ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE

Hilda Salgado y María Trigueros

Resumen: En el aprendizaje del Álgebra Lineal se observan problemas debido a que los conceptos resultan a menudo complejos por su alto nivel de abstracción. El tema correspondiente a los valores, vectores y espacios propios es muy abstracto, pero importante dadas sus múltiples aplicaciones. En este artículo se reportan los resultados de una investigación acerca del aprendizaje de los alumnos en un curso en el que estos conceptos se enseñaron usando un diseño didáctico basado en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Se presenta la descomposición genética diseñada y el análisis de los resultados del trabajo realizado por los alumnos en relación a los conceptos de interés. Los resultados validan la descomposición genética propuesta y muestran evidencias del aprendizaje de los alumnos. En particular ponen de manifiesto la posibilidad de construir una concepción objeto de los conceptos en estudio y la construcción de la mayoría de los alumnos de una concepción proceso.

Palabras clave: valor propio, vector propio, espacio propio, teoría APOE, descomposición genética.

A teaching experience of eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces based on APOS Theory

Abstract: When teaching Linear Algebra, given the complexity and high level of abstraction of the concepts involved in its learning, several problems arise. Eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces are very abstract concepts, but due to their multiples applications are important to learn. This paper reports on the results of a research project that studies students' learning of these concepts in a course that followed a specific didactical design based on APOS Theory.

Fecha de recepción: 19 de junio de 2014; fecha de aprobación: 19 de diciembre de 2014.

The results obtained permited to validate the designed genetic decomposition. The analysis of students' work related to the above mentioned concepts shows evidence of students' learning. In particular, they show the possibility of building an object conception of the studied concepts and the construction of a process conception by most students.

Keywords: eigenvalue, eigenvector, eigenspace, APOS Theory, genetic decomposition.

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal es una rama de las Matemáticas con muchas aplicaciones a problemas prácticos de diversas disciplinas. Ello ha conducido a que se convierta en un curso obligatorio para los alumnos de distintas licenciaturas. Sin embargo, la investigación en Matemática Educativa acerca del Álgebra Lineal muestra que los alumnos presentan dificultades en su aprendizaje y que esas dificultades están relacionadas con la naturaleza abstracta de los conceptos que integran esta materia, es decir, con la gran cantidad de definiciones que se incluyen y el manejo formal que se hace de ellas (Larson *et al.,* 2007; Sierpinska, 2000; Possani *et al.,* 2010). En las investigaciones se detalla que los alumnos generalmente consideran al Álgebra Lineal como un conjunto de algoritmos que les permiten resolver problemas específicos. Por ello, se esfuerzan únicamente en memorizar los procedimientos requeridos en la solución de los problemas y no ponen atención a la comprensión de los conceptos que subyacen a ellos. La investigación señala también que después de un curso de esta materia, en el que se enseñan definiciones de conceptos y teoremas, la mayoría de los alumnos no los comprenden y son incapaces de usarlos en la solución de problemas no rutinarios (Thomas y Stewart, 2011).

Un tema importante en el estudio del Álgebra Lineal es el de los valores, vectores y espacios propios. Este tema resulta, de acuerdo a la opinión de maestros y de los propios alumnos, particularmente difícil. Estos conceptos juegan, sin embargo, un papel fundamental en muchas aplicaciones, como en problemas relacionados con ecuaciones en diferencia, ecuaciones diferenciales, procesos de Markov, potencias de matrices y estadística multivariada. Los estudios realizados en el contexto de la Educación Matemática indican que la mayoría de los alumnos suelen memorizar los algoritmos relacionados con estos conceptos durante el curso pero no los comprenden y que la mayoría de los maestros y los libros de texto no consideran la importancia de su interpretación geométrica en la posibilidad de comprenderlos a profundidad. (Thomas y Stewart, 2011; Gol, 2012).

Este trabajo tiene como objetivo investigar la forma en que los alumnos construyen los conceptos de valor, vector y espacio propio a través de una experiencia didáctica diseñada con base en los principios y la metodología de la teoría APOE. Este conocimiento puede ser útil en el diseño de estrategias de enseñanza que permitan a los alumnos construir estos conceptos a mayor profundidad, determinar su pertinencia frente a distintas aplicaciones y utilizarlos en la solución de problemas. Por lo anterior, las preguntas que se plantean en este estudio son: ¿Qué construcciones requieren los alumnos para aprender los conceptos de valores, vectores y espacios propios? ¿Es posible favorecer esas construcciones mediante actividades diseñadas con la teoría APOE?

ANTECEDENTES

Como se mencionó anteriormente, las investigaciones relacionadas con el aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios son escasas en la literatura. Los resultados obtenidos en cada una de ellas se describen a continuación.

Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith y Nelipovich (2007) usaron las Teorías Modelos y Modelación y Educación Matemática Realista para diseñar una actividad de modelación con el objetivo de enseñar valores y vectores propios. La actividad propone la búsqueda de un modelo para distribuir convenientemente un número dado de autos en diferentes locales de renta, de manera que siempre haya autos disponibles en cada uno de ellos. El análisis de los datos muestra que los alumnos aplicaron tres estrategias en el planteamiento y la resolución del problema: uso de potencias de matrices en un proceso de Markov; uso de un sistema de ecuaciones lineales e interpretación de las estadísticas de redistribución de los autos en los diferentes locales. En ninguno de los casos los alumnos requirieron directamente los valores y vectores propios por lo que los maestros involucrados en el estudio tuvieron dificultades al buscar una manera de introducirlos. Los investigadores concluyen que a pesar de que la primera estrategia de modelación puede relacionarse con los valores y vectores propios, su necesidad es tardía en el trabajo con el modelo. Ello no permitió alcanzar el fin deseado y, como consecuencia, se consideró que la actividad de modelación sugerida no es adecuada para la enseñanza de estos conceptos.

Thomas y Stewart (2011) y Stewart y Thomas (2007) centraron su investigación en un acercamiento enactivista y personificado (*embodied)* para analizar la forma en que los alumnos entienden los valores propios y los vectores propios asociados a ellos y cómo los relacionan con su representación geométrica. Concluyen que los alumnos manejan los procedimientos algebraicos para encontrarlos, pero la mayoría no conoce su representación geométrica y al presentárselas no son capaces de relacionar ambas representaciones. Su evidencia muestra, además, que si los alumnos reconocen esta relación, logran una mejor comprensión de estos conceptos. Sugieren, por último, la importancia de trabajar con ambas en la enseñanza.

Gol (2012) entregó a sus alumnos matrices, $A_{2\times2}$, multiplicadas por un vector, $A\bar{x}$, y les pidió que encontraran los valores y vectores propios asociados a esa matriz usando un programa de computadora. Mediante este programa los alumnos podían mover los vectores en la pantalla hasta encontrar dónde $\bar{x}$ y $A\bar{x}$ eran paralelos y tenían la misma dirección. De esta forma hallaban el valor propio positivo, λ, asociado a la matriz y el vector propio correspondiente. La autora analizó con los alumnos qué sucedía cuando el valor propio asociado a la matriz era negativo. Posteriormente, realizó una entrevista en la que encontró que sus alumnos usaban manos y brazos para expresar su imagen mental de estos conceptos. Concluyó que el uso de la computadora estimuló la formación de imágenes dinámicas de los conceptos de interés que los alumnos manifestaron en la entrevista a través de sus gestos corporales. Esta experiencia permitió a los alumnos ver la dirección de los vectores y su posición en el plano, estudiar vectores colineales con dirección opuesta, entender a los vectores propios como vectores "especiales" que son colineales con el vector que se obtiene al multiplicarlos por la matriz, y analizar el comportamiento de su transformación bajo la matriz A, así como sus propiedades.

De este breve resumen es posible observar que aunque se ha hecho investigación sobre el aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios y se cuenta con resultados que proporcionan información útil para profundizar en este tema, es necesario llevar a cabo más investigación para entender la forma en que los alumnos aprenden estos conceptos. En esta investigación se eligió como marco teórico la teoría APOE, ya que se enfoca precisamente en el estudio de las construcciones involucradas en el aprendizaje e incluye el diseño de una estrategia para la enseñanza.

MARCO TEÓRICO

Como se mencionó antes esta investigación utilizó la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Esta teoría cognitiva fue desarrollada como parte de un esfuerzo por entender cómo las matemáticas se aprenden y qué se podía hacer en la enseñanza para ayudar a los alumnos en su aprendizaje. Se intenta explicar fenómenos que se observan cuando los alumnos están tratando de aprender conceptos matemáticos. Se utiliza el análisis de dichos fenómenos en términos de las construcciones mentales de los alumnos para sugerir acciones didácticas que apoyen el proceso de aprendizaje (Arnon *et al.,* 2014).

Las Acciones son transformaciones de los objetos cognitivos previamente construidos que un alumno percibe como externas o que constituyen instrucciones que el alumno requiere para realizar cada operación de un procedimiento. La realización de acciones constituye el inicio de la construcción de cualquier concepto matemático: por ello, juegan un papel sumamente importante.

