Desafíos para poner en marcha procesos de prueba

Silvia Bernardis y Susana Moriena

Resumen: El objetivo de este artículo es presentar una propuesta para iniciar a los alumnos en las demostraciones geométricas. Para trabajar con los estudiantes en un ambiente de geometría dinámica, describimos una serie de tareas en torno a un problema. Seguimos, para ello, las orientaciones del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. La secuencia está propuesta para estudiantes de los últimos años del nivel secundario (15 a 17 años) y del primer año del nivel superior. Creemos importante aclarar que en nuestro país, la finalización del nivel secundario habilita el inicio del nivel superior. Pensamos que este trabajo previo debería utilizarse para introducir la demostración, herramienta de descubrimiento o de explicación, como una actividad significativa para nuestros alumnos en este nivel educativo.

Palabras clave: exploración, conjetura, explicación, comunicación, prueba.

Challenges to start of proof processes

Abstract: The aim of this article is to present a proposal to introduce students in geometrical demonstrations. We describe a number of tasks around a problem, to work with students in an environment of dynamic geometry. To do this we follow the guidance model of Van Hiele geometric reasoning. The sequence is given to students in their final years of secondary school (15-17 years) and the first year of upper level. Thought this previous work, taking into account other functions of proof as a tool of discovery or explanation, should be used to introduce the show as a meaningful activity for our students in this grade level.

Keywords: exploration, conjecture, explanation, communication, proof.

Fecha de recepción: 9 de febrero de 2014; fecha de aceptación: 1 de noviembre de 2014.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este artículo es presentar una propuesta de enseñanza para iniciar a los alumnos en las demostraciones geométricas. Está destinada a estudiantes de los últimos años del nivel secundario (15 a 17 años) y del primer año del nivel superior. Cabe aclarar que en nuestro país el nivel superior es una continuación del nivel secundario. Las tareas se basan en la exploración e investigación a partir de las posibilidades que ofrece la *geometría dinámica*. La aparición de este recurso ha producido una revolución en la enseñanza de la geometría, a punto tal que resulta interesante plantear la exigencia de un cambio en las tareas que habitualmente se proponen. La geometría dinámica permite:

- Desarrollar habilidades de visualización.
- Explorar experimentalmente las construcciones.
- Modificar continuamente las construcciones y realizar el control de los desplazamientos o las deformaciones.
- Obtener fácil y casi inmediatamente numerosos ejemplos con una sola figura y verificar qué propiedades geométricas permanecen invariantes.

En el siguiente cuadro señalamos algunas cuestiones que necesitamos modificar en la enseñanza tradicional.

¿Qué hacemos los docentes?	¿Qué debemos hacer?
Creamos dudas en la mente de los estudiantes acerca de la validez de sus observaciones empíricas.	Crear la necesidad de *formular sus conjeturas* e investigarlas a fondo a través de la variación continua de las construcciones realizadas con un *software* de geometría dinámica.
Creamos la necesidad de demostrar las propiedades para que todos los casos estén contemplados, dado que el dibujo es uno particular.	Crear la necesidad de *explicar,* a través de las propiedades conocidas, la validez de una propiedad comprobada explorando experimentalmente las construcciones.
Trabajamos unilateralmente la *demostración* como herramienta de *verificación* en geometría.	Trabajar la demostración como *herramienta de descubrimiento* y de *explicación* (De Villiers, 1996).

ENCUADRE TEÓRICO

Uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría en los niveles preuniversitarios y universitarios es que el alumno aprenda a validar sus conjeturas a través de una demostración. Para alcanzarlo, es preciso enseñarle que no todo lo que se visualiza en el dibujo es verdadero. Por ejemplo podemos suponer del dibujo que dos rectas son perpendiculares pero al desplazar puede observarse que esta propiedad no se mantiene. En este sentido, Balacheff (2000a) menciona dos obstáculos respecto de las demostraciones geométricas:

- La evidencia de los hechos que se impone a la razón: los alumnos no experimentan la necesidad de demostrar, ya que las figuras son evidencia de la demostración.
- La enseñanza en matemática despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Por ejemplo, cuando el problema planteado se presenta de la forma "mostrar que…", el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que se está por descubrir es una demostración.

