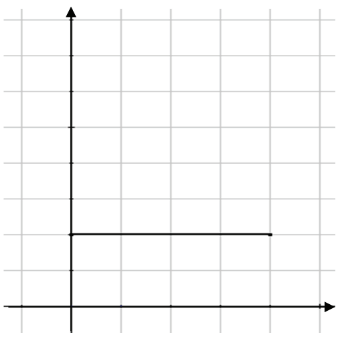
Alumno: ____ Fecha: _____________

Como apreciaste durante la exploración de las sumas de Riemann, la integral de una función *f*, en un intervalo dado, cambia conforme varía el extremo derecho de dicho intervalo. En términos funcionales, diremos que **la integral de *f* es una función del extremo superior del intervalo *x***, para $x \in [a, b]$; dicha función la identificamos como $I(x)$ y **representa la integral de la función *f* desde *a* hasta *x***, como se ilustra en el siguiente esquema.



En cada uno de los siguientes casos se te presenta la gráfica de una función $f(x)$, a partir de la cual se espera que construyas la gráfica de su respectiva función integral $I(x)$.

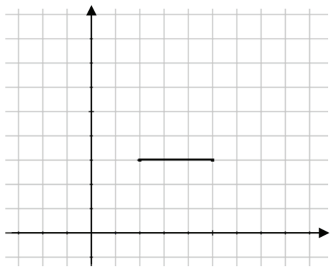
1. Dada $f(x)$ como en la gráfica:



x	$I(x)$

a) Tabula para $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$ e $I(4)$
b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.

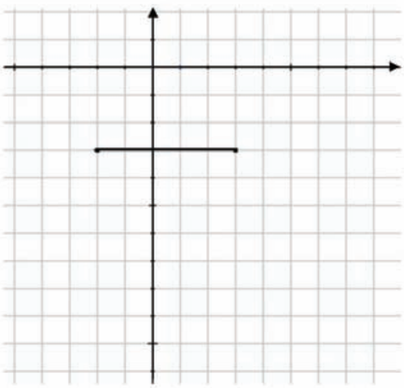
2. Dada $f(x)$ como en la gráfica:



x	$I(x)$

a) Tabula para $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$ e $I(5)$.
b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.

3. Dada $f(x)$ como en la gráfica:



x	$I(x)$

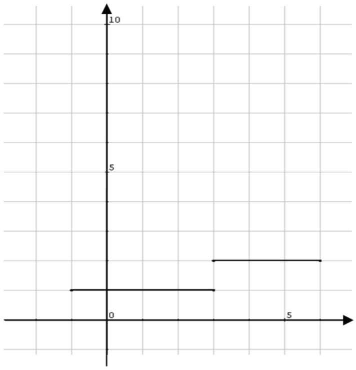
a) Tabula para $I(-2)$, $I(-1)$, $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$ e $I(3)$.
b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.

4. Si observas lo que obtuviste en cada uno de los casos anteriores, ¿cómo dirías que resulta la gráfica de $I(x)$ cuando $f(x)$ es constante? ¿Tiene algo que ver el signo de $f(x)$? Explica ampliamente.

Actividad 2

Alumno: ____ Fecha: _____________

1. Considera la función $f(x)$ cuya gráfica es:



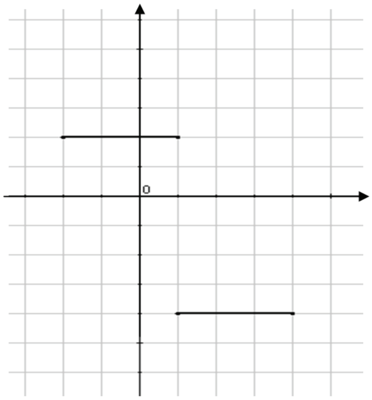
x	$I(x)$

a) Tabula para $I(-1)$, $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$, $I(5)$ e $I(6)$.

b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.

c) Compara las gráficas de $f(x)$ e $I(x)$ en $x = 3$. Explica ampliamente lo que observas.

2. Considera la función $f(x)$ cuya gráfica es:



x	$I(x)$

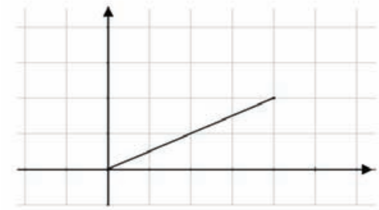
a) Tabula para $I(-2)$, $I(-1)$, $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$ e $I(4)$.
b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.
c) Compara las gráficas de $f(x)$ e $I(x)$ en $x = 1$. Explica ampliamente lo que observas.

3. Si examinas con atención lo que obtuviste en cada uno de los casos anteriores, ¿cómo dirías que resulta la gráfica de $I(x)$ cuando $f(x)$ es escalonada? Explica ampliamente.

ACTIVIDAD 3

Alumno: ____ Fecha: _____________

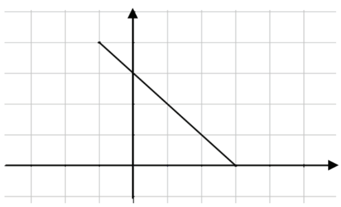
1. Considera la función $f(x)$ cuya gráfica es:



x	$I(x)$

a) Tabula para $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$ e $I(4)$.
b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.

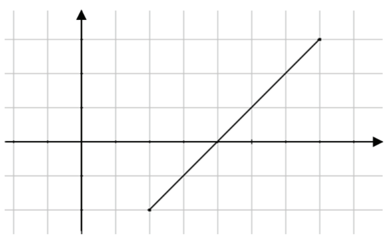
2. Considera la función $f(x)$ cuya gráfica es:



x	$I(x)$

a) Tabula para $I(-1)$, $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$ e $I(3)$.
b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.

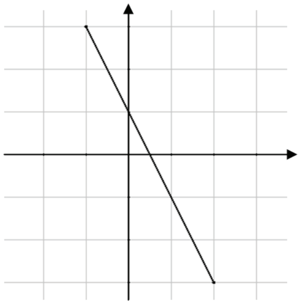
3. Considera la función $f(x)$ cuya gráfica es:



x	$I(x)$

a) Tabula para $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$, $I(5)$, $I(6)$ e $I(7)$.
b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.

4. Considera la función $f(x)$ cuya gráfica es:



x	$I(x)$

a) Tabula para $I(-1)$, $I(0)$, $I(1/2)$, $I(1)$ e $I(2)$.
b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece $f(x)$.

5. Si examinas con atención lo que obtuviste en cada uno de los casos anteriores, ¿cómo dirías que resulta la gráfica de $I(x)$ cuando $f(x)$ es una recta no horizontal? Explica ampliamente.

6. Observa las gráficas de $f(x)$ e $I(x)$ en cada uno de los cuatro casos estudiados para que describas amplia y claramente **la relación** que encuentras **entre el signo de** $f(x)$ y **el comportamiento creciente o decreciente de** $I(x)$.
7. Si comparas ambas gráficas justo en el punto en que $f(x)$ intersecta al eje de las abscisas, ¿qué es lo que observas? ¿Qué podrías concluir? Explica ampliamente.