Cuando la acción o las acciones se repiten, el alumno puede reflexionar sobre ellas de tal forma que ya no requiere de las instrucciones externas, las puede imaginar o llevar a cabo sin seguir el orden específico dado por las acciones. En este caso, se considera, en la teoría, que las acciones han sido interiorizadas en un Proceso. El proceso hace una transformación semejante a la de la acción o acciones sin necesidad de algún estímulo externo o de seguir pasos memorizados; en otras palabras, el alumno tiene más control sobre la transformación o transformaciones que requiere aplicar.

Cuando un alumno enfrenta la necesidad de hacer acciones sobre un proceso y se da cuenta de su totalidad, puede encapsular el proceso en un Objeto cognitivo. Este alumno ha construido una concepción objeto de un concepto matemático si es capaz de trabajar con él como una entidad, la cual puede transformar mediante nuevas acciones, o analizar sus propiedades.

El Esquema para determinado tema matemático o concepto es la colección de acciones, procesos, objetos u otros esquemas que un alumno ha construido, que están unidos entre sí mediante relaciones de naturaleza diversa y que el alumno evoca, de manera no necesariamente consciente, como un marco más o menos coherente en la solución de problemas específicos ligados a los conceptos matemáticos relacionados con el esquema. Cuando el esquema es coherente, el alumno es capaz de reconocer aquellas situaciones donde puede aplicarse y discriminar entre los tipos de problemas que pueden o no resolverse mediante su uso. El alumno puede, además, conocer sus posibilidades y limitaciones.

El alumno puede considerar al esquema como un objeto sobre el cual puede ejecutar nuevas acciones. Cuando esto ocurre se considera que el alumno ha tematizado al esquema. Notamos entonces que en la teoría APOE existen dos formas de construir objetos mediante la encapsulación de un proceso o mediante la tematización de un esquema.

En la teoría APOE se propone que a partir de estas estructuras y de los mecanismos asociados a su construcción es posible diseñar un modelo teórico detallado de la construcción de cada concepto específico. Este modelo se conoce como descomposición genética del concepto en cuestión. El diseño de una primera descomposición genética puede partir del análisis epistemológico o histórico de las matemáticas involucradas, del análisis de los resultados encontrados en la literatura sobre el concepto en cuestión, de la experiencia de los investigadores como maestros o de una combinación de estos factores.

Una vez diseñada una descomposición genética preliminar se utiliza en la investigación para analizar las construcciones que muestran distintos alumnos cuando están aprendiendo el concepto o los conceptos de interés. Estas construcciones se manifiestan a través del trabajo y las explicaciones de los alumnos cuando resuelven actividades, ejercicios y problemas relacionados con ese concepto.

Los resultados de la investigación se utilizan para refinar, si es necesario, la descomposición de manera que sea más congruente con la forma observada en la que aprenden los alumnos. Este proceso de investigación y refinación puede repetirse hasta obtener una nueva descomposición que permite enseñar de manera efectiva el concepto y explicar las construcciones propuestas como necesarias para su aprendizaje. Es importante notar que una descomposición genética no es única. Pueden coexistir distintas descomposiciones genéticas de un mismo concepto, siempre y cuando den cuenta de la construcción del mismo de forma adecuada.

Usando la descomposición genética como modelo de aprendizaje de un concepto o un tema de las matemáticas, es posible diseñar actividades que permitan a los alumnos aprender el concepto a través de las construcciones que esta predice. Estas actividades se utilizan en el aula siguiendo un ciclo de enseñanza específico y también para obtener datos para la investigación.

El ciclo de enseñanza, conocido como ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios) comienza por el trabajo colaborativo de los alumnos con actividades diseñadas en términos de la descomposición genética. Después se discuten los resultados de ese trabajo con todo el grupo y finalmente se dejan ejercicios para que los alumnos los trabajen como tarea. Este ciclo de enseñanza se repite hasta que se han trabajado todas las actividades diseñadas.

METODOLOGÍA

La teoría APOE incluye una metodología de investigación que consta de tres partes y se describen a continuación:

- Diseño de una descomposición genética del concepto matemático de interés.
- Desarrollo e implementación de métodos de instrucción basados en el análisis teórico en los que es posible utilizar el ciclo ACE como estrategia de enseñanza conjuntamente con otras estrategias tales como aprendizaje colaborativo y/o programación en computadora.
- Recolección y análisis de datos para poner a prueba y refinar, si es necesario, la descomposición genética preliminar y las actividades de instrucción.

En esta sección se presenta la descomposición genética diseñada seguida de la descripción del desarrollo de la instrucción. Se ejemplifican y se analizan, utilizando el marco teórico, algunas actividades utilizadas en clase así como algunos instrumentos de investigación diseñados. Se describe la metodología en la recolección y el análisis de datos.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

En concordancia con la metodología de la teoría APOE, en la presente investigación se diseñó, en primer término, la descomposición genética preliminar relativa a los conceptos de valores, vectores y espacios propios de una matriz. En este diseño se consideró la experiencia de las investigadoras como maestras de Álgebra Lineal y los resultados reportados en la literatura relacionados con estos conceptos.

Se considera que los conocimientos previos necesarios para iniciar la construcción de estos conceptos son:

- Los conceptos de matriz y vectores como objetos.
- El proceso de solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Los conceptos de conjunto, conjunto solución de un sistema, espacio nulo de una matriz y conjunto generador de un espacio vectorial como procesos.

A partir de las construcciones previas se requieren las siguientes construcciones:

- Se realizan acciones de multiplicar una matriz A por un vector para encontrar que este producto resulta en un nuevo vector. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite concebir el vector resultante del producto para cualquier matriz y cualquier vector sin necesidad de calcularlo explícitamente.
- Se hacen acciones tanto geométricas como algebraicas para encontrar el producto de un vector por un escalar. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite a los alumnos considerar el resultado de estas acciones como una transformación de un vector en un nuevo vector paralelo al primero y en el que se asocia el signo del escalar con la dirección del vector resultante.
- La necesidad de comparar los vectores resultantes de los dos procesos anteriores y considerar las condiciones que se requieren para que sean iguales, permite encapsular la ecuación resultante como un objeto y nombrar al escalar y al vector que en ella aparecen como valor y vector propio, respectivamente.
- Se realizan acciones sobre la ecuación resultante para determinar qué condiciones debe cumplir el escalar para que la ecuación tenga solución no trivial. Estas acciones se interiorizan en un proceso en el cual no es necesario realizar cada acción para encontrar el escalar y el vector correspondiente que satisfacen la ecuación.
- El proceso anterior puede revertirse para determinar si un escalar es valor propio de una matriz y encontrar los vectores propios correspondientes.
- El último proceso se coordina con el segundo en un proceso geométrico donde la relación entre el escalar y el vector puede realizarse mentalmente para cualquier vector.
- Este proceso se encapsula en un objeto donde el escalar y el vector

que satisfacen la ecuación se consideren como entidades que pueden definirse y nombrarse como valor y vector propio de una matriz dada y sus propiedades pueden determinarse.

- Los procesos anteriores se coordinan con el proceso de solución de un sistema homogéneo de ecuaciones en un nuevo proceso que permite a los alumnos interpretar el proceso de encontrar los valores y vectores propios de una matriz dada como el conjunto solución de un sistema homogéneo de ecuaciones.
- El último proceso se coordina con el proceso de espacio nulo de una matriz en un proceso que permite reconocer el conjunto solución de un sistema homogéneo de ecuaciones como el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema.
- La coordinación de los procesos anteriores con el proceso de conjunto generador de un espacio vectorial resulta en un proceso que permite identificar al espacio nulo de la matriz del sistema de ecuaciones como un espacio generado correspondiente a cada valor propio y sus vectores propios asociados. La necesidad de comparar espacios generados por diferentes vectores propios permite la encapsulación del proceso de espacio generado en un objeto definido como espacio propio correspondiente a un valor propio de la matriz.
- Las acciones, procesos u objetos correspondientes a los valores, vectores y espacios propios se relacionan entre sí en un esquema que podría denominarse esquema de valores propios. Este esquema permite a los alumnos reconocer, en situaciones diversas, la pertinencia de los valores, vectores y espacios propios, así como la forma de encontrarlos.

Desarrollo general de la investigación

La instrucción se llevó a cabo con alumnos que cursaban la materia de Álgebra Lineal de la licenciatura en Economía en una universidad privada. La instrucción siguió el ciclo ACE antes descrito. Se repitió el trabajo de enseñanza e investigación durante cinco semestres (2011-2013). El número de alumnos varió por uno o dos alumnos y los resultados obtenidos fueron similares, por tal motivo se decidió presentar los resultados en términos del promedio de alumnos por semestre. En promedio los grupos estaban formados por 34 alumnos que trabajaron en un conjunto de actividades colaborativamente en pequeños equipos de tres y cuatro miembros. En cada ocasión que trabajaron las actividades tuvieron oportunidades de discutir y reflexionar sobre su trabajo. El trabajo en las actividades se discutió entre la maestra y el grupo completo. En esta discusión la maestra cuestionó, comparó y aclaró las opiniones y dudas y formalizó los conceptos incluidos en las actividades. Por último, la maestra dejó algunas actividades y ejercicios convencionales como tarea para reforzar el proceso de reflexión de acuerdo a la metodología de enseñanza de la teoría APOE.