El primer obstáculo puede manifestarse más notoriamente cuando se utiliza un *software* de geometría dinámica en la enseñanza. "Una propiedad geométrica es un invariante perceptual. Esta evidencia perceptual es tan fuerte que incluso puede hacer que los estudiantes no lleguen a entender por qué es necesario demostrar una propiedad. Hasta cierto punto, la eficiencia del *software* ha eliminado la necesidad de la demostración" (Balacheff, 2000b, p. 95). Para sortear el obstáculo, es importante crear en nuestros alumnos la necesidad de explicar la verdad comprobada con el *software;* es decir, la demostración debe funcionar como una explicación a través de las propiedades conocidas (De Villiers, 1996). Mediante la exploración experimental es posible despejar las dudas en torno a la verdad del enunciado, sin embargo será necesario explicar por qué se está cumpliendo.

El segundo obstáculo puede ser sorteado en las actividades a desarrollar en estos entornos si los estudiantes tienen la oportunidad de investigar sobre un problema y descubren determinadas propiedades geométricas. "En matemática, transformar las herramientas que se usan conduce a un cambio de los problemas que resulta interesante plantear, más que a una transformación de la matemática en sí, como muchas veces se ha afirmado" (Balacheff, 2000b, p. 96).

Balacheff (2000a) resalta la importancia que tiene, para producir demostraciones o poner en marcha procesos de demostración, la identificación de un riesgo generado por la incertidumbre en la motivación del individuo. Los desafíos pueden partir de una satisfacción intelectual o de una curiosidad por la verdad que puede motivar a los estudiantes.

El desafío será diseñar actividades para lograr que los alumnos valoren la necesidad de justificar sus construcciones y conjeturas. "Es importante no retardar indebidamente la primera introducción de la demostración como medio de explicación, ya que los alumnos podrían acostumbrarse a ver la geometría sólo como una acumulación de hechos descubiertos empíricamente en la cual la explicación no tiene ningún rol. Usar la demostración como herramienta de descubrimiento en lugar de centrarse unilateralmente en la demostración como herramienta de verificación en geometría" (De Villiers, 1996, p. 3).

Para fundamentar el análisis de las posibles respuestas que esperamos de los estudiantes en estas actividades seguimos las ideas de Balacheff (2000a), quien distingue entre explicaciones, pruebas y demostraciones:

- *Explicación:* es todo discurso desarrollado por una persona o un grupo cuyo objetivo es comunicar a otro el carácter de veracidad de un enunciado matemático.
- *Prueba:* son explicaciones aceptadas por otros en un momento dado. Así, una explicación puede tener el estatus de prueba para un grupo social pero no para otro.
- *Demostración:* son pruebas particulares, se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas lógicas.

El autor clasifica las pruebas de los estudiantes en dos categorías: pragmáticas o experimentales y conceptuales o deductivas. Para las pruebas pragmáticas introduce una clasificación en varios tipos:

- *Empirismo naïf:* el procedimiento consiste en la verificación de la propiedad para unos pocos ejemplos elegidos sin ningún criterio. Es el tipo más elemental de prueba.
- *Experimento crucial:* los procedimientos de los estudiantes se basan en la elección minuciosa de un ejemplo, tan poco particular como les es posible, convencidos de que si se cumple allí, se cumplirá siempre.

- *Ejemplo genérico:* es el caso de procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Los estudiantes empiezan a usar propiedades abstractas en sus pruebas, aunque referidas al ejemplo. Si suprimimos el dibujo usado, la prueba que queda pierde información o carece de significado.