Este ciclo se repitió hasta que se utilizaron todas las actividades correspondientes al tema. Mientras los alumnos trabajaban en equipo, la maestra los apoyó con preguntas pertinentes para estimular la reflexión sobre su trabajo y para ayudar a su progreso en la solución de las tareas incluidas en las actividades. Una de las investigadoras fue la maestra del curso, ya que se consideró que, en esta etapa de la investigación, otro maestro necesitaría de mucha preparación previa.

Todo el trabajo de los alumnos se recogió para ser analizado por las investigadoras en términos de las construcciones descritas en la descomposición genética. Además, la maestra llenó una bitácora después de cada clase en la que describió el trabajo de los alumnos, las dificultades encontradas, las ideas interesantes que surgieron del trabajo de los alumnos, etc. Esta bitácora fue analizada por las investigadoras. Los resultados del análisis fueron discutidos y negociados entre ellas.

Al finalizar con el trabajo de enseñanza de los conceptos de interés se realizó un examen parcial sobre el tema que incluyó siete preguntas con distintos niveles de complejidad y, al final del curso, se aplicó un examen final de cuatro preguntas relacionadas con valores, vectores y espacios propios. Algunas de estas preguntas fueron semejantes a las usadas en las actividades, otras consistieron en preguntas que requerían la realización de inferencias a partir del conocimiento construido. Se pidió a los alumnos que justificaran por escrito sus procedimientos y respuestas. Las preguntas de ambos exámenes fueron analizadas por las investigadoras en los mismos términos que el trabajo en clase y los resultados discutidos entre ellas.

Con base en el análisis de las preguntas del examen parcial se eligió a seis alumnos en cada semestre para hacer una entrevista semiestructurada con el fin de profundizar en el análisis de las construcciones involucradas en el aprendizaje de los conceptos de valor, vector y espacio propio. Los alumnos se eligieron considerando que en el trabajo previo hubieran mostrado distinto tipo de construcciones de acuerdo al análisis; dos alumnos con concepción acción, dos alumnos con concepción proceso y dos alumnos con concepción objeto o cercanos a la concepción objeto.

Diseño de actividades

Se diseñó un conjunto de actividades didácticas con el fin de apoyar a los alumnos en la construcción de los conceptos de interés a través de la promoción de las acciones, de oportunidades de reflexión e interiorización, así como de coordinación de diferentes procesos y de encapsulación de objetos referidos en la descomposición genética.

Se inicia con algunas actividades cuyo objetivo es construir una relación entre la interpretación algebraica y geométrica de los valores y vectores propios para que los alumnos reflexionen sobre el hecho de que la ecuación $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ implica que el producto $A\bar{v}$ es un vector paralelo a $\bar{v}$. El enfoque geométrico se trabajó en R^2 y más adelante fue generalizado a R^n.

Otras actividades se dirigieron a que el alumno hiciera las acciones para encontrar los valores, vectores y espacios propios de distintas matrices, así como para favorecer la interiorización de estas acciones en procesos. Se incluyeron además actividades destinadas a la coordinación de procesos y a la encapsulación de los objetos mencionados en la descomposición genética.

Durante la discusión en clase sobre las actividades, se brindó a los alumnos nuevas oportunidades de reflexión, de formalización de los conocimientos y se introdujeron las definiciones y teoremas correspondientes.

Es importante notar que aunque en este artículo se presentan únicamente algunos ejemplos de las actividades empleadas, los alumnos trabajaron en varias actividades semejantes a las que aquí se muestran, con datos diferentes, con el fin de brindarles oportunidades de reflexión sobre sus acciones y alentar la posibilidad de su interiorización en los procesos correspondientes. Algunos ejemplos de las actividades diseñadas, conjuntamente con su análisis en términos de la descomposición genética se presentan a continuación.

Un ejemplo de actividad en la que se busca que los alumnos hagan acciones específicas es el siguiente.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ *y los vectores* $\bar{v}_1 = (3, -2)$ *y* $\bar{v}_2 = (1, -2)$. *Encuentra y grafica* $A\bar{v}_1$ *y* $A\ \bar{v}_2$. *¿Qué obtienes como resultado? Dibuja en la gráfica* *los vectores* $\bar{v}_1$ *y* $\bar{v}_2$ *¿Qué observas? ¿Son estos vectores paralelos a* $A\bar{v}_1$ *y* $A\bar{v}_2$ *respectivamente? Cuando el producto,* $A\bar{v}$*, da como resultado un vector paralelo a* $\bar{v}$*, decimos que el vector* $\bar{v}$ *es un vector propio de la matriz A. ¿Son estos vectores propios de la matriz A?*

Se espera que los alumnos hagan la acción de multiplicar la matriz por el vector, $A\bar{v}$ y encuentren que el resultado es un vector que, en ocasiones, es paralelo al vector $\bar{v}$, $\lambda\bar{v}$. Esta acción y la reflexión sobre su resultado permiten reconocer que en el caso del vector $\bar{v}_2$, $A\bar{v}_2 = 4\bar{v}_2$, el nuevo vector es paralelo al primero y, por lo tanto, $\bar{v}_2$ es vector propio de A. En el caso de $\bar{v}_1$, los vectores resultantes no son paralelos, por lo que no se trata de un vector propio de A. Al hacer la gráfica se espera que los alumnos construyan el proceso correspondiente a la relación entre la interpretación algebraica y la geométrica.

La repetición de actividades como la anterior para diferentes matrices y la reflexión sobre los resultados obtenidos permiten la interiorización de las acciones realizadas en un proceso que da cuenta de cuándo un valor y un vector pueden considerarse como valor y vector propio de una matriz y la construcción de la coordinación de este proceso con el proceso de representación geométrica de estos conceptos.

Otro ejemplo de una actividad cuyo objetivo es la realización de acciones en el contexto de la representación gráfica relativas a los conceptos de valor y vector propios, es la que sigue:

En las siguientes gráficas, ¿$\bar{v}$ *es vector propio de la matriz A?*

Se espera que los alumnos hagan la acción de relacionar la dirección de los vectores resultantes del producto de la matriz por el vector y del escalar por el vector para reconocer que únicamente cuando estos vectores son paralelos, se satisface la igualdad entre ellos para alguna λ específica. En este caso, el vector $\bar{v}$ es un vector propio de la matriz A. Esta reflexión permite, nuevamente construir la relación entre la interpretación algebraica y la geométrica de los vectores propios.

En esta actividad se incluyeron varias gráficas similares (figura 1) para discriminar entre los casos en los que la igualdad se cumple de aquellos en los que no se cumple. La reflexión sobre estas actividades puede permitir la interiorización de estas acciones en un proceso que dé reconocimiento geométrico de los vectores y los valores propios. Además propicia la coordinación del proceso gráfico de definición de los vectores propios con el proceso algebraico correspondiente. También puede conducir a la interiorización de los procesos correspondientes a relaciones con distintos conceptos tratados previamente en

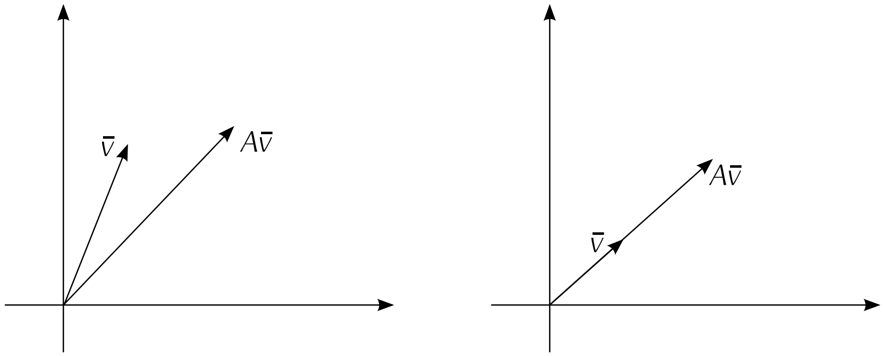


Figura 1

el curso como, por ejemplo, combinación lineal, dimensión o independencia lineal. La interpretación geométrica se trabajó en R^2 y después se generalizaron los conceptos a R^n.

La siguiente actividad muestra un ejemplo de aquellas que intentan promover la coordinación de distintos procesos construidos en nuevos procesos.

Encuentra los valores, vectores y espacios propios asociados a una matriz dada A.

Se espera que los alumnos coordinen el proceso de comparación $A\bar{v}$ y $\lambda\bar{v}$ con el de solución de un sistema homogéneo de ecuaciones en un nuevo proceso en el que se determinan las condiciones que permiten encontrar los valores y vectores propios a través del uso del determinante (el polinomio característico $p(\lambda)=|A-\lambda I|$). Se espera también que los alumnos coordinen el proceso de solución del sistema homogéneo correspondiente a cada valor propio con el proceso de encontrar los vectores propios correspondientes. Por último, se espera que algunos alumnos coordinen el proceso del conjunto solución para cada valor propio con el proceso de espacio generado por los vectores propios encontrados para construir el proceso de espacio propio.

La forma en que los alumnos abordan distintos problemas de esta naturaleza podría dar evidencia de que los alumnos han construido una concepción proceso o una concepción objeto de los conceptos de valor, vector y espacio propio. También podría dar evidencia de su posibilidad de coordinar las representaciones geométrica y algebraica y de la posibilidad de coordinar estos procesos con los construidos para otros conceptos del mismo curso.