Para las pruebas conceptuales o deductivas, Balacheff distingue los siguientes tipos:

- *Experimento mental:* la explicación se centra en la acción interiorizada, separándola de su ejecución sobre un representante particular. Es una *prueba* deductiva abstracta organizada a partir de manipulaciones de ejemplos concretos. Es posible suprimir los dibujos realizados que acompañan a la prueba, sin que pierda significado.
- *Cálculo sobre enunciados:* son construcciones intelectuales fundamentadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Para situarnos en el nivel de razonamiento de los estudiantes en esta etapa, tuvimos en cuenta el proceso de aprendizaje de la demostración partiendo del análisis de los niveles de razonamiento de Van Hiele; en particular, de las características de cada nivel que tienen que ver con la demostración, y que son las que describimos a continuación (detalles en Jaime y Gutiérrez, 1996):

- *Nivel 1* (Reconocimiento): cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. Se usan propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar o caracterizar figuras.
- *Nivel 2* (Análisis): la demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.
- *Nivel 3* (Clasificación): se comprenden los pasos de una demostración explicada por el profesor. Los estudiantes están en capacidad de repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
- *Nivel 4* (Deducción formal): se tiene la capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales.

- *Nivel 5* (Rigor): se tiene la posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual de la geometría euclídea y la capacidad para compararlos y decidir sobre su equivalencia.

El modelo de Van Hiele refleja que el aprendizaje de la demostración es un camino largo que los estudiantes deben recorrer acompañados por el docente.

Según Jaime y Gutiérrez (1996), Van Hiele sugiere la organización de la enseñanza sobre la base de cinco "fases de aprendizaje" para ayudar a los estudiantes a pasar de su nivel de razonamiento actual al siguiente. Describimos las características principales de cada una:

- *Fase 1* (Información): se procede a tomar contacto con el nuevo tema. El profesor tiene la oportunidad de identificar los conocimientos previos que pueden tener sus alumnos y su nivel de razonamiento.
- *Fase 2* (Orientación dirigida): se guía a los estudiantes mediante actividades y problemas para que éstos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar.
- *Fase 3* (Explicitación): los estudiantes expresan los resultados que han obtenido, intercambian sus experiencias y discuten sobre ella para lograr un mejor aprendizaje. En esta fase se tendrá en cuenta el permanente diálogo y discusión en todas las actividades.
- *Fase 4* (Orientación libre): en esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas generalmente más complejos.
- *Fase 5* (Integración): los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y sus relaciones, integrando estos nuevos conocimientos, métodos y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

SECUENCIA

La secuencia incluye tareas que tienen el propósito de generar dudas que despierten el interés en los estudiantes por explorar, formular conjeturas, reformularlas y validarlas; es decir enfrentarlos con el problema de la validez, de la eficiencia y de la comunicación de las soluciones. A partir del encuadre teórico, diseñamos una serie de tareas en torno a un problema para el trabajo con los estudiantes. Para ello, ubicamos a los estudiantes en el nivel 3 y organizamos la enseñanza sobre la base de las cinco fases de aprendizaje, siguiendo el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

La secuencia que proponemos está pensada para implementarla en la modalidad de taller, en el laboratorio de informática, utilizando el *software* Geogebra. El trabajo consiste en el desarrollo de las tareas. La estructura de las clases es la siguiente:

- Los estudiantes leen las consignas y trabajan en parejas. Cada pareja intenta resolver las tareas; uno de ellos realiza la construcción en la computadora, mientras que el otro confecciona el auto-protocolo, el cual consiste en escribir notas en las que vaya comentando toda la actividad, los motivos de sus decisiones, etc. (Gutiérrez, 2005).
- Los docentes acompañan la actividad y van evaluando si es necesario dar alguna ayuda.
- Al finalizar la tarea, cada pareja expone su conjetura y su explicación (o prueba), debatiendo con el resto de la clase, con el docente como moderador.

Fase de información

La actividad del taller comienza con una revisión de conceptos previos necesarios para resolver las distintas etapas del problema que plantearemos luego. También recomendamos que los estudiantes exploren los comandos y herramientas del *software* que se utiliza.

Fase orientación dirigida

Tarea 1

Construye el trazado del recorrido que deberá hacer el tren de alta velocidad que unirá las ciudades: Buenos Aires, Rosario y Córdoba, si la empresa que construirá las vías desea minimizar los costos.

Los estudiantes representan la situación planteada utilizando el *software* Geogebra, como se muestra en la figura 1, para poder formular una conjetura respecto del trazado de las vías.

Figura 1

Los estudiantes con la guía del docente exploran la situación a través de las actividades como las siguientes:

- Buscar información con Google Earth.
- Construir una figura que represente la situación.
- Reconocer figuras geométricas y sus propiedades.
- Comprobar algunos recorridos posibles.
- Abordar el problema de manera experimental.
- Tomar como solución algún caso tan poco particular como les sea posible.

Es decir, esperamos obtener respuestas correspondientes al *empirismo naïf* o *experiencia crucial*.

Tarea 2

Ubica un punto E y construye los segmentos EB, ER y EC. Halla la suma de sus longitudes e investiga la ubicación de dicho punto con la condición de minimizar la suma, utilizando la herramienta "desplaza".

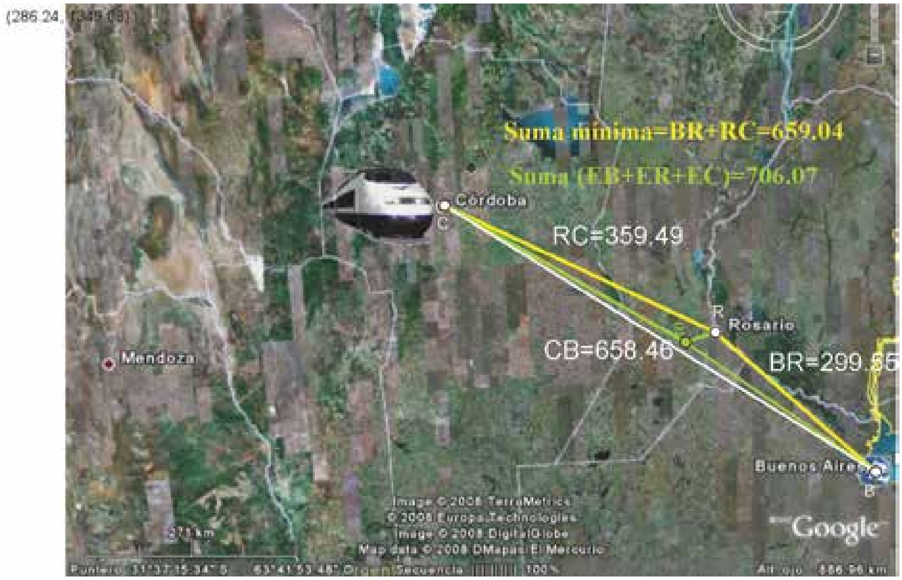

Figura 2

En esta tarea, el *software* les da la posibilidad del desplazamiento continuo de la figura y así pueden observar todas las posibles ubicaciones del punto (figura 2). Esto permite confirmar o no la conjetura inicial. Los estudiantes necesitan explicar las razones de validez de la conjetura, separándose del representante particular (para la ubicación del punto E) que eligieron inicialmente. Suponemos que ante la necesidad de explicar a otros su conjetura y debido a la visualización lograda de la situación, algunos estudiantes pueden usar el tipo de prueba de *ejemplo genérico* o bien de *experimento mental*.

Tarea 3

Investiga cuál es el punto interior al triángulo que cumple que la suma de las distancias a cada vértice del mismo es mínima.

Los estudiantes investigarán que dicho punto se denomina Punto de Fermat. En esta tarea el docente explicará a sus estudiantes la construcción para hallar el Punto de Fermat justificando la propiedad que posee el mismo. La justificación consistirá en la demostración geométrica de la propiedad del Punto de Fermat que describimos a continuación.

Observemos la figura 3. Construimos un triángulo ABC, ubicamos un punto cualquiera P en su interior. Trazamos los segmentos PA, PB, PC. Rotamos el punto P y el vértice B, con un ángulo de 60° alrededor del punto A, obtenemos P′ y B_1. Observemos que los segmentos AP y AP′ son congruentes por ser uno el rotado del otro; lo mismo ocurre con el segmento PB y P′B_1. Luego el triángulo APP′ es isósceles y el ángulo en A es de 60°, por lo tanto dicho triángulo es equilátero. Es decir PP′ es congruente a PA.