Diseño de instrumentos

Se diseñó un cuestionario como instrumento para analizar las construcciones de los alumnos. Como se mencionó, esta investigación se realizó durante varios semestres, por lo que se eligieron distintas preguntas cada semestre para hacer un examen final y un parcial. Esto con la finalidad de que en los distintos semestres los exámenes no fueran iguales. El examen parcial se aplicó después de que los alumnos hicieran las actividades y se discutiera el tema en clase. El examen final se utilizó al terminar el curso. Ambos exámenes se analizaron por las dos investigadoras y los resultados se negociaron entre ellas.

Finalmente, se diseñó una entrevista semiestructurada cuya estructura fue similar a la del examen parcial. Incluyó, en cada semestre, las preguntas de los exámenes y otras diseñadas especialmente para la entrevista con el objetivo de aclarar y/o profundizar en las posibles construcciones mostradas por los alumnos y basadas justamente en esas respuestas. Estas preguntas se usaron a discreción de la entrevistadora dependiendo de la especificidad ofrecida por el alumno entrevistado en sus respuestas. La entrevista con cada alumno tuvo una duración aproximada de una hora. Se grabó y se guardaron todas las producciones de los alumnos. La información se analizó de manera similar a la descrita para el análisis de los exámenes.

A continuación se presentan algunas de las preguntas junto con su análisis en términos de la descomposición genética.

¿Cuántos valores propios distintos puede tener, cuando mucho, una matriz $A_{4\times 4}$?
En este caso los alumnos pueden ofrecer distintas respuestas. Algunos pueden considerar que el polinomio característico de una matriz $A_{4\times 4}$, es de cuarto grado, por lo que pueden concluir que tendrá cuatro raíces diferentes y por ello la matriz tendrá cuando mucho cuatro valores propios distintos. Estos alumnos mostrarán una concepción acción si se determina que responden de manera memorizada, o proceso si son capaces de ofrecer alguna explicación que refleje la posible interiorización del concepto de valor propio.

Otros alumnos pueden responder que si es posible asociar vectores propios linealmente independientes al mismo valor propio, y dado que éstos están en R^4, la matriz tendrá máximo cuatro vectores propios. Los alumnos que dan esta respuesta han construido la coordinación de los procesos de vectores y valores propios de la matriz A y la coordinación del proceso resultante con el proceso de espacio vectorial. Si muestran evidencia de poder determinar mediante acciones o procesos la independencia lineal de los vectores asociados al mismo valor propio muestran la encapsulación del proceso de valores y vectores propios en un objeto.

Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. *Sin hacer operaciones, demuestra que* $\lambda = -2$ *es valor propio.*

Los alumnos entienden que lo que se pide por “sin hacer operaciones” es que no resuelvan en papel el polinomio característico. Se espera que los alumnos muestren evidencia de haber construido un proceso para valores propios que puedan coordinar con el proceso de dependencia lineal de las columnas de la matriz $A - \lambda I$ correspondiente al valor propio dado. En este caso, muestran que pueden coordinar el proceso resultante con el determinante de un sistema homogéneo de ecuaciones, que será cero, por lo que el sistema asociado a la matriz tiene solución múltiple y responderán que $\lambda = -2$ es un valor propio de la matriz A. Aquellos alumnos que requieran hacer las operaciones explícitamente y resolver el polinomio característico darán evidencia de que han construido una concepción acción de valores propios.

Sin hacer cálculos encuentra un valor propio y dos vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. *¿Por qué se piden dos vectores propios?*

Se espera que los alumnos que hayan construido una concepción proceso, como en la pregunta anterior, consideren el hecho de que las columnas de la matriz son linealmente dependientes y asocien este hecho con el valor propio $\lambda = 0$. Al coordinar el proceso anterior con el de solución del sistema homogéneo, $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, podrán mostrar si han construido la solución de un sistema con dos grados de libertad y la coordinación del proceso solución con el de vectores propios. Se espera también que los alumnos con una concepción acción no puedan resolver esta actividad sin realizar explícitamente los cálculos.

Escribe una matriz que tenga como valor propio al cero, es decir, $\lambda = 0$.

Se espera que los alumnos que muestran una concepción acción no puedan contestar esta pregunta. Los alumnos con una concepción proceso pueden utilizar la coordinación entre el proceso correspondiente al conjunto solución de un sistema de ecuaciones y el relacionado con la dependencia lineal de las columnas de la matriz. Los alumnos que tienen una concepción objeto serán capaces de relacionar los distintos procesos relacionados con la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la definición del valor propio (columnas linealmente dependientes, determinante igual a cero, solución múltiple, matriz no invertible, etc.) para encontrar la matriz A que se pide.

RESULTADOS

Se presentan los resultados de esta investigación mediante evidencia del análisis del trabajo de los alumnos obtenida tanto de las actividades en clase, como de los instrumentos de investigación. La descripción de los resultados se centra en las diferencias registradas en los alumnos que mostraron distintas construcciones y en la explicación de las dificultades encontradas, todo ello en términos de la teoría APOE.

Como se mencionó, el trabajo se realizó durante varios semestres pero el trabajo en cada uno de ellos y los resultados fueron muy similares, por ello los resultados descritos en este artículo incluyen la información de todos ellos. Los números que se presentan corresponden al promedio de los alumnos por semestre.

Construcciones previas

La descomposición genética diseñada supone, como conceptos previos para la construcción, de los conceptos de valores, vectores y espacios propios, la construcción, entre otros, de los conceptos de conjunto, conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, espacio nulo de una matriz y conjunto generador de un espacio vectorial como procesos. Los resultados mostraron que tres alumnos en promedio cada semestre no los habían construido y que esto parecía ser responsable de sus dificultades en el aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios. Las dificultades de estos alumnos se manifestaron en distintos momentos durante la investigación, incluyendo la entrevista en la que se les presentaron preguntas en contextos distintos al de valores y vectores propios, pero en todos los casos, los resultados demostraron que, en el mejor de los casos, construyeron una concepción acción de los conceptos de interés.

Dos de estos alumnos mostraron no haber construido el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones como proceso. El otro no dio evidencia de haber construido los conceptos de conjunto generador y el espacio nulo de una matriz más allá de una concepción acción.

Por ejemplo, cuando se le pregunta a Rafael (Sem. 1-2012) que encuentre los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, encuentra el valor propio, $\lambda = 4$. Utiliza este valor propio para encontrar los vectores propios y resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$ (figura 2). Al obtener con este procedimiento la matriz cero concluye que la solución es el vector propio cero y comenta: *"dado que $\bar{v} = \bar{0}$ entonces $\lambda = 4$ no es valor propio"*. Se observa que Rafael no es capaz de interpretar la matriz aumentada del proceso de solución del sistema, lo que indica que no ha construido el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones como un proceso y que esto le impide relacionar dicha solución con el concepto de vector propio. Se observa que ha memorizado el procedimiento para encontrar los valores propios, pero que no ha comprendido este concepto, pues su interpretación errónea del sistema homogéneo le lleva a concluir que el valor propio que encontró no es realmente tal.

De sus respuestas a este, y otros problemas, se determinó que Rafael no ha construido siquiera una concepción acción de los conceptos de valor ni de vector propio de una matriz.

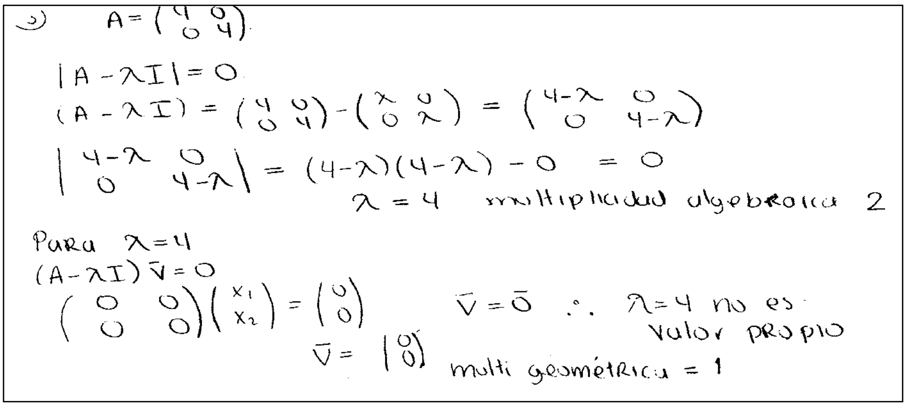


Figura 2

Cuando se le pregunta a Alberto (Sem. 2-2012) que encuentre los vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, encuentra, mediante un procedimiento memorizado, dos vectores, pero uno de ellos es el vector cero (figura 3). Construye un

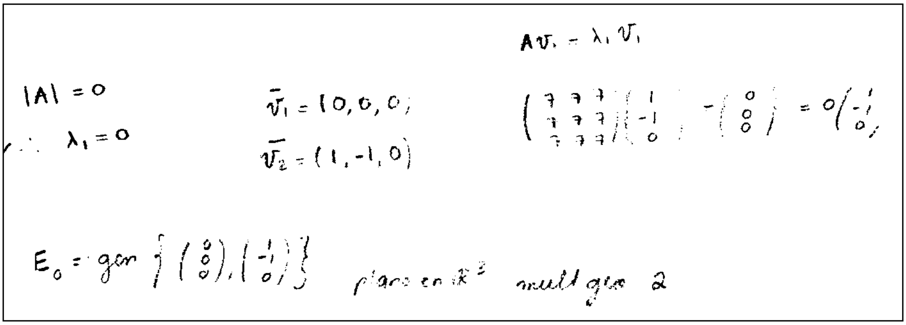


Figura 3

conjunto con estos vectores y concluye: *"son dos vectores, generan un plano"*. Al igual que Rafael, Alberto interpreta incorrectamente la solución del sistema de ecuaciones, no reflexiona sobre la imposibilidad de que el vector cero sea un vector propio asociado a la matriz *A*, y muestra claramente que no ha construido el concepto de espacio generado pues responde de memoria, sin considerar que su respuesta sea compatible con el conjunto generador que ha encontrado.

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que los alumnos que no han construido los conceptos previos no pueden hacer casi ninguna construcción prevista en la descomposición genética. La interpretación del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales resulta indispensable en la construcción del concepto de vector propio, por lo que muestran cuando mucho una concepción acción de dicho concepto. La construcción del concepto de conjunto generador resulta además indispensable en la construcción del espacio propio de una matriz como un proceso.

Alumnos que muestran una concepción acción de valores, vectores y espacios propios

Los alumnos que muestran este tipo de concepción reconocen que si $A\bar{v} \parallel \bar{v}$ entonces $\bar{v}$ es vector propio de A y si $A\bar{v} \nparallel \bar{v}$ entonces no es vector propio de A. Conocen las acciones a realizar para encontrar valores, vectores y espacios propios pero las realizan siguiendo un procedimiento memorizado. Reconocen los valores y vectores propios en forma geométrica y algebraica; sin embargo, la no interiorización de sus acciones, particularmente aquellas que se refieren al uso memorizado del procedimiento de búsqueda de los valores y vectores propios, se manifiesta de diferentes maneras. Por ejemplo: consideran que el vector cero puede ser un vector propio de una matriz; cuando cometen un error no lo reconocen aun en casos en que obtienen resultados contradictorios; son incapaces de reconocer si un valor o un vector dado son valores o vectores propios de una matriz sin recurrir a la solución de la ecuación característica; no relacionan el máximo número de vectores propios con el tamaño de una matriz; no establecen relaciones con otros conceptos del Álgebra Lineal como el espacio nulo, la independencia lineal de las columnas de la matriz A y tienen dificultades al encontrar el espacio propio correspondiente a un valor propio.

Un resultado interesante durante la entrevista fue notar que algunos alumnos de este grupo no recordaban la definición algebraica de los vectores propios, pero pudieron reconocerlos en la representación gráfica, lo cual les ayudó a reformular la definición de valores y vectores propios verbalmente. Al parecer, estos alumnos han construido una relación entre los procesos correspondientes a la interpretación algebraica y geométrica, pero se considera que muestran una concepción acción pues, aunque esta respuesta pareciera evidenciar una concepción proceso de valores propios, en sus demás respuestas no son capaces de utilizar estos conceptos más que de manera memorizada.

A continuación se presentan las respuestas de algunos alumnos que muestran una concepción acción y que ilustran claramente algunas de las dificultades antes mencionadas.

Cuando se pide a Silvia (Sem. 2-2011) que encuentre los valores, vectores y espacios propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, hace las acciones necesarias para encontrar los valores y los vectores propios, pero al utilizar acciones memorizadas, no reconoce su error ni se percata de que el vector cero no puede ser un

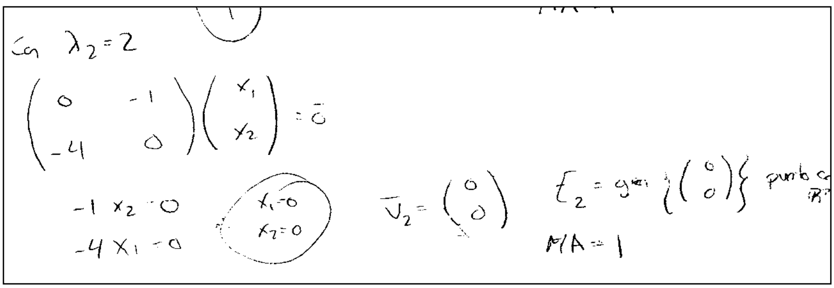


Figura 4

vector propio de una matriz. Explica: *"Como el vector propio es el vector cero no genera nada y se queda en el mismo punto"* (figura 4).

Por su parte, Pedro (Sem. 2-2012) dibuja la gráfica de los vectores $\bar{v}$ y $A\bar{v}$ (figura 5). Aclara que $\bar{v}$ es vector propio, encuentra el valor propio correspondiente y a partir de ahí escribe la definición de valor y vector propio que no había recordado anteriormente, utiliza las letras q y λ para el valor propio y explica: *"$\bar{v}$ es vector propio de la matriz A si $q\bar{v} = A\bar{v}$".*

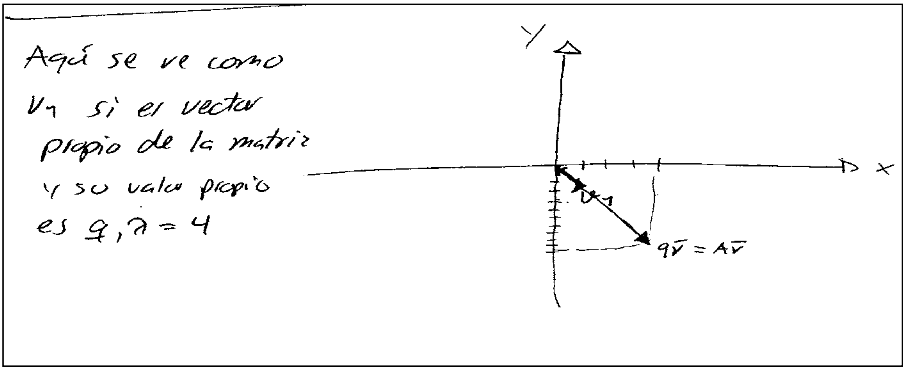


Figura 5

Al preguntarle sobre el número de vectores propios que una matriz dada puede tener, sin resolver la ecuación característica, Gloria (Sem. 2-2012) muestra incertidumbre y responde: *"No sé, ... sin hacer el determinante, no... pero el tamaño de la matriz no tiene relación con el número de valores propios".* Más adelante, al enfrentar en la entrevista una matriz con columnas linealmente dependientes, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ responde incorrectamente y sin reflexionar *"no es posible encontrar el valor propio"* y más adelante *"el valor propio es uno con multiplicidad geométrica tres, porque los vectores tienen tres componentes y, además, puedo dar los vectores que quiera y generan un plano".*

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 16 \end{pmatrix}$ cuyas columnas son linealmente dependientes, Ricardo (Sem. 1-2013) no puede encontrar un valor propio sin hacer las acciones que corresponden a los cálculos para hallarlos y explica: *"...es dos* *porque es el número que multiplica a las columnas de A".* Ante la pregunta en la entrevista en que se pedía que encontraran una matriz que tuviera como un valor propio al cero, es decir $\lambda = 0$, Ricardo, como la mayoría de los alumnos que tienen una concepción acción, no responde de inicio, pero después propone una matriz cualquiera y utiliza únicamente acciones memorizadas para encontrar los valores propios, al proponer varias matrices (tres en este caso) y no encontrar un valor propio igual a cero comenta: *"No sale... es muy difícil atinarle a una matriz para que salga el cero".*

En conclusión, en los diferentes semestres se registró un promedio de siete alumnos que mostraron una concepción acción; es decir, que siguen procedimientos memorizados y no muestran más que en algunas respuestas esporádicas, la interiorización de estas acciones en algún proceso.

Alumnos que muestran una concepción proceso de valores, vectores y espacios propios

Todos los alumnos con una concepción proceso mostraron evidencia de haber construido los conceptos previos requeridos y distintas evidencias de haber interiorizado las acciones en los procesos descritos en la descomposición genética. No solamente resuelven un mayor número de preguntas, sino que sus explicaciones muestran que son capaces de explicar y generalizar sus procedimientos, además de encontrar las condiciones que deben cumplirse para que un valor y un vector sean efectivamente tales para una matriz dada.

En particular, todos ellos reconocen de forma inmediata el paralelismo de los vectores $A\bar{v}$ y $\bar{v}$ para cualquier espacio R^n, sin necesidad de hacer cálculos, lo que muestra claramente interiorización de acciones; en los casos en que los vectores están en R^2 o R^3 algunos de estos alumnos dibujan los vectores para ejemplificar su paralelismo y reconocen que el valor propio es un escalar que cambia la magnitud y posiblemente la dirección del vector $\bar{v}$ mostrando coordinación entre los procesos correspondientes a la interpretación gráfica y analítica de los conceptos en estudio. Todos estos alumnos son capaces de explicar el producto de una matriz por un vector como la transformación de un vector en uno paralelo a sí mismo e identifican el signo del valor propio con la dirección del vector resultante lo que demuestra la coordinación de los procesos involucrados en la definición de los valores y vectores propios. Estos alumnos coordinan el proceso solución del sistema homogéneo asociado a la búsqueda de los valores y vectores propios con el proceso de encontrar el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema; relacionan los conceptos de valor y vector propio con otros conceptos del curso, mostrando así la construcción de coordinaciones entre distintos procesos descritos en la descomposición genética.