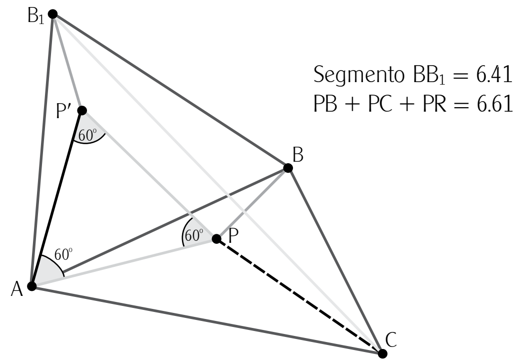

Figura 3

La suma de los segmentos PA + PB + PC es igual a la suma de los segmentos PP′ + P′B_1 + PC, y esta suma será mínima cuando los tres segmentos estén alineados, es decir cuando C, P, P′ y B1 estén alineados en CB_1 (figura 4):

El punto buscado es aquel donde los tres segmentos PA, PB y PC forman ángulos de 120°. En efecto: APC = 180° − APP′ = 180° − 60° = 120° y BPA = B1P′A = 180° − PP′A = 120°. Por lo tanto el ángulo BPC también es de 120°. Lo mismo ocurre si rotamos P y B, un ángulo de 60° alrededor de C, o si rotamos P

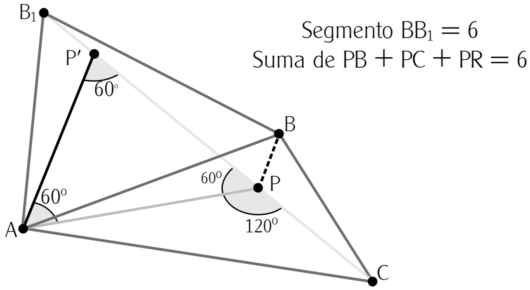

Figura 4

y A, un ángulo de 60° alrededor de B. Finalmente en esta tarea el docente podría solicitar que realicen la demostración utilizando otro vértice del triángulo como centro de la rotación y expliquen la construcción a un compañero.

Con esta demostración hallamos la forma de encontrar el Punto de Fermat. Esto es, construyendo los triángulos equiláteros sobre los lados del triángulo ABC y uniendo cada vértice externo de estos triángulos, con el vértice opuesto del triángulo inicial (figura 5).

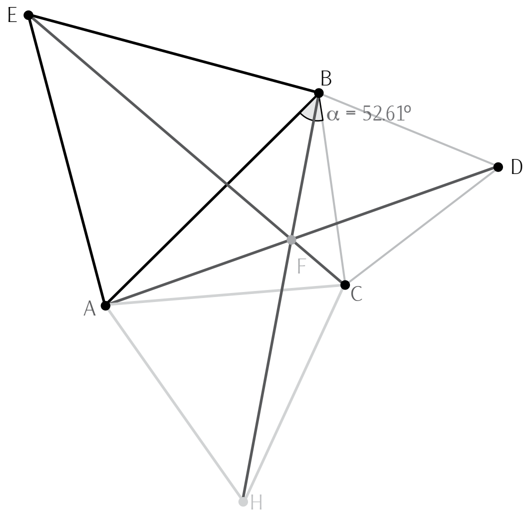

Figura 5

Tarea 4

¿Podríamos utilizar este resultado en el problema planteado?

En la respuesta de los estudiantes es probable que analicen la medida de los ángulos interiores que tiene el triángulo CRB. De esta manera observan que el ángulo en R es de aproximadamente 163° (figura 6).

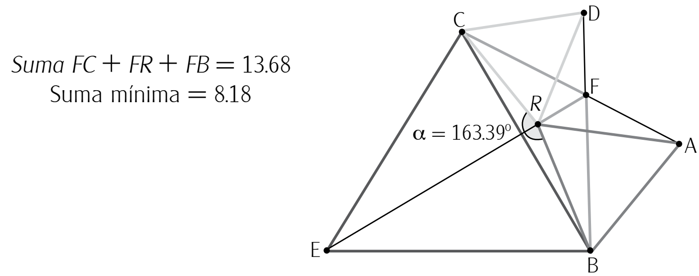

Figura 6

Tienen que investigar lo que sucede en el caso de que el punto F se encuentre fuera del triángulo.

Volviendo a la construcción realizada en la tarea 3, es posible que observen que al desplazar un vértice del triángulo ABC, por ejemplo el punto A, de manera que el ángulo en A mida 120°, el punto F de Fermat se encuentre en un vértice (el que corresponde al ángulo de 120°, en cuyo caso la suma mínima es la suma de las longitudes de dos lados: BA + AC (figura 7).

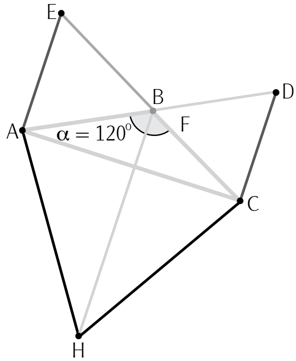

Figura 7

Si el ángulo en B es mayor de 120°, dicho punto F se encuentra fuera del triángulo. En este caso, no existe ningún punto en el que los tres segmentos formen ángulos de 120°, de ahí que el punto debe coincidir con un vértice (el vértice del ángulo obtuso, B) y la suma mínima seguirá siendo la suma de dos lados, AB + BC (figura 8).

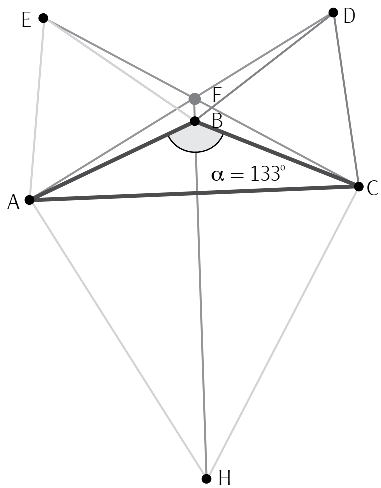

Figura 8

Por lo tanto, suponemos que podrán concluir que la forma de minimizar los costos sería construir las vías de Buenos Aires a Rosario y de Rosario a Córdoba.

En esta tarea los estudiantes necesitarán basarse en propiedades de los objetos geométricos para argumentar la validez de la conjetura. En un esfuerzo de explicación, deberán fundamentar las soluciones propuestas de modo que les permita liberarse de situaciones particulares y pasar a acciones interiorizadas. Suponemos que podrán encaminarse hacia el tipo de prueba de *experimento mental*.

En cuanto a la fase 3 de explicitación, una de sus finalidades es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten lo que han observado, a la par de revisar lo realizado. También tiene la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, perfeccionando la forma de expresarse. Esta fase estará presente a lo largo de toda la secuencia.

Fase orientación libre

Tarea 5

Construye el trazado del recorrido que deberá hacer el tren de alta velocidad, si uniera cuatro ciudades ubicadas en los vértices de un cuadrado y si la empresa que construirá las vías desea minimizar los costos.

En esta etapa los estudiantes deben aplicar los conocimientos y lenguaje utilizados en la fase 2 para resolver la tarea. La idea de estas extensiones del mismo problema es servir de complemento de las actividades realizadas, que podrán dejarse a los alumnos para que resuelvan de manera autónoma (esperando que los estudiantes realicen pruebas de tipo experimento mental y argumenten las soluciones encontradas). Para resolver esta situación, es probable que los estudiante construyan el cuadrado ABCD y hallen su centro O. Podrán ubicarse primero en el triángulo OBD, y buscar el punto que se encuentra a una distancia mínima de los tres vértices, es decir, construir el Punto de Fermat del triángulo OBD (figura 9).

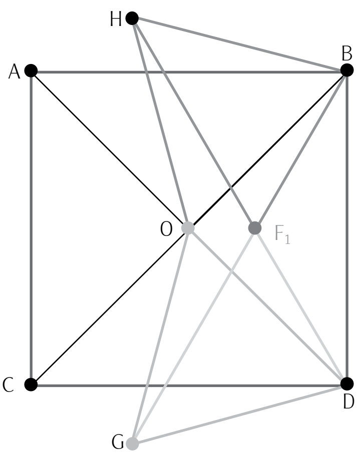

Figura 9

Suponemos que algunos estudiantes podrán utilizar la simetría para encontrar el punto F_2 (figura 10) y construir el trazado de las vías.