A pesar de haber interiorizado los procesos de identificación y búsqueda de valores propios, estos alumnos tienen dificultades al enfrentar problemas que incluyen una matriz *A* con componentes reales que tiene como valores propios números complejos y muestran evidencias de que no necesariamente han construido un proceso relacionado a la noción de espacio propio. Muchos de ellos muestran dificultades para encontrar o interpretar el espacio generado por los vectores propios asociados a un valor propio cuando la multiplicidad algebraica del valor propio es mayor que uno, tanto en el caso en que se le asocia únicamente un vector propio como en el caso en que se le asocian dos o más vectores propios. En estos casos recurren a respuestas memorizadas, como por ejemplo, que un solo vector genera una recta y dos vectores un plano, mostrando que no han interiorizado las acciones asociadas al concepto de espacio propio en procesos.

A continuación se presentan ejemplos de respuestas de los alumnos que ilustran estas construcciones y las dificultades encontradas.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ y el vector $\bar{v}_1 = (1, -2)$, Arturo (Sem. 2-2013) aclara: "$\bar{v}_1$ *es un vector propio de la matriz porque los vectores* $A\bar{v}_1$ y $\bar{v}_1$ *son paralelos, además, el valor propio hace más grande el vector* $\bar{v}_1$ *por 4 veces*". Posteriormente escribe su respuesta y dibuja los dos vectores a los que se refiere (figura 6).

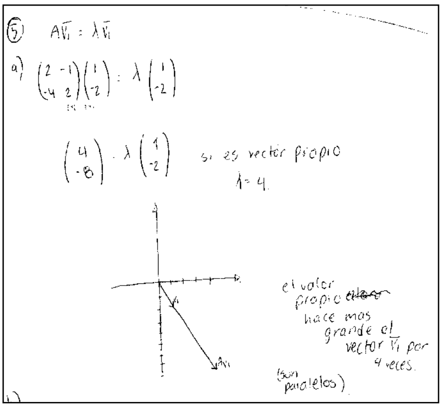


Figura 6

Ante un problema, similar, Paula (Sem. 1-2013) afirma: *"Sí es un vector propio y corresponde a* $\lambda = 4$*, los vectores que se obtienen son paralelos, son linealmente dependientes. En este caso el vector* $A\bar{v}$ *es cuatro veces más grande que el vector* $\bar{v}$*"*. Más adelante añade: *"*λ *es un escalar que hace más grande al vector* $\bar{v}$*, pero lo deja en la misma dirección. Estos vectores son linealmente dependientes, son múltiplos y son combinación lineal"*, refiriéndose a que el vector $A\bar{v}$ puede escribirse como múltiplo de $\bar{v}$. Mientras que, en el caso del otro vector dado, $\bar{v} = (2, -3)$, explica: "*No es vector propio, no son paralelos y son linealmente independientes*", refiriéndose a los vectores $A\bar{v}$ y $\bar{v}$. También hace una gráfica para enfatizar su conclusión (figura 7). Sus respuestas dan evidencia de la interiorización de las acciones necesarias para determinar cuándo un vector es o no un vector propio de una matriz y las acciones correspondientes a la relación entre la representación algebraica y geométrica de los valores y los vectores propios de una matriz. Además, de que ha construido la coordinación de estos procesos con los de otros temas del curso y con el proceso correspondiente al espacio nulo de una matriz: "*Cuando encontramos los vectores propios estamos resolviendo el sistema homogéneo* $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$*, o sea, el espacio nulo de la matriz* $(A - \lambda I)$*"*. Más adelante, refiriéndose a dicha matriz, $(A - \lambda I)$, comenta: *"Además, sé que un valor propio es cero cuando las columnas de esta matriz son linealmente dependientes. También... si su determinante es cero es cuando* λ *es un valor propio"*.

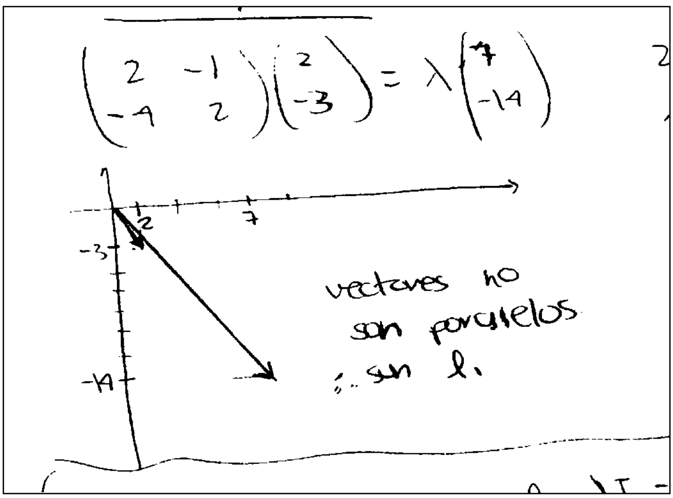


Figura 7

El trabajo de Ernesto (Sem. 1-2013) muestra la forma en que estos alumnos son capaces de relacionar los conceptos de vector y valor propio de una matriz con otros conceptos del curso. Al pedirle que encontrara una matriz que tuviera al cero como valor propio responde: "*Si el valor propio es cero, al usarlo en el determinante de la ecuación característica, debe ser igual a cero. El determinante se reduce al determinante de la matriz A igual a cero... eso te dice que la matriz no es invertible, o sea, si uso el 'teorema resumen' la matriz tiene columnas linealmente dependientes, así que cualquier matriz que cumpla esto tendrá un valor propio cero*".

El trabajo de Ernesto muestra también las dificultades encontradas por este grupo de alumnos. Durante la entrevista explica: "*Los valores propios de esta matriz pertenecen a los complejos, son conjugados...los vectores propios también tienen componentes complejas...pero no sé cómo resolver el sistema cuando tengo números imaginarios... y me cuesta trabajo imaginarme cómo son...*". Ernesto pone en evidencia cómo estos alumnos generalizan sin problema la definición a esta situación, pero tienen dificultades con las acciones correspondientes al trabajo con números complejos, probablemente porque que han tenido muy poco contacto con el álgebra de este tipo de números.

El trabajo de Laura (Sem. 2-2011) en la entrevista nos permite ilustrar las dificultades de estos alumnos en la construcción del concepto de espacio propio.

Laura encuentra sin problema los valores y vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, incluyendo su multiplicidad algebraica (figura 8). Al comentar su trabajo explica

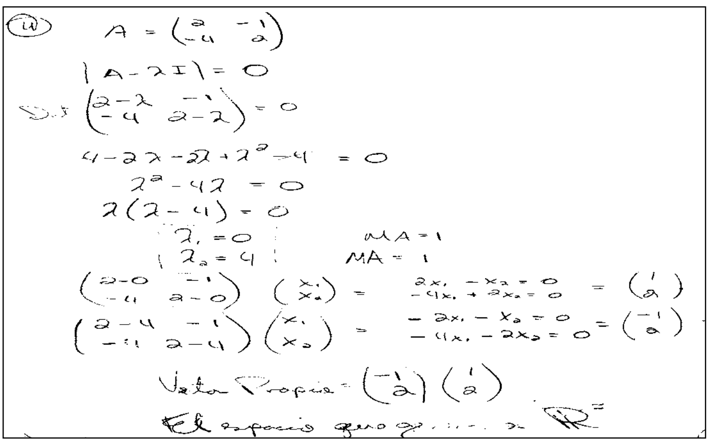


Figura 8

claramente que cada valor propio tiene su vector propio asociado, sin embargo, al buscar el espacio propio considera que es el espacio generado por los vectores propios correspondientes a los distintos valores propios. Dice: *"El espacio propio es generado por todos los vectores propios encontrados. Tengo dos vectores en R^2, por lo tanto genera R^2"* mostrando una concepción acción de espacios propios.

Durante su trabajo en clase Andrea (Sem. 1-2012) afirma: *"...a cada valor propio le corresponde un vector propio siempre"* y escribe su respuesta a la pregunta que relaciona el número de valores propios con el tamaño de una matriz, en este caso $A_{4\times 4}$ (figura 9).