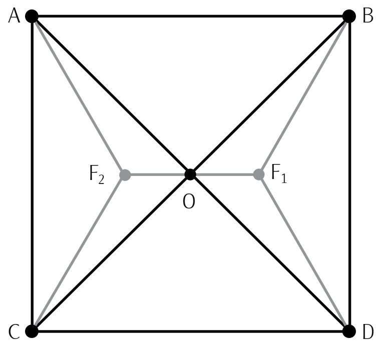

Figura 10

Fase integración

Tarea 6

¿Es posible resolver este problema para cuatro ciudades cualesquiera de nuestro país? ¿El problema tendría solución siempre? ¿La solución sería única?

Para adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionándolos con otros campos que hayan estudiado anteriormente, es necesario condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. Es decir, enfrentarlos a una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

REFLEXIONES FINALES

Es necesario acostumbrar a nuestros estudiantes a justificar sus afirmaciones. Para ello priorizamos la "explicación", entendiendo esta como una forma de mostrar por qué es válida una conjetura en términos de otros resultados geométricos ya conocidos, es decir, cómo "esto" es una consecuencia lógica de "estos otros" resultados.

En este marco de construcción del conocimiento, la enseñanza de la geometría, al utilizar un sistema de geometría dinámica, parte de la base de la resolución de problemas con una perspectiva en la que los alumnos tienen la posibilidad de ejercer el papel de investigadores sobre cada contenido que se pretende adquirir. El docente cambia su papel de director y experto por el de copartícipe, apoyo y coaprendiz (Fisher, 1993).

Pensamos que este trabajo previo tiene en cuenta funciones de la demostración como la de ser una herramienta de descubrimiento o de explicación. Debería utilizarse para introducir la demostración como una actividad significativa para nuestros alumnos en este nivel educativo.

No pretendemos presentar situaciones que permitan al alumno automáticamente realizar demostraciones formales de manera comprensiva, sino actividades que la problematicen debido a la complejidad del aprendizaje de la demostración. Suponemos que algunos alumnos podrán realizar demostraciones deductivas informales sencillas, pero sobre todo queremos lograr que comprendan la *necesidad de demostrar*, y que realicen aquellas que su destreza matemática y su experiencia escolar les permitan. Así como también aprovechen al máximo las ventajas que ofrece la geometría dinámica en este camino.

Consideramos importante, al diseñar secuencias de este tipo, tener presente estas cuestiones:

- Seguir las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.
- Aprovechar las ventajas que ofrece la geometría dinámica para ello.
- Proponer enunciados abiertos, sin quitarles a los estudiantes la responsabilidad de la verdad.
- A través de explicaciones, que se irán enriqueciendo en el proceso, iniciar a los estudiantes en la justificación de la validez de sus conjeturas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (2000a), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, Bogotá, Universidad de los Andes, Una empresa docente.

——— (2000b), “Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas”, en M. Colén, Y. Fraile y C. Vidal (eds.), *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, Barcelona, Graó de Irif, pp. 70-88.

De Villiers, M. (1996), “Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría”, en *The Future of Secondary School Geometry, SOSI Geometry Imperfected Conference*, Pretoria, University of South Africa.

Fisher, E. (1993), "The teacher's role", en P. Scrimshaw (ed.), *Language, classrooms and computer,* Londres, Routledge, pp. 57-74.

Gutiérrez, A. (2005), "Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica", en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds.), *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Córdoba, SEIEM, pp. 27-44.

Jaime, A. y A. Gutiérrez (1996), "El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele", en *El grupo de las isometrías del plano*, Madrid, Síntesis, pp. 85-97.

DATOS DE LAS AUTORAS

Silvia Bernardis
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina
silvia.bernardis@gmail.com

Susana Moriena
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina
smoriena@yahoo.com.ar