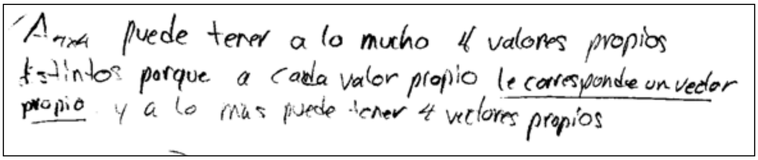


Figura 9

Por su parte, al considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, Julio (Sem. 2-2013) concluye: "$\lambda = 0$ *porque las columnas de la matriz son linealmente dependientes*" y al escribirlo lo justifica como un "*enunciado del 'teorema resumen' del Álgebra Lineal*" (figura 10). Julio no ha construido la coordinación del proceso de solución del sistema asociado a la definición de los valores y vectores propios con el correspondiente al número de vectores propios asociados que da como resul-

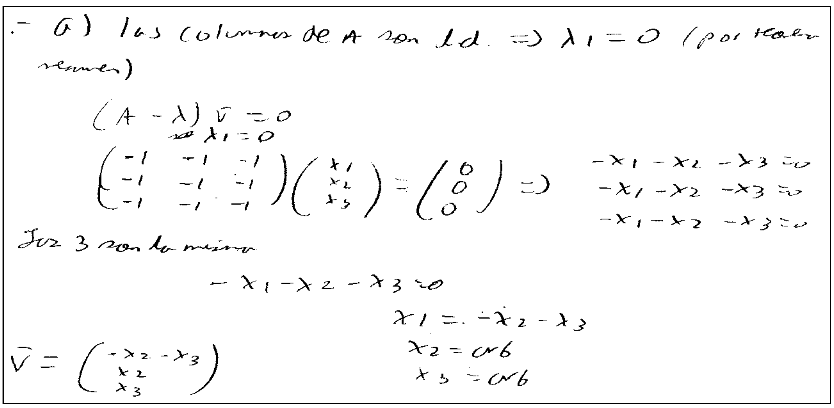


Figura 10

tado el proceso de espacio propio. Comenta: *"...para este valor propio tengo dos variables arbitrarias, ¿doy dos valores?"* Escribe el conjunto solución en términos de la combinación lineal de dos vectores, pero no puede encontrar el espacio propio correspondiente porque se le presenta una confusión: "*Dos vectores generan un plano, pero cada valor propio tiene un vector propio, una familia... no me equivoqué, pero no sé cómo explicar esto*".

En promedio, en cada uno de los diferentes semestres hubo veintiún alumnos que mostraron una concepción proceso, lo que evidencia la efectividad de la secuencia didáctica utilizada.

Alumnos que muestran una concepción objeto de valores, vectores y espacios propios

En cada semestre se encontró, en promedio, tres alumnos que mostraron haber construido una concepción objeto de los conceptos en estudio. Estos alumnos evidencian todas las construcciones mencionadas para los alumnos cuya concepción es proceso. Además, son capaces de trabajar con los valores, vectores y espacios propios como una entidad, independientemente de que los valores propios sean reales o complejos; pueden identificar la necesidad de usar vectores propios en las aplicaciones y explican con claridad las propiedades de los vectores propios, por ejemplo, su relación con la posibilidad de diagonalizar una matriz y con la definición de matrices semejantes. Todo ello muestra que han encapsulado los procesos de valor y vector propio en objetos. La encapsulación del concepto de espacio propio se pone en evidencia cuando estos alumnos pueden hacer acciones sobre el espacio propio, por ejemplo para comparar espacios propios correspondientes a distintos valores propios y para determinar sus propiedades, como por ejemplo, su dimensión. Algunos ejemplos permiten ilustrar las construcciones antes mencionadas.

En el trabajo de Ángel (Sem. 1-2013) con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (figura 11) es posible observar que indica que los vectores y espacios propios corresponden a un valor propio y encuentra la multiplicidad geométrica. Describe claramente el espacio propio asociado a cada valor propio. Más adelante, cuando explica su trabajo comenta: *"Al sustituir los valores propios en el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$ estamos resolviendo el espacio nulo. La solución será múltiple porque $\bar{v} \neq \bar{0}$. Cada valor propio tiene sus vectores y espacio propio asociados"*.

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad [(2-\lambda)(2-\lambda)] - 4 = 0$

$4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda = 0$ Polinomio característico

$\lambda(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad ma = 1$

$\lambda_2 = 4 \quad ma = 1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\quad 2x_1 - x_2 = 0$, $\quad 2x_1 = x_2$, $\quad x_1 = \frac{1}{2} x_2$, $\quad x_2 = arb$ $\qquad x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 0$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$E_0 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad mg = 1$

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $\quad -2x_1 - x_2 = 0$, $\quad 2x_1 = -x_2$, $\quad x_1 = -\frac{1}{2} x_2$, $\quad x_2 = arb$ $\qquad x_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

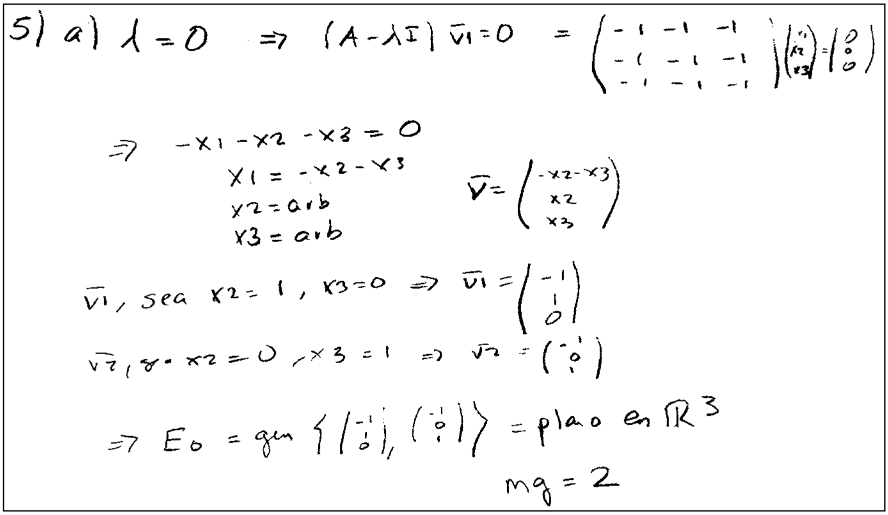
Vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 4$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E_4 = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad mg = 1$

Figura 11

Posteriormente aclara: "*E_0 es una línea recta que pasa por el origen y va en la dirección del vector (1, 2), su dimensión es uno. El espacio propio generado por el valor propio 4 es también una línea recta, pasa por el origen, pero su dirección está dada por el vector* (–1, 2). *Si pienso en las líneas rectas que representan a los espacios propios, son líneas que pasan por el origen pero cruzan por distintos cuadrantes*".

Al igual que Ángel, Claudia (Sem. 2-2013) responde sin problemas todo lo que se le pregunta dando explicaciones muy claras y coherentes. En el caso de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ a la que nos hemos referido antes, encuentra el valor propio $\lambda = 0$, los vectores propios y el espacio propio asociados a dicho valor propio (figura 12).



5) a) $\lambda = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\,\bar{v}_1 = 0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$x_1 = -x_2 - x_3$

$x_2 = \text{arb}$

$x_3 = \text{arb}$

$\bar{V} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_1$, sea $x_2 = 1$, $x_3 = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_2$, s. $x_2 = 0$, $x_3 = 1 \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_0 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{plano en } \mathbb{R}^3$

$mg = 2$

Figura 12

Al considerar el número de valores propios que puede tener una matriz responde: “...*cuando mucho n si la multiplicidad algebraica de todos es uno, cuando es mayor que uno disminuye el número de valores propios pero no necesariamente el de los vectores propios asociados a ellos, porque si la multiplicidad geométrica es mayor que uno pueden generar un espacio propio de dimensión más grande, un plano o un hiperplano u otro espacio*”.

Al trabajar con una matriz $A_{2\times 2}$, que tiene valores propios complejos, afirma: “...*los valores propios son uno conjugado del otro, son complejos* $\lambda = i$ *y* $\lambda = -i$. *Los vectores propios... encontramos el espacio nulo de la matriz* $A - \lambda I$, *son el* $(1, -i)$ *y el* $(1, i)$. *Los valores propios se pueden representar en un plano que tiene en el eje horizontal la parte real y en el vertical la imaginaria pero ya con los vectores propios no me lo puedo imaginar gráficamente... Creo que eso no lo vimos*”.

Cuando se le pide encontrar una matriz que tenga como valor propio al cero, $\lambda = 0$, es capaz de relacionar la dependencia lineal de las columnas de la matriz $(A - \lambda I)$ con la posibilidad de que la matriz A tenga un valor propio igual a cero: “...*la matriz* $A - \lambda I$ *debe tener determinante igual a cero, por eso tiene solución múltiple y no tiene inversa. Si no fuera así tendría que tener un vector propio que fuera cero y eso no se puede... Bueno, pues por el ‘teorema resumen’ cualquier matriz que tenga columnas ld cumple con que tiene una* $\lambda = 0$” y da un ejemplo de una matriz $A_{5\times 5}$ que tiene columnas que son todas múltiplo de la primera.

En conclusión, la estrategia didáctica seguida permitió que, en promedio, cada semestre tres alumnos construyeran una concepción objeto de los conceptos de valor, vector y espacio propio, lo cual proporciona, nuevamente evidencia de que la estrategia didáctica resultó efectiva en cada uno de los semestres investigados en este estudio. Además, estos alumnos parecen haber construido relaciones entre estos conceptos y otros conceptos del curso, es decir muestran haber construido un esquema coherente para los conceptos de interés, dado que reconocen aquellos problemas en los que son pertinentes, como por ejemplo los procesos de Markov. La construcción del esquema no se estudió a profundidad en esta investigación por lo que no es posible profundizar en este aspecto del aprendizaje.

DISCUSIÓN

En esta investigación se puso de manifiesto que la construcción de los conceptos previos considerados en la descomposición genética es indispensable en un aprendizaje de los conceptos de valores, vectores y espacios propios que vaya más allá de la memorización de los algoritmos involucrados en su cálculo. Un aprendizaje de tipo acción de los sistemas de ecuaciones y de su conjunto solución, además de las nociones de conjunto generador y espacio generado inhibe la interiorización de las acciones necesarias en la construcción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios. Si bien en la experiencia que aquí se reporta, los alumnos con esta dificultad fueron pocos, esta contribución es importante de tomar en consideración en los cursos de Álgebra Lineal.

Los datos de este estudio, como se hace notar en el análisis de resultados, muestran evidencias de las construcciones propuestas en la descomposición genética. Esto permite, por una parte validarla y por otra considerarla como un buen modelo para predecir las construcciones necesarias para el aprendizaje de estos conceptos. De esta manera, la descomposición genética propuesta puede ser empleada por otros investigadores y también por profesores en la planeación didáctica de actividades relacionadas con estos importantes conceptos.

El concepto que presentó mayor dificultad a los alumnos fue el de espacio propio, en particular en el caso en que la multiplicidad geométrica era mayor a uno. Esta dificultad puede explicarse por la posible falta de coordinación del espacio nulo de la matriz $(A - \lambda I)$ con el proceso de espacio generado por los vectores propios asociados a un valor propio; aunque es necesario hacer más investigación al respecto.

Las construcciones anteriores parecen ser indispensables en la construcción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios. Con ello se da respuesta a la primera pregunta de investigación planteada en este estudio.

En cuanto al diseño didáctico, la evolución de los alumnos en la parte del curso relacionada con la enseñanza de los valores, vectores y espacios propios siguiendo el ciclo de enseñanza de la teoría APOE y utilizando actividades diseñadas con base en la descomposición genética propuesta mostró ser satisfactoria. Las consideraciones siguientes permiten avalar esta aseveración y permiten dar respuesta a la segunda pregunta de investigación.

La literatura concerniente al aprendizaje de las matemáticas avanzadas en general, y del Álgebra Lineal en particular, señala que la construcción de una concepción objeto es difícil de lograr en el tiempo destinado a un curso universitario (Asiala *et al.*, 1998; Arnon *et al.*, 2014; Clark *et al.*, 2007; Trigueros y Martínez-Planell, 2010; Sfard, 1991). En el caso del curso que se reporta se encontraron, en promedio, al menos tres alumnos, que construyeron una concepción objeto de los conceptos de interés y que una mayoría de los alumnos construyó una concepción proceso. Estos resultados ponen de manifiesto que es posible superar las dificultades mencionadas en la literatura en relación al aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios.

La poca investigación reportada respecto al aprendizaje de los conceptos de interés en esta investigación, señala la dificultad de los alumnos de relacionar su representación geométrica con la algebraica (Stewart y Thomas, 2007; Gol, 2012). Una aportación del diseño teórico y didáctico utilizado en esta investigación consiste en lograr que la mayoría de los alumnos en los distintos semestres no mostraran esta dificultad. Ello como resultado del diseño de actividades que les permitieron construir esa relación y trabajar flexiblemente con ambas representaciones en la solución de los problemas planteados en los instrumentos de investigación.

Otro logro del diseño didáctico de esta investigación consiste en que las actividades diseñadas permitieron a todos los alumnos reconocer que, en la definición de los valores y vectores propios, ambos lados de la ecuación, $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$, representan un vector. Con esto se logró superar la dificultad reportada en la literatura (Stewart y Thomas 2007).

Es importante mencionar que los conceptos de valores, vectores y espacios propios han sido estudiados únicamente en el caso en que los valores propios son reales y los vectores propios se encuentran en un espacio vectorial real. En este estudio se avanza la investigación al considerar el problema de la construcción de estos conceptos de manera global, por lo que se incluyó en la enseñanza el caso de los valores, vectores y espacios propios complejos. En este ámbito se encontró que los alumnos desconocen el álgebra con números complejos, por lo que se considera que es necesario diseñar actividades en este sentido que preparen a los alumnos al trabajo con este tipo de valores, vectores y espacios propios.

CONCLUSIÓN

Los conceptos de valores, vectores y espacios propios asociados a una matriz son considerados por profesores y por investigadores entre los más abstractos del Álgebra Lineal (Larson *et al.*, 2007; Sierpinska, 2000; Possani *et al.*, 2010). Al mismo tiempo se consideran muy relevantes por sus múltiples aplicaciones y por ello se incluyen en casi todos los planes de estudio. Por su parte, los alumnos presentan muchas dificultades y su aprendizaje, además de ser superficial, suele restringirse al uso de algoritmos memorizados (Thomas y Stewart, 2011). Los resultados de esta investigación proporcionan evidencias que muestran que cuando se diseña una estrategia didáctica basada en una teoría de la Educación Matemática, es posible superar las dificultades encontradas en otras investigaciones y se discute, además, cuáles son las causas de algunas de las dificultades encontradas. Los resultados permiten concluir que sí es posible diseñar una estrategia didáctica en la que se favorezcan las construcciones necesarias en el aprendizaje de estos conceptos mediante actividades diseñadas con la teoría APOE.

Los datos de este trabajo ponen de manifiesto que la descomposición genética propuesta mostró ser un modelo válido para predecir y describir las construcciones necesarias para el aprendizaje de los conceptos de valores, vectores y espacios propios. Con ello se da respuesta a la primera pregunta de investigación al explicitar las construcciones que se consideran necesarias para el aprendizaje de los conceptos estudiados.

Esta investigación pone de manifiesto, además, que mediante un modelo basado en la teoría APOE de la construcción de estos conceptos y el diseño de actividades a partir de él es posible lograr que los alumnos profundicen en la definición y el significado de los valores, vectores y espacios propios. Esto responde de manera afirmativa a la segunda pregunta de investigación pues el trabajo en las actividades favoreció la aparición de las construcciones necesarias para el aprendizaje de los conceptos estudiados. Además, los alumnos fueron capaces de relacionar estos conceptos con otros del Álgebra Lineal tales como matriz inversa, independencia lineal o espacio nulo de una matriz. La mayor parte de los alumnos participantes en esta experiencia no presentaron las dificultades reportadas en la literatura sobre el aprendizaje de estos conceptos, aunque sí las tuvieron cuando los valores propios son números complejos. Si bien se considera que este problema no invalida la descomposición genética, sí concluimos que es necesario trabajar más ampliamente en este caso y preparar a los alumnos mediante trabajo previo con el álgebra de los números complejos.

Las construcciones previas señaladas en la descomposición genética aparecieron en esta investigación como indispensables en la construcción de los conceptos estudiados en ella. Este resultado alerta a los profesores a comenzar la enseñanza de este tema del Álgebra Lineal brindando oportunidades a los alumnos para que los construyan.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura, A.C., el Instituto Tecnológico Autónomo de México y el Proyecto FONDECYT núm. 1140801, Chile.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa Fuentes, M. Trigueros y K. Weller (2014), *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*, Nueva York, Springer.

Asiala, M., A. Brown, J. Kleiman, y D. Mathews (1998), "The development of students' understanding of permutations and symmetries", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 3, núm. 13-43.

Clark, J., G. Kraut, D. Mathews y J. Wimbish (2007), "The 'Fundamental Theorem' of statistics: Classifying student understanding of basic statistical concepts". Recuperado el 22 de noviembre de 2014 de http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stat2c.pdf

Gol, S. (2012), "Dynamic geometric representation of eigenvector", en S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (eds.), *Proceedings of the 15th Annual*

Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Portland, Oregon, pp. 53-58.

Larson, C., C. Rasmussen, M. Zandieh, M. Smith y J. Nelipovich (2007), "Modeling perspectives in linear algebra: a look at eigen-thinking". Recuperado el 4 de marzo del 2014 de http://www.rume.org/crume2007/papers/larson-rasmussen-zandieh-smith-nelipovich.pdf.

Possani, E., M. Trigueros, G. Preciado y M.D. Lozano (2010), "Use of models in the Teaching of Linear Algebra", *Linear Algebra and its Applications*, vol. 432, núm. 8, pp. 2125-2140.

Sierpinska, A. (2000), "On some aspects of students' thinking in Linear Algebra", en J. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 209-246.

Sfard, A. (1991), "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects on different sides of the same coin", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, núm. 1, febrero, pp. 1-36.

Stewart, S. y M.O.J. Thomas (2007), "Eigenvalues and eigenvectors: Formal, symbolic, and embodied thinking", *The 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education,* San Diego, pp. 275-296.

Thomas, M.O.J. y S. Stewart (2011), "Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic and formal thinking", *Mathematics Education Research Journal*, vol. 23, núm. 3, septiembre, pp. 275-296.

Trigueros, M y R. Martínez-Planell (2010), "Geometrical representations in the learning of two-variable functions", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 73, núm. 1, pp. 3-19.

DATOS DE LAS AUTORAS

Hilda Salgado
Instituto Tecnológico Autónomo de México
famysusi@prodigy.net.mx

María Trigueros
Instituto Tecnológico Autónomo de México
mtrigueros@gmail